Recherche Opérationnelle

Dualité

Nadia Brauner & Alice Joffard

12 février 2021

Université Grenoble Alpes

G-SCOP Sciences pour la conception, l'optimisation et la production

A vous de jouer

A vous de jouer

- Deux équipes: les vendeurs et les acheteurs.

A vous de jouer

- Deux équipes: les vendeurs et les acheteurs.
- Les vendeurs doivent vendre des comprimés de vitamines A et C aux acheteurs, ils veulent maximiser leurs profits.

A vous de jouer

- Deux équipes: les vendeurs et les acheteurs.
- Les vendeurs doivent vendre des comprimés de vitamines A et C aux acheteurs, ils veulent maximiser leurs profits.
- Les acheteurs doivent consommer leurs apports quotidiens en vitamines A et C, ils veulent en minimiser le coût.

A vous de jouer

- Deux équipes: les vendeurs et les acheteurs.
- Les vendeurs doivent vendre des comprimés de vitamines A et C aux acheteurs, ils veulent maximiser leurs profits.
- Les acheteurs doivent consommer leurs apports quotidiens en vitamines A et C, ils veulent en minimiser le coût.
- Jusqu'ici, les acheteurs consommaient leurs apports en vitamines A et C à l'aide de 6 produits alimentaires:

	produits (unités/kg)						demande
	1	2	3	4	5	6	(unités)
vitamine A	1	0	2	2	1	2	9
vitamine C	0	1	3	1	3	2	19
Prix par kg	35	30	60	50	27	22	

A vous de jouer

- Deux équipes: les vendeurs et les acheteurs.
- Les vendeurs doivent vendre des comprimés de vitamines A et C aux acheteurs, ils veulent maximiser leurs profits.
- Les acheteurs doivent consommer leurs apports quotidiens en vitamines A et C, ils veulent en minimiser le coût.
- Jusqu'ici, les acheteurs consommaient leurs apports en vitamines A et C à l'aide de 6 produits alimentaires:

	produits (unités/kg)						demande
	1	2	3	4	5	6	(unités)
vitamine A	1	0	2	2	1	2	9
vitamine C	0	1	3	1	3	2	19
Prix par kg	35	30	60	50	27	22	

1. Nommez un représentant dans chaque équipe

A vous de jouer

- Deux équipes: les vendeurs et les acheteurs.
- Les vendeurs doivent vendre des comprimés de vitamines A et C aux acheteurs, ils veulent maximiser leurs profits.
- Les acheteurs doivent consommer leurs apports quotidiens en vitamines A et C, ils veulent en minimiser le coût.
- Jusqu'ici, les acheteurs consommaient leurs apports en vitamines A et C à l'aide de 6 produits alimentaires:

	produits (unités/kg)						demande (unités)
	1	2	3	4	5	6	
vitamine A	1	0	2	2	1	2	9
vitamine C	0	1	3	1	3	2	19
Prix par kg	35	30	60	50	27	22	

1. Nommez un représentant dans chaque équipe
2. Négotiez: à chaque tour, les vendeurs se consultent et proposent un prix w_A pour la vitamine A et un prix w_C pour la vitamine C (ex: $w_A = 40$, $w_C = 36$). Les acheteurs se consultent et acceptent ou rejetent l'offre, en argumentant (ex: refus, le coût est moins élevé avec les produits 1 et 2).

A vous de jouer

- Deux équipes: les vendeurs et les acheteurs.
- Les vendeurs doivent vendre des comprimés de vitamines A et C aux acheteurs, ils veulent maximiser leurs profits.
- Les acheteurs doivent consommer leurs apports quotidiens en vitamines A et C, ils veulent en minimiser le coût.
- Jusqu'ici, les acheteurs consommaient leurs apports en vitamines A et C à l'aide de 6 produits alimentaires:

	produits (unités/kg)						demande
	1	2	3	4	5	6	(unités)
vitamine A	1	0	2	2	1	2	9
vitamine C	0	1	3	1	3	2	19
Prix par kg	35	30	60	50	27	22	

1. Nommez un représentant dans chaque équipe
2. Négotiez: à chaque tour, les vendeurs se consultent et proposent un prix w_A pour la vitamine A et un prix w_C pour la vitamine C (ex: $w_A = 40$, $w_C = 36$). Les acheteurs se consultent et acceptent ou rejetent l'offre, en argumentant (ex: refus, le coût est moins élevé avec les produits 1 et 2).
3. Le jeu s'arrête lorsque vous tombez d'accord sur un prix.

A vous de jouer

1) Modélisez le problème des acheteurs comme un programme linéaire.
2) Mettez le problème des acheteurs sous forme matricielle.
4) Modélisez le problème des vendeurs comme un programme linéaire.
5) Mettez le problème des vendeurs sous forme matricielle.
6) Que remarquez vous ?

	produits (unités/kg)						demande
	1	2	3	4	5	6	(unités)
vitamine A	1	0	2	2	1	2	9
vitamine C	0	1	3	1	3	2	19
Prix par kg	35	30	60	50	27	22	

Correction: Question 1

Correction: Question 1

- variables de décisions: x_i = quantité (kg) de produit alimentaire i achetée

Correction: Question 1

- variables de décisions: x_i = quantité (kg) de produit alimentaire i achetée
- contraintes: apports quotidiens en vitamines A et C

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
x_1 & & & + & 2x_3 & + & 2x_4 & + & x_5 & + & 2x_6 & \geq & 9 \\
 & & x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & + & 3x_5 & + & 2x_6 & \geq & 19
\end{array}
$$

$x_i \geq 0$ pour tout $i = 1, 2 \ldots 6$

Correction: Question 1

- variables de décisions: x_i = quantité (kg) de produit alimentaire i achetée
- contraintes: apports quotidiens en vitamines A et C

$$\begin{array}{ccccccccccccc} x_1 & & & + & 2x_3 & + & 2x_4 & + & x_5 & + & 2x_6 & \geq & 9 \\ & & x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & + & 3x_5 & + & 2x_6 & \geq & 19 \end{array}$$

$x_i \geq 0$ pour tout $i = 1, 2 \ldots 6$

- objectif: $\min 35x_1 + 30x_2 + 60x_3 + 50x_4 + 27x_5 + 22x_6$

Correction: Question 2

Correction: Question 2

$$\min \quad z = (35, 30, 60, 50, 27, 22) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_6 \end{pmatrix}$$

s.c.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_6 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 9 \\ 19 \end{pmatrix}$$

$$x_i \geq 0$$

Correction: Question 3

Correction: Question 3

- variables de décisions: w_A = prix d'un kg de vitamine A, w_C = prix d'un kg de vitamine C

Correction: Question 3

- variables de décisions: w_A = prix d'un kg de vitamine A, w_C = prix d'un kg de vitamine C
- contraintes: rester compétitif

$$
\begin{array}{rcrcll}
w_A & & & \leq & 35 & \text{(produit 1)} \\
 & & w_C & \leq & 30 & \text{(produit 2)} \\
2w_A & + & 3w_C & \leq & 60 & \text{(produit 3)} \\
2w_A & + & w_C & \leq & 50 & \text{(produit 4)} \\
w_A & + & 3w_C & \leq & 27 & \text{(produit 5)} \\
2w_A & + & 2w_C & \leq & 22 & \text{(produit 6)} \\
w_A \geq 0 & & w_C \geq 0 & & & \text{(pas de cadeaux)}
\end{array}
$$

Correction: Question 3

- variables de décisions: w_A = prix d'un kg de vitamine A, w_C = prix d'un kg de vitamine C
- contraintes: rester compétitif

$$
\begin{array}{rcrcll}
w_A & & & \leq & 35 & \text{(produit 1)} \\
 & & w_C & \leq & 30 & \text{(produit 2)} \\
2w_A & + & 3w_C & \leq & 60 & \text{(produit 3)} \\
2w_A & + & w_C & \leq & 50 & \text{(produit 4)} \\
w_A & + & 3w_C & \leq & 27 & \text{(produit 5)} \\
2w_A & + & 2w_C & \leq & 22 & \text{(produit 6)} \\
\multicolumn{2}{l}{w_A \geq 0} & \multicolumn{2}{l}{w_C \geq 0} & & \text{(pas de cadeaux)}
\end{array}
$$

- objectif: $\max 9w_A + 19w_C$

Correction: Question 4

Correction: Question 4

$$\max \quad v = (w_A, w_C)\begin{pmatrix} 9 \\ 19 \end{pmatrix}$$

s.c.

$$(w_A, w_C)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \leq (35, 30, 60, 50, 27, 22)$$

$$w_A, w_C \geq 0$$

Correction: Question 5

$$
\text{Acheteurs:}\quad \begin{cases} \min \quad (35,30,60,50,27,22)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_6 \end{pmatrix} \\ \text{s.c.} \\ \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_6 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 9 \\ 19 \end{pmatrix} \\ \quad x_i \geq 0 \end{cases}
$$

$$
\text{Vendeurs:}\quad \begin{cases} \max \quad v = (w_A, w_C)\begin{pmatrix} 9 \\ 19 \end{pmatrix} \\ \text{s.c.} \\ (w_A, w_C)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \leq (35,30,60,50,27,22) \\ w_A, w_C \geq 0 \end{cases}
$$

A vous de jouer

6) Trouvez la solution du problème des acheteurs en utilisant OPL: https://moodle.caseine.org/mod/vpl/forms/edit.php?id=35235&userid=31793
7) Trouvez la solution du problème des vendeurs en utilisant OPL
8) Que remarquez vous ?

A vous de jouer

6) Trouvez la solution du problème des acheteurs en utilisant OPL: `https://moodle.caseine.org/mod/vpl/forms/edit.php?id=35235&userid=31793`
7) Trouvez la solution du problème des vendeurs en utilisant OPL
8) Que remarquez vous ?

Correction: `https://youtu.be/-M3W-bMS0_U`

Définition - Dual d'un PL

Définition - Dual d'un PL

Wikipédia: En théorie de l'optimisation, la dualité désigne le principe selon lequel les problèmes d'optimisation peuvent être vus de deux perspectives, le problème primal $(\mathcal{P})$ ou le dual $(\mathcal{D})$.

Définition - Dual d'un PL

Wikipédia: En théorie de l'optimisation, la dualité désigne le principe selon lequel les problèmes d'optimisation peuvent être vus de deux perspectives, le problème primal $(\mathcal{P})$ ou le dual $(\mathcal{D})$.

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{cases} \min & z = cx \\ s.c. & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

Définition - Dual d'un PL

Wikipédia: En théorie de l'optimisation, la dualité désigne le principe selon lequel les problèmes d'optimisation peuvent être vus de deux perspectives, le problème primal $(\mathcal{P})$ ou le dual $(\mathcal{D})$.

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{cases} \min & z = cx \\ s.c. & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

$$(\mathcal{D}) \quad \begin{cases} \max & v = wb \\ s.c. & wA \leq c \\ & w \geq 0 \end{cases}$$

Interprétation économique

Interprétation économique

	ressource i	demande j
produit j	a_{ij}	c_j
coût i	b_i	

Interprétation économique

	ressource i	demande j
produit j	a_{ij}	c_j
coût i	b_i	

Primal (acheteur) : quelle quantité x_i de ressource i acheter pour satisfaire la demande à coût minimum ?

$$\min \sum_i b_i x_i \qquad s.c. \quad \sum_i a_{ij} x_i \geq c_j \quad \forall j$$

Interprétation économique

	ressource i	demande j
produit j	a_{ij}	c_j
coût i	b_i	

Primal (acheteur) : quelle quantité x_i de ressource i acheter pour satisfaire la demande à coût minimum ?

$$\min \sum_i b_i x_i \qquad s.c. \quad \sum_i a_{ij} x_i \geq c_j \quad \forall j$$

Dual (vendeur) : à quel prix proposer les produits pour maximiser le profit tout en restant compétitif ?

$$\max \sum_j c_j w_j \qquad s.c. \quad \sum_j a_{ij} w_j \leq b_i \quad \forall i$$

Ecriture du dual

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{cases} \min & z = cx \\ s.c. & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

$$(\mathcal{D}) \quad \begin{cases} \max & v = wb \\ s.c. & wA \leq c \\ & w \geq 0 \end{cases}$$

Formes équivalentes

$$(\mathcal{P}) \qquad \begin{cases} \min & z = cx \\ s.c. & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

Formes équivalentes

$$(\mathcal{P}) \qquad \begin{cases} \min & z = cx \\ s.c. & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{cases} \min & z = cx \\ s.c. & [-A]x \geq [-b] \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

Formes équivalentes

$$(\mathcal{P}) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} \min & z = cx \\ s.c. & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{array} \right.$$

$$(\mathcal{P}) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \min & z = cx \\ s.c. & [-A]x \geq [-b] \\ & x \geq 0 \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad (\mathcal{D}) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \max & v = w[-b] \\ s.c. & w[-A] \leq c \\ & w \geq 0 \end{array} \right.$$

Formes équivalentes

$$(\mathcal{P}) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \min & z = cx \\ s.c. & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{array} \right.$$

$$(\mathcal{P}) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \min & z = cx \\ s.c. & [-A]x \geq [-b] \\ & x \geq 0 \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad (\mathcal{D}) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \max & v = w[-b] \\ s.c. & w[-A] \leq c \\ & w \geq 0 \end{array} \right.$$

On remplace $-w$ par w:

$$(\mathcal{D}) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \max & v = wb \\ s.c. & wA \leq c \\ & w \leq 0 \end{array} \right.$$

Formes équivalentes

$$(\mathcal{P})\begin{cases} \min & z = cx \\ s.c. & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

Formes équivalentes

$$(\mathcal{P})\left\{\begin{array}{ll} \min & z = cx \\ s.c. & Ax{\color{red}=}b \\ & x \geq 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{ll} \min & z = cx \\ s.c. & \begin{bmatrix} A \\ -A \end{bmatrix} x \geq \begin{bmatrix} b \\ -b \end{bmatrix} \\ & x \geq 0 \end{array}\right.$$

Formes équivalentes

$$(\mathcal{P})\begin{cases} \min & z = cx \\ s.c. & Ax{=}b \\ & x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \min & z = cx \\ s.c. & \begin{bmatrix} A \\ -A \end{bmatrix} x \geq \begin{bmatrix} b \\ -b \end{bmatrix} \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

$$(\mathcal{D})\begin{cases} \max & v = (w^+, w^-)\begin{bmatrix} b \\ -b \end{bmatrix} \\ s.c. & (w^+, w-)\begin{bmatrix} A \\ -A \end{bmatrix} \leq c \\ & w^+, w^- \geq 0 \end{cases}$$

Formes équivalentes

$$(\mathcal{P})\begin{cases} \min & z = cx \\ s.c. & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \min & z = cx \\ s.c. & \begin{bmatrix} A \\ -A \end{bmatrix} x \geq \begin{bmatrix} b \\ -b \end{bmatrix} \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

$$(\mathcal{D})\begin{cases} \max & v = (w^+, w^-)\begin{bmatrix} b \\ -b \end{bmatrix} \\ s.c. & (w^+, w-)\begin{bmatrix} A \\ -A \end{bmatrix} \leq c \\ & w^+, w^- \geq 0 \end{cases} \Rightarrow (\mathcal{D})\begin{cases} \max & v = (w^+ - w^-)b \\ s.c. & (w^+ - w^-)A \leq c \\ & w^+, w^- \geq 0 \end{cases}$$

Formes équivalentes

$$(\mathcal{P})\begin{cases} \min & z = cx \\ s.c. & Ax{=}b \\ & x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \min & z = cx \\ s.c. & \begin{bmatrix} A \\ -A \end{bmatrix} x \geq \begin{bmatrix} b \\ -b \end{bmatrix} \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

$$(\mathcal{D})\begin{cases} \max & v = (w^+, w^-)\begin{bmatrix} b \\ -b \end{bmatrix} \\ s.c. & (w^+, w-)\begin{bmatrix} A \\ -A \end{bmatrix} \leq c \\ & w^+, w^- \geq 0 \end{cases} \Rightarrow (\mathcal{D})\begin{cases} \max & v = (w^+ - w^-)b \\ s.c. & (w^+ - w^-)A \leq c \\ & w^+, w^- \geq 0 \end{cases}$$

On pose $w = w^+ - w^-$:

Formes équivalentes

$$(\mathcal{P})\left\{\begin{array}{ll} \min & z = cx \\ s.c. & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{ll} \min & z = cx \\ s.c. & \begin{bmatrix} A \\ -A \end{bmatrix} x \geq \begin{bmatrix} b \\ -b \end{bmatrix} \\ & x \geq 0 \end{array}\right.$$

$$(\mathcal{D})\left\{\begin{array}{ll} \max & v = (w^+, w^-)\begin{bmatrix} b \\ -b \end{bmatrix} \\ s.c. & (w^+, w-)\begin{bmatrix} A \\ -A \end{bmatrix} \leq c \\ & w^+, w^- \geq 0 \end{array}\right. \Rightarrow (\mathcal{D})\left\{\begin{array}{ll} \max & v = (w^+ - w^-)b \\ s.c. & (w^+ - w^-)A \leq c \\ & w^+, w^- \geq 0 \end{array}\right.$$

On pose $w = w^+ - w^-$:

$$(\mathcal{D}) \quad \left\{\begin{array}{ll} \max & v = wb \\ s.c. & wA \leq c \\ & w \text{ de signe arbitraire} \end{array}\right.$$

Tableau des signes

primal	dual
min	max
max	min
variable ≥ 0	contrainte $\geq$
variable $\in \mathbb{R}$	contrainte $=$
variable ≤ 0	contrainte $\leq$
contrainte $\leq$	variable ≤ 0
contrainte $=$	variable $\in \mathbb{R}$
contrainte $\geq$	variable ≥ 0

Propriétés

Propriétés

Propriété

Le dual du dual est équivalent au primal

Propriétés

Propriété

Le dual du dual est équivalent au primal

$$(\mathcal{P}) \left\{ \begin{array}{ll} \min & z = cx \\ s.c. & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{array} \right. \qquad (\mathcal{D}) \left\{ \begin{array}{ll} \max & v = wb \\ s.c. & wA \leq c \\ & w \geq 0 \end{array} \right.$$

Théorème de dualité faible

Pour chaque paire de solutions admissibles x de $(\mathcal{P})$ et w de $(\mathcal{D})$

$z = cx \geq wb = v$

Propriétés

Propriété

Le dual du dual est équivalent au primal

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} \min & z = cx \\ s.c. & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{cases} \qquad (\mathcal{D}) \begin{cases} \max & v = wb \\ s.c. & wA \leq c \\ & w \geq 0 \end{cases}$$

Théorème de dualité faible

Pour chaque paire de solutions admissibles x de $(\mathcal{P})$ et w de $(\mathcal{D})$

$z = cx \geq wb = v$

Preuve:

$$\begin{array}{ccccc} cx & \geq & wAx & \geq & wb \\ & \uparrow & & \uparrow & \\ & wA \leq c & & Ax \geq b & \\ & x \geq 0 & & w \geq 0 & \end{array}$$

Propriétés

Propriétés

Certificat d'optimalité

Si $z = cx = wb = v$ pour des solutions admissibles x de $(\mathcal{P})$ et w de $(\mathcal{D})$, alors x et w sont optimales

Propriétés

Certificat d'optimalité

Si $z = cx = wb = v$ pour des solutions admissibles x de $(\mathcal{P})$ et w de $(\mathcal{D})$, alors x et w sont optimales

Théorème de dualité forte

Si $(\mathcal{P})$ a des solutions et $(\mathcal{D})$ a des solutions, alors:

$$cx^* = w^* b$$

Idée du certificat d'optimalité

Idée du certificat d'optimalité

- A vous de jouer: essayez de trouver à taton la solution optimale: $\max z = x_1 + x_2$

$$
\begin{array}{rcrcl}
4x_1 & + & 5x_2 & \leq & 20 \\
2x_1 & + & x_2 & \leq & 6 \\
 & & x_2 & \leq & 2
\end{array}
$$

$x_1, x_2 \geq 0$

Idée du certificat d'optimalité

- A vous de jouer: essayez de trouver à taton la solution optimale: $\max z = x_1 + x_2$

$$\begin{array}{rcrcl} 4x_1 & + & 5x_2 & \leq & 20 \\ 2x_1 & + & x_2 & \leq & 6 \\ & & x_2 & \leq & 2 \end{array}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

- Comment prouver qu'elle est optimale ?

Idée du certificat d'optimalité

- A vous de jouer: essayez de trouver à taton la solution optimale: $\max z = x_1 + x_2$

$$\begin{array}{rcrcl} 4x_1 & + & 5x_2 & \leq & 20 \\ 2x_1 & + & x_2 & \leq & 6 \\ & & x_2 & \leq & 2 \end{array}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

- Comment prouver qu'elle est optimale ?
- Idée: trouver une combinaison valide des contraintes permettant de borner terme à terme la fonction objectif

Idée du certificat d'optimalité

- A vous de jouer: essayez de trouver à taton la solution optimale: $\max z = x_1 + x_2$

$$\begin{array}{rcrcl} 4x_1 & + & 5x_2 & \leq & 20 \\ 2x_1 & + & x_2 & \leq & 6 \\ & & x_2 & \leq & 2 \end{array}$$

$x_1, x_2 \geq 0$

- Comment prouver qu'elle est optimale ?
- Idée: trouver une combinaison valide des contraintes permettant de borner terme à terme la fonction objectif

$$\begin{array}{rcrcl} 4x_1 & + & 5x_2 & \leq & 20 \\ 2x_1 & + & x_2 & \leq & 6 \\ & & x_2 & \leq & 2 \\ \hline 4x_1 & + & 5x_2 & \leq & 20 \end{array}$$

Idée du certificat d'optimalité

$\max z = x_1 + x_2$

$$
\begin{array}{rcrcll}
4x_1 & + & 5x_2 & \leq & 20 & \times y_1 \\
2x_1 & + & x_2 & \leq & 6 & \times y_2 \\
 & & x_2 & \leq & 2 & \times y_3 \\
\hline
\end{array}
$$

Idée du certificat d'optimalité

$\max z = x_1 + x_2$

$$
\begin{array}{rcrcll}
4x_1 & + & 5x_2 & \leq & 20 & \times y_1 \\
2x_1 & + & x_2 & \leq & 6 & \times y_2 \\
 & & x_2 & \leq & 2 & \times y_3 \\
\hline
(4y_1 + 2y_2)x_1 & + & (5y_1 + y_2 + y_3)x_2 & \leq & 20y_1 + 6y_2 + 2y_3 & \\
 & & & \uparrow & & \\
 & & & y_1, y_2, y_3 & \geq 0 &
\end{array}
$$

Idée du certificat d'optimalité

$\max z = x_1 + x_2$

$$
\begin{array}{rcrcll}
4x_1 & + & 5x_2 & \leq & 20 & \times y_1 \\
2x_1 & + & x_2 & \leq & 6 & \times y_2 \\
 & & x_2 & \leq & 2 & \times y_3 \\
\hline
(4y_1 + 2y_2)x_1 & + & (5y_1 + y_2 + y_3)x_2 & \leq & 20y_1 + 6y_2 + 2y_3 & \\
 & & & \uparrow & & \\
 & & & y_1, y_2, y_3 & \geq 0 &
\end{array}
$$

$y_1 = 1 \quad y_2 = 0 \quad y_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 + x_2 \leq 4x_1 + 5x_2 \leq 20$

Idée du certificat d'optimalité

$\max z = x_1 + x_2$

$$
\begin{array}{rcrcll}
4x_1 & + & 5x_2 & \leq & 20 & \times y_1 \\
2x_1 & + & x_2 & \leq & 6 & \times y_2 \\
 & & x_2 & \leq & 2 & \times y_3 \\
\hline
(4y_1 + 2y_2)x_1 & + & (5y_1 + y_2 + y_3)x_2 & \leq & 20y_1 + 6y_2 + 2y_3 & \\
 & & & \uparrow & & \\
 & & & y_1, y_2, y_3 & \geq 0 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llll}
y_1 = 1 \quad y_2 = 0 \quad y_3 = 0 & \Rightarrow & x_1 + x_2 \leq 4x_1 + 5x_2 \leq 20 \\
y_1 = 0 \quad y_2 = 1 \quad y_3 = 0 & \Rightarrow & x_1 + x_2 \leq 2x_1 + 1x_2 \leq 6
\end{array}
$$

Idée du certificat d'optimalité

$\max z = x_1 + x_2$

$$
\begin{array}{rcrcll}
4x_1 & + & 5x_2 & \leq & 20 & \times y_1 \\
2x_1 & + & x_2 & \leq & 6 & \times y_2 \\
 & & x_2 & \leq & 2 & \times y_3 \\
\hline
(4y_1+2y_2)x_1 & + & (5y_1+y_2+y_3)x_2 & \leq & 20y_1+6y_2+2y_3 & \\
 & & & \uparrow & & \\
 & & & y_1,y_2,y_3 & \geq 0 &
\end{array}
$$

$y_1 = 1 \quad y_2 = 0 \quad y_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 + x_2 \leq 4x_1 + 5x_2 \leq 20$

$y_1 = 0 \quad y_2 = 1 \quad y_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 + x_2 \leq 2x_1 + 1x_2 \leq 6$

$y_1 = 0 \quad y_2 = 0 \quad y_3 = 1 \quad \Rightarrow \quad x_2 \leq 2$ on ne peut pas conclure

Idée du certificat d'optimalité

$\max z = x_1 + x_2$

$$
\begin{array}{rcrcll}
4x_1 & + & 5x_2 & \leq & 20 & \times y_1 \\
2x_1 & + & x_2 & \leq & 6 & \times y_2 \\
 & & x_2 & \leq & 2 & \times y_3 \\
\hline
(4y_1 + 2y_2)x_1 & + & (5y_1 + y_2 + y_3)x_2 & \leq & 20y_1 + 6y_2 + 2y_3 & \\
 & & & \uparrow & & \\
 & & & y_1, y_2, y_3 & \geq 0 &
\end{array}
$$

$y_1 = 1 \quad y_2 = 0 \quad y_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 + x_2 \leq 4x_1 + 5x_2 \leq 20$

$y_1 = 0 \quad y_2 = 1 \quad y_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 + x_2 \leq 2x_1 + 1x_2 \leq 6$

$y_1 = 0 \quad y_2 = 0 \quad y_3 = 1 \quad \Rightarrow \quad x_2 \leq 2$ on ne peut pas conclure

$y_1 = 0 \quad y_2 = 0.5 \quad y_3 = 0.5 \quad \Rightarrow \quad x_1 + x_2 \leq x_1 + x_2 \leq 4$

Idée du certificat d'optimalité

$\max z = x_1 + x_2$

$$
\begin{array}{rcrcll}
4x_1 & + & 5x_2 & \leq & 20 & \times y_1 \\
2x_1 & + & x_2 & \leq & 6 & \times y_2 \\
 & & x_2 & \leq & 2 & \times y_3 \\
\hline
(4y_1 + 2y_2)x_1 & + & (5y_1 + y_2 + y_3)x_2 & \leq & 20y_1 + 6y_2 + 2y_3 & \\
 & & & \uparrow & & \\
 & & & y_1, y_2, y_3 & \geq 0 &
\end{array}
$$

$y_1 = 1 \quad y_2 = 0 \quad y_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 + x_2 \leq 4x_1 + 5x_2 \leq 20$

$y_1 = 0 \quad y_2 = 1 \quad y_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 + x_2 \leq 2x_1 + 1x_2 \leq 6$

$y_1 = 0 \quad y_2 = 0 \quad y_3 = 1 \quad \Rightarrow \quad x_2 \leq 2$ on ne peut pas conclure

$y_1 = 0 \quad y_2 = 0.5 \quad y_3 = 0.5 \quad \Rightarrow \quad x_1 + x_2 \leq x_1 + x_2 \leq 4$

Or $x_1 = 2$ et $x_2 = 2$ vérifie toutes les contraintes et atteint cette borne. C'est donc une solution optimale.

Idée du certificat d'optimalité

$\max z = x_1 + x_2$

$$
\begin{array}{rcrcll}
4x_1 & + & 5x_2 & \leq & 20 & \times y_1 \\
2x_1 & + & x_2 & \leq & 6 & \times y_2 \\
 & & x_2 & \leq & 2 & \times y_3 \\
\hline
(4y_1 + 2y_2)x_1 & + & (5y_1 + y_2 + y_3)x_2 & \leq & 20y_1 + 6y_2 + 2y_3 & \\
 & & & \uparrow & & \\
 & & & y_1, y_2, y_3 & \geq 0 &
\end{array}
$$

Finalement,

$$
\begin{array}{lcccccccl}
\min & 20y_1 & + & 6y_2 & + & 2y_3 & & & \text{(borne sup minimale)} \\
\text{s.c.} & & & & & & & & \text{(borner terme à terme l'objectif)} \\
 & 4y_1 & + & 2y_2 & & & \geq & 1 & \\
 & 5y_1 & + & y_2 & + & y_3 & \geq & 1 & \\
 & y_i & \geq & 0 & & & & &
\end{array}
$$

Vidéos utiles

Ecrire le dual (5min): https://youtu.be/wgvfOhvw9FY
Comprendre le dual (12min): https://youtu.be/ExsNeiO57OY

A vous de jouer

Quiz de cours sur la dualité:

https://moodle.caseine.org/mod/quiz/view.php?id=35880

A vous de jouer

Exercice 14 Le dual et son dual

On considère le programme linéaire suivant

$$\begin{array}{lccccccc}
\max z = & 2x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & & \\
& 2x_1 & + & x_2 & & & \leq & 3 \\
& & & & & x_3 & \geq & 2 \\
& 3x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 2 \\
& & & x_2 & & & \leq & 1 \\
& x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0
\end{array}$$

Question 1 – Écrire son dual.

Question 2 – Écrire le dual du dual. Que remarquez-vous ?

A vous de jouer

Exercice 14 Le dual et son dual

On considère le programme linéaire suivant

$$\begin{array}{rcccccccl} \max z = & 2x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & & \\ & 2x_1 & + & x_2 & & & \leq & 3 \\ & & & & & x_3 & \geq & 2 \\ & 3x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 2 \\ & & & x_2 & & & \leq & 1 \\ & x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

Question 1 – Écrire son dual.

Question 2 – Écrire le dual du dual. Que remarquez-vous ?

Correction: `https://youtu.be/_BXsYNMo6Kg`

A vous de jouer

Un producteur d'olives souhaite vendre deux produits sur le marché: de l'huile d'olive et de la tapenade. Il veut proposer sur son étale au moins 9L d'huile d'olive et 9kg de tapenade. Il peut utiliser pour cela quatres techniques différentes. Pour un seau d'olives, la première technique produit 4L d'huile et 1kg de tapenade, la deuxième technique 2L d'huile et 1kg de tapenade, la troisième 1L d'huile et 2kg de tapenade et la dernière uniquement 1kg de tapenade. Le producteur souhaite mettre le moins de temps possible à préparer ses produits, sachant que la première technique nécessite 17min, la deuxième et la troisième 9min, et la dernière seulement 4min. Combien de seau d'olives doit-il utiliser pour chacune des techniques ?

1. Modéliser le problème sous la forme d'un PL
2. Exprimer le dual du problème sous la forme d'un PL et l'interpréter
3. Pourquoi le dual est-il plus simple à résoudre ?
4. Trouver la solution optimale du dual de manière graphique
5. Le producteur décide d'utiliser 3 seaux d'olives pour la deuxième technique et 3 seaux pour la troisième. Devrait-il changer de stratégie ?

A vous de jouer

Un producteur d'olives souhaite vendre deux produits sur le marché: de l'huile d'olive et de la tapenade. Il veut proposer sur son étale au moins 9L d'huile d'olive et 9kg de tapenade. Il peut utiliser pour cela quatres techniques différentes. Pour un seau d'olives, la première technique produit 4L d'huile et 1kg de tapenade, la deuxième technique 2L d'huile et 1kg de tapenade, la troisième 1L d'huile et 2kg de tapenade et la dernière uniquement 1kg de tapenade. Le producteur souhaite mettre le moins de temps possible à préparer ses produits, sachant que la première technique nécessite 17min, la deuxième et la troisième 9min, et la dernière seulement 4min. Combien de seau d'olives doit-il utiliser pour chacune des techniques ?

1. Modéliser le problème sous la forme d'un PL
2. Exprimer le dual du problème sous la forme d'un PL et l'interpréter
3. Pourquoi le dual est-il plus simple à résoudre ?
4. Trouver la solution optimale du dual de manière graphique
5. Le producteur décide d'utiliser 3 seaux d'olives pour la deuxième technique et 3 seaux pour la troisième. Devrait-il changer de stratégie ?

Correction: `https://youtu.be/6pJCrlqyJvY`