Les graphes - Fiche méthode

1 Graphes

Matrices d'adjacence, d'incidence On vous donne des matrices remplies avec des 0 et des 1 et on vous demande si ce sont des matrices d'adjacence ou d'incidence:

- Pour chaque matrice, regarder si elle est symétrique. Si non, la matrice n'est pas une matrice d'adjacence, justifier en disant qu'elle n'est pas symétrique. Si oui, la matrice est une matrice d'adjacence, justifier en construisant le graphe où les sommets sont numérotés de 1 à n (la dimension de la matrice) et où il y a une arete entre le sommet i et le sommet j si et seulement si il y a un 1 à la ième ligne et jème colonne dans la matrice.

- Puis, pour chaque matrice, regarder si il y a exactement deux 1 dans chaque colonne. Si non, la matrice n'est pas une matrice d'incidence, justifier en disant dans quelle colonne il n'y a pas deux 1. Si oui, la matrice est une matrice d'incidence, justifier en construisant le graphe où les sommets sont numérotés de 1 à n (le nombre de lignes de la matrice. Attention, il peut très bien être différent du nombre de colonnes) et où il y a une arete entre le sommet i et le sommet j si et seulement si une colonne de la matrice contient un 1 aux lignes i et j.

Exemples vus en TD: Exercice 47. Exercice 7 du partiel: https://pagesperso.g-scop.grenoble-inp.fr/~stehlikm/teaching/inf303/CC-INF303-2020-corrige.pdf

Séquences de degré On vous demande si il existe un graphe avec une séquence de degrés donnée:

- Faire la somme des degrés. Si elle est impaire, il n'existe pas de graphe avec cette séquence de degré, justifier en disant que la somme est impaire. Si elle est paire, continuer.

- Regarder si il y a des degrés incompatibles (par exemple un sommet universel et un sommet isolé). Si oui, il n'existe pas de graphe avec cette séquence de degré, justifier en indiquant quels degrés sont incompatibles. Si non, continuer.

- Chercher un graphe avec la séquence de degrés donnée. Si vous en trouvez un, répondez oui et mettez le graphe en justification.

Exemples vus en TD: Exercice 39. Exercice 4.1 du partiel: https://pagesperso.g-scop.grenoble-inp.fr/~stehlikm/teaching/inf303/CC-INF303-2020-corrige.pdf. Exercice 3 du TD de révision: https://www.dailymotion.com/video/x7xa6i0 (mot de passe: UGA_DLST_INF303)

2 Arbres

Pas d'exercices classiques concernant les arbres. En revanche, dans les exercices sur les arbres, il faut souvent utiliser le fait qu'un arbre à n sommets a exactement $n-1$ arêtes. Cela veut aussi dire que la somme des degrés d'un arbre est égale à $2n-2$ puisque dans tous les graphes on a la somme des degrés qui vaut deux

fois le nombre d'arêtes.
Exemples vus en TD: Exercice 70. Exercice 4.2 du partiel: https://pagesperso.g-scop.grenoble-inp.fr/~stehlikm/teaching/inf303/CC-INF303-2020-corrige.pdf.

3 Chemins eulériens

On vous demande si un graphe possède un chemin eulérien (ou, de manière équivalente, si il est possible de dessiner ce graphe sans lever le crayon). Faites la liste des degrés des sommets du graphe. Si il y a 0, ou 2 sommets de degré impair, il existe un chemin eulérien. Si il y a plus de deux sommets de degrés impair, il n'existe pas de chemin eulérien, et le nombre de fois où il faut lever le crayon est $\frac{\text{nombre de sommets de degré impair}-2}{2}$.
Exemples vus en TD: Exercice 57. Exercice 4 du TD de révision: https://www.dailymotion.com/video/x7xa6it (mot de passe: UGA_DLST_INF303). Exercice 6 du partiel: https://pagesperso.g-scop.grenoble-inp.fr/~stehlikm/teaching/inf303/CC-INF303-2020-corrige.pdf

4 Arbre de poids minimum

On vous demande de trouver un arbre de poids minimum dans un graphe G. On applique l'algorithme de Kruskal:

- On part d'un arbre avec tous les sommets de G et aucune arête.
- On prend les arêtes de G dans l'ordre croissant. Pour chaque arête, si ajouter l'arête créé un cycle dans le graphe, on ne l'ajoute pas à l'arbre. Sinon, on l'ajoute à l'arbre.
- On continue, jusqu'à ce que tous les sommets du graphe soient reliés les uns aux autres dans l'arbre créé.

Le poids final de l'arbre est la somme du poids de ses arêtes. Justifier votre arbre de poids minimum en indiquant rapidement ce que vous avez fait à chaque étape de l'algorithme (pas besoin de longues phrases).
Exemples vus en TD: Exercice 78. Exercice 5 du partiel: https://pagesperso.g-scop.grenoble-inp.fr/~stehlikm/teaching/inf303/CC-INF303-2020-corrige.pdf
Vidéo d'explication de l'algorithme de Kruskal: https://www.youtube.com/watch?v=U_itW96NnQ0

5 Plus court chemin

On vous demande quel est le plus court chemin d'une source s vers d'autres sommets dans un graphe dirigé avec des distances sur les arcs. On applique l'algorithme de Dijkstra:

- on créé un tableau avec une colonne par sommet du graphe, chaque ligne va contenir les distances de s aux différents sommets pendant l'itération correspondant à la ligne. On initialise le tableau avec une distance à 0 pour le sommet s et une distance à $+\infty$ pour les autres sommets.
- A chaque itération, on sélectionne le sommet u qui a la distance la plus petite dans le tableau. Puis, on actualise les distances pour tous les sommets v tels qu'il existe un arc uv. Si la distance actuelle de v est supérieure à la distance de u + la distance qui correspond à l'arc uv dans le graphe, alors on actualise la distance de v à distance de u + distance sur uv, et on note en indice le sommet u pour indiquer qu'on vient de u. On supprime ensuite le sommet u du tableau (on ne peut plus le sélectionner)
- On continue jusqu'à ce que tous les sommets soient supprimés du tableau (on ne peut plus en sélectionner aucun)

- Pour chaque sommet t, la distance du chemin le plus court de s à t est la distance indiquée pour ce sommet dans la dernière ligne du tableau. Pour retrouver le plus court chemin on regarde l'indice en dessous de cette distance. On regarde ensuite dans la colonne correspondant au sommet de cet indice, et on récupère l'indice. On continue comme ça jusqu'à arriver au sommet s. L'ordre dans lequel on est allé d'indice en indice est l'ordre inverse du plus court chemin de s à t.

Justifier vos plus courts chemins en donnant le tableau des distances avec toutes les itérations.
Exemples vus en TD: Exercices 82 et 83
Vidéo d'explication de l'algorithme de Dijkstra: https://www.youtube.com/watch?v=rI-Rc7eF4iw

6 Coloration

Borne supérieure On vous demande de montrer, pour un k donné, que $\chi(G) \leq k$. On construit une coloration du graphe avec k couleurs. Pour y arriver, on essaie d'utiliser le moins de couleur possible: on colorie un premier sommet, puis ses voisins avec une autre couleur mais si ils peuvent avoir la même couleur, on leur donne la même couleur. Si jamais on utilise plus de k couleurs, on recommence depuis le début en utilisant des couleurs différentes, ça finira par payer. Pour justifier, donner la coloration que vous avez trouvée. Exemples vus en TD: Exercice 2 de l'examen 2018 https://youtu.be/vuONfL3oR24?t=318 et https://youtu.be/vuONfL3oR24?t=525, Exercice 3 de l'examen 2018 https://youtu.be/AiiBCq6jY74 Exercice 93 https://www.dailymotion.com/video/x7x8lqz (mot de passe: UGA_DLST_INF303)

Borne inférieure On vous demande de montrer, pour un k donné, que $\chi(G) \geq k$. On commence par trouver la taille $\omega(G)$ de la plus grande clique (=sous graphe complet) dans G.

- Si il y a une clique de taille au moins k alors, comme pour tout graphe G, $\chi(G) \geq \omega(G)$, on a bien $\chi(G) \geq k$. Justifier en montrant une clique de taille k. Exemples vus en TD: Exercice 2 de l'examen 2018 https://youtu.be/vuONfL3oR24?t=453, Exercice 3 de l'examen 2018 https://youtu.be/AiiBCq6jY74?t=256, Exercice 93 https://www.dailymotion.com/video/x7x8lqz (mot de passe: UGA_DLST_INF303)

- Si il n'y a pas de clique de taille k, alors on doit raisonner autrement. On raisonne par l'absurde en supposant qu'on peut colorier le graphe avec $k-1$ couleurs. On utilise une première couleur à un sommet bien choisi, ça nous force à utiliser une autre couleur sur d'autres sommets, puis en continuant comme ça on essaie d'arriver à une contradiction. Exemple vus en TD: Exercice 2 de l'examen 2018 https://youtu.be/vuONfL3oR24?t=850, Exercice 3 de l'examen 2018 https://youtu.be/AiiBCq6jY74?t=184, Exercice 93 https://www.dailymotion.com/video/x7x8lqz (mot de passe: UGA_DLST_INF303)

Egalité Si on vous demande de trouver $\chi(G)$ ou de montrer $\chi(G) = k$ pour un k donné, alors il faut montrer la borne supérieure et la borne inférieure avec les méthodes décrites au dessus.

7 Planarité

Formule d'Euler Il n'y a pas un exercice classique sur la Formule d'Euler mais elle est utilisée dans beaucoup d'exercices: Dans un graphe planaire connexe, $n + f - m = 2$ où n est le nombre de sommets, f le nombre de faces (face externe inclue), et m le nombre d'arêtes.

Test de planarité On vous demande de déterminer si un graphe G est planaire ou non.

- On essaie de dessiner le graphe d'une manière où les arêtes ne se croisent pas (notez que les arêtes ne sont pas forcément des lignes droites). Si on y arrive, alors le graphe est planaire, donner la représentation planaire pour justifier. Si on y arrive pas, alors on essaie de montrer que le graphe n'est pas planaire.

- Pour montrer que le graphe n'est pas planaire, on cherche un sous-graphe qui est une subdivision du graphe complet biparti $K_{3,3}$ ou du graphe complet K_5. Si on y arrive, par le théorème de Kuratowski, le graphe n'est pas planaire. Pour trouver cette subdivision, on observe le graphe, puis on essaie. Justifier en donnant le sous-graphe, dire si c'est une subdivision de $K_{3,3}$ ou de K_5, et citer le théorème de Kuratowski.

Exemples vus en TD: Exercice 3 de l'examen 2018 https://youtu.be/AiiBCq6jY74?t=675 Exercice 96 https://www.dailymotion.com/video/x7xlmqn (mot de passe: UGA_DLST_INF303)

Graphe dual On vous demande de dessiner le graphe dual d'un graphe planaire. Pour chaque face de G (= espace fermé par des arêtes, même l'espace à l'extérieur du graphe), on dessine un sommet dans le dual. Et on relie les sommets qui correspondent à deux faces lorsque les deux faces ont des arêtes en commun. Attention, on peut obtenir un multigraphe, ce n'est pas grave. Exemples vus en TD: Exercice 96 https://www.dailymotion.com/video/x7xlmqn (mot de passe: UGA_DLST_INF303)

8 Couplages

Couplage maximum On vous demande de trouver un couplage maximum ou de montrer qu'un couplage est maximum dans un graphe biparti. On en trouve un si c'est demandé, puis on montre qu'il est maximum en trouvant un transversal de même taille (= ensemble de sommets tel que chaque arête du graphe est adjacente à au moins un des sommets de cet ensemble) et en utilisant le théorème de dualité. Justifier en donnant le transversal et en citant le théorème de dualité.
Exemples vus en TD: Exercice 104 https://youtu.be/gFZNJW1L3_0, Exercice 105 https://youtu.be/dsvzeNEK5AM

Couplage parfait On vous demande s'il existe un couplage parfait dans un graphe biparti. Essayez de faire un couplage parfait. Si vous y arrivez, il existe donc un couplage parfait, justifier en le donnant. Si vous n'y arrivez pas, essayez de montrer que le graphe n'admet pas de couplage parfait. Pour cela, utilisez le Lemme des mariages, et montrez qu'il existe un sous ensemble de sommets dans la partie A telle que l'ensemble des sommets qui leurs sont adjacents est plus petit. Si un tel sous ensemble existe, alors le graphe n'admet pas de couplage parfait. Justifier en donnant le sous ensemble et en citant le Lemme des mariages.
Exemples vus en TD: Exercice 106 https://youtu.be/oy5A6dsBXI4, Exercice 109 https://youtu.be/kry_RDPv2dE, Exercice 111 https://youtu.be/zxIRUcYqp4M

9 Flots

Flot réalisable On vous demande si un flot est réalisable. Il faut:

- Vérifier que la valeur du flot sur chaque arc est inférieure à la capacité de l'arc
- Vérifier que pour chaque sommet sauf la source s et le puit t, la somme des flots qui rentrent en ce sommet est égale à la somme des flots qui sortent de ce sommet.

Si un point n'est pas respecté, le flot n'est pas réalisable. Justifier en donnant l'arc ou le sommet qui pose problème et pourquoi. Si les deux points sont respectés, le flot est réalisable. Justifier en expliquant que les deux points sont respectés. Exemple vu en TD: Exercice 117 https://youtu.be/Yf24ebJ5XVI

Flot maximum On vous demande de trouver le flot maximum dans un graphe dirigé G avec des capacités sur les arêtes. On applique l'algorithme de Ford-Fulkerson:

- On commence avec un flot à 0 sur toutes les arêtes
- A chaque itération, on actualise le graphe résiduel. Il s'agit du graphe dans lequel chaque arête de G est dédoublée par un arc dans chaque sens. Sur l'arc qui a le même sens que dans G, on met un flot égal à la capacité de l'arc, moins le flot de l'arc. Sur l'arc qui a le sens inverse, on met un flot égal au flot dans G. Ce graphe résiduel indique combien on peut ajouter ou soustraire de flot sur chaque arc de G pour arriver à capacité ou à zéro.
- A chaque itération, on cherche un chemin augmentant de la source s au puit t dans le graphe résiduel. Il s'agit d'un chemin de s à t qui ne repasse pas plusieurs fois par le même sommet et qui n'emprunte jamais d'arc qui ait un flot nul.
- On cherche le minimum, sur le graphe résiduel, des flots sur les arêtes qu'on emprunte dans ce chemin augmentant. Dans le graphe G, pour chaque arc dans ce chemin, on augmente le flot de cette valeur minimale si l'arc est dans le même sens que dans le graphe résiduel, et on diminue le flot de cette valeur minimale si l'arc est dans le sens opposé.
- On continue jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de chemin augmentant dans le graphe résiduel. Le flot maximum est alors le flot qui arrive sur le sommet puit t dans G.

Justifier votre flot maximum en donnant le chemin augmentant à chaque itération et de combien vous l'avez augmenté.
Exemples vus en TD: Exercice 117 `https://youtu.be/Yf24ebJ5XVI?t=496`, Exercice 116 `https://youtu.be/xv0JS7Hf5l8`

Coupe minimum On vous demande de trouver une coupe minimum dans G. Appliquez l'algorithme de Ford-Fulkerson sur G. A la fin de l'algorithme, regardez dans le graphe résiduel quels sommets sont atteignables depuis la source s en utilisant des chemins augmentants. La coupe qui contient tous les sommets atteignable depuis s (dont s) est minimum. Vérifier en calculant la valeur de cette coupe, i.e. la somme des flots qui sortent de cette coupe dans G. Elle doit être égale à la valeur du flot maximum trouvé avec Ford-Fulkerson, par le théorème de dualité. Justifier soit en disant que vous avez regardé les sommets accessibles depuis s avec des chemins augmentants, soit en donnant simplement la coupe et en disant qu'elle a la même valeur que le flot maximum donc qu'elle est bien minimum par le théorème de dualité.
Exemple vu en TD: Exercice 116 `https://youtu.be/xv0JS7Hf5l8?t=1158`

Pensez à justifier toutes vos réponses !

Ceci n'est pas une liste exhaustive, ce ne sont que les méthodes basiques, vous aurez probablement des exercices avec d'autres méthodes, des exercices où vous devrez trouver vous-même les méthodes, des exercices où il faudra modéliser des problèmes en utilisant la théorie des graphes... Revoyez tous les exercices qu'on a faits !