Recherche Opérationnelle

Programmation Linéaire - Interprétation géométrique

Nadia Brauner & Alice Joffard

22 janvier 2021

Interprétation géométrique

Interprétation géométrique

Exemple des courgettes et des navets:

Interprétation géométrique

Exemple des courgettes et des navets:

- Variables de décision: $x_n \in \mathbb{R}$ le m^2 de navets, $x_c \in \mathbb{R}$ le m^2 de courgettes

Interprétation géométrique

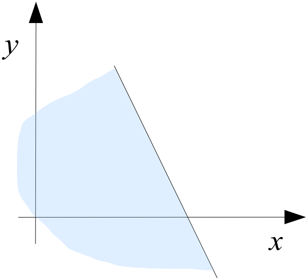
Exemple des courgettes et des navets:

- Variables de décision: $x_n \in \mathbb{R}$ le m^2 de navets, $x_c \in \mathbb{R}$ le m^2 de courgettes
- PL:

$$\begin{aligned}
\max\ & 5x_n + 4x_c \\
\text{s.c.}\ & x_n + 2x_c \leq 8 \\
& 2x_n + x_c \leq 7 \\
& x_n \leq 3 \\
& x_c, x_n \geq 0
\end{aligned}$$

Interprétation géométrique - Les contraintes

$2x + y \leq 8 \Rightarrow$ demi-plan de $\mathbb{R}^2$

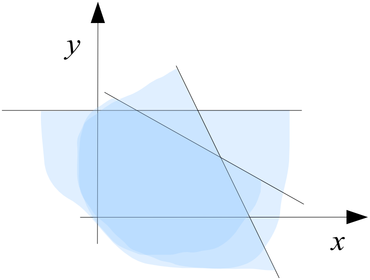


Interprétation géométrique - Les contraintes

$2x + y \leq 8 \Rightarrow$ demi-plan de $\mathbb{R}^2$

$x + 2y \leq 7 \Rightarrow$ demi-plan

$y \leq 3 \Rightarrow$ demi-plan



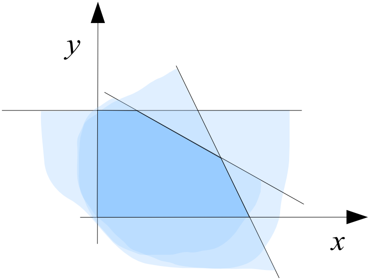
Interprétation géométrique - Les contraintes

$2x + y \leq 8 \Rightarrow$ demi-plan de $\mathbb{R}^2$

$x + 2y \leq 7 \Rightarrow$ demi-plan

$y \leq 3 \Rightarrow$ demi-plan

$x \geq 0$ et $y \geq 0 \Rightarrow$ demi-plans



Interprétation géométrique - Les contraintes

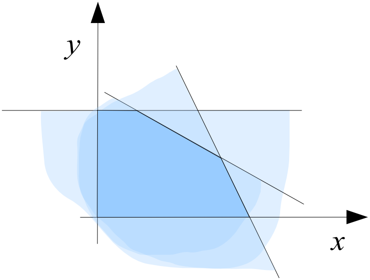
$2x + y \leq 8 \Rightarrow$ demi-plan de $\mathbb{R}^2$

$x + 2y \leq 7 \Rightarrow$ demi-plan

$y \leq 3 \Rightarrow$ demi-plan

$x \geq 0$ et $y \geq 0 \Rightarrow$ demi-plans

Ensemble des solutions réalisables = intersection de ces demi-plans : polyèdre

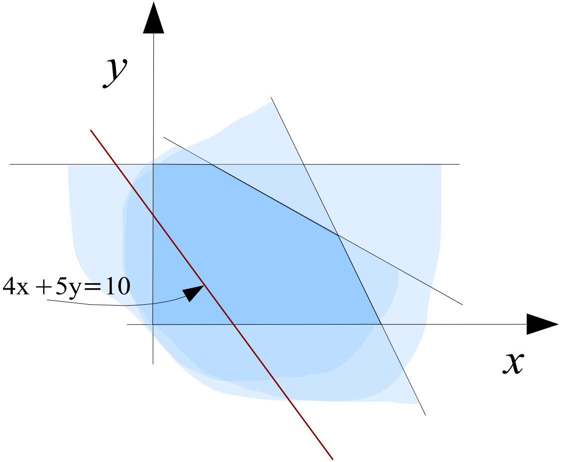


Interprétation géométrique - L'objectif

Les lignes de niveau $\{4x + 5y = \text{constante}\}$ sont des droites parallèles

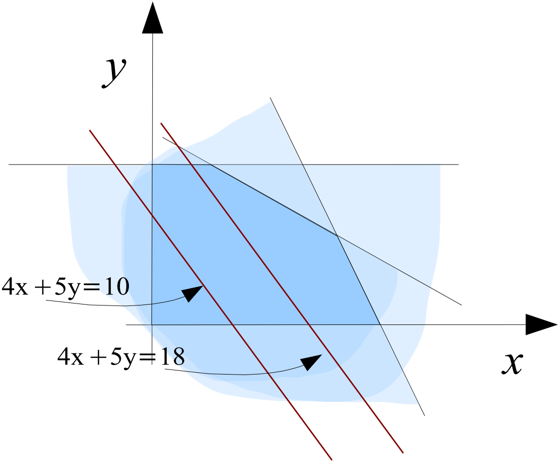
Interprétation géométrique - L'objectif

Les lignes de niveau $\{4x + 5y = \text{constante}\}$ sont des droites parallèles



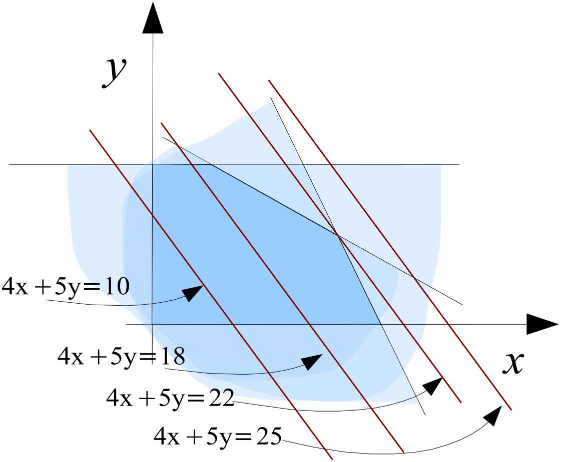
Interprétation géométrique - L'objectif

Les lignes de niveau $\{4x + 5y = \text{constante}\}$ sont des droites parallèles



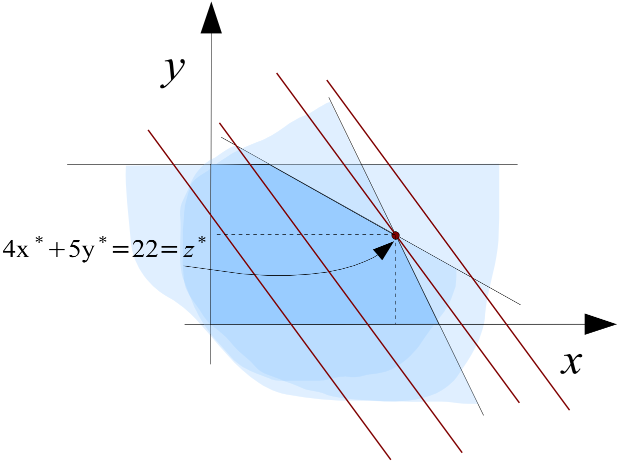
Interprétation géométrique - L'objectif

Les lignes de niveau $\{4x + 5y = \text{constante}\}$ sont des droites parallèles



Interprétation géométrique - L'objectif

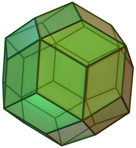
Les lignes de niveau $\{4x + 5y = \text{constante}\}$ sont des droites parallèles



Géométrie d’un PL

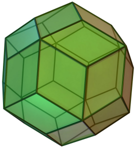
Géométrie d'un PL

L'ensemble des solutions réalisables est toujours un polyèdre (intersection de demi-espaces)



Géométrie d'un PL

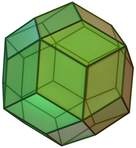
L'ensemble des solutions réalisables est toujours un polyèdre (intersection de demi-espaces)



Les lignes de niveau $\{f = \text{constante}\}$ de la fonction-objectif f sont des hyperplans affines ($n = 2 \Rightarrow$ droite, $n = 3 \Rightarrow$ plan...)

Géométrie d'un PL

L'ensemble des solutions réalisables est toujours un polyèdre (intersection de demi-espaces)



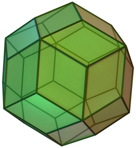
Les lignes de niveau $\{f = \text{constante}\}$ de la fonction-objectif f sont des hyperplans affines ($n = 2 \Rightarrow$ droite, $n = 3 \Rightarrow$ plan...)

Optimum atteint au bord

L'optimum de la fonction-objectif, s'il existe, est atteint en (au moins) un sommet du polyèdre.

Géométrie d'un PL

L'ensemble des solutions réalisables est toujours un polyèdre (intersection de demi-espaces)



Les lignes de niveau $\{f = \text{constante}\}$ de la fonction-objectif f sont des hyperplans affines ($n = 2 \Rightarrow$ droite, $n = 3 \Rightarrow$ plan...)

Optimum atteint au bord

L'optimum de la fonction-objectif, s'il existe, est atteint en (au moins) un sommet du polyèdre.

Preuve: les dérivées partielles de $f(x) = c.x$ ne s'annulent jamais et le domaine $\{x \mid \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i, i = 1, \ldots, m\}$ est compact
$\Rightarrow$ l'optimum est atteint au bord

Solutions d'un PL

Solutions d'un PL

La région admissible peut être:

Solutions d'un PL

La région admissible peut être:

1. vide

Solutions d'un PL

La région admissible peut être:

1. vide → nombre de solutions optimales: 0

Solutions d'un PL

La région admissible peut être:

1. vide → nombre de solutions optimales: 0
2. non vide, borné

Solutions d'un PL

La région admissible peut être:

1. vide → nombre de solutions optimales: 0
2. non vide, borné → nombre de solutions optimales: 1 ou ∞

Solutions d'un PL

La région admissible peut être:

1. vide → nombre de solutions optimales: 0
2. non vide, borné → nombre de solutions optimales: 1 ou ∞
3. non vide, non borné

Solutions d'un PL

La région admissible peut être:

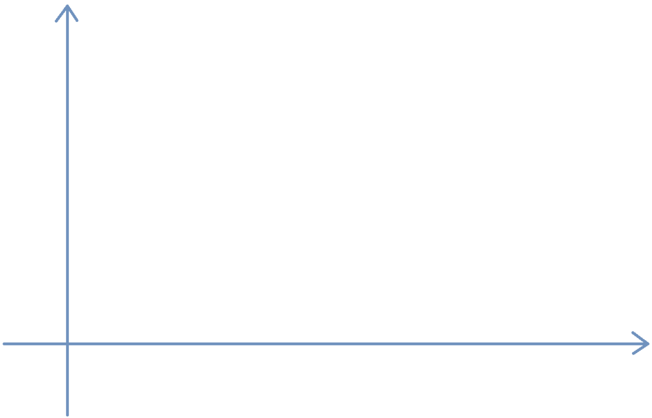
1. vide $\rightarrow$ nombre de solutions optimales: 0
2. non vide, borné $\rightarrow$ nombre de solutions optimales: 1 ou ∞
3. non vide, non borné $\rightarrow$ nombre de solutions: 0 ou 1 ou ∞

Solutions d'un PL

La région admissible peut être:

1. vide → nombre de solutions optimales: 0
2. non vide, borné → nombre de solutions optimales: 1 ou ∞
3. non vide, non borné → nombre de solutions: 0 ou 1 ou ∞

A vous de jouer: Proposer des exemples de PL pour chaque cas



A vous de jouer

Exercice 8: Un atelier produit deux types de peintures pour carrosserie: A et C. Un litre de peinture C nécessite 1 litres de diluant et 3g de pigment et rapporte 3 euros. Un litre de peinture A nécessite 2kg de résine et 2g de pigment et rapporte 5 euros. Les quantités disponibles sont 4 litres de diluant, 12kg de résine et 18g de pigment. L'objectif est de décider de la production de chaque type de peinture afin de maximiser les marges. Modéliser et résoudre graphiquement le problème.

A vous de jouer

Exercice 8: Un atelier produit deux types de peintures pour carrosserie: A et C. Un litre de peinture C nécessite 1 litres de diluant et 3g de pigment et rapporte 3 euros. Un litre de peinture A nécessite 2kg de résine et 2g de pigment et rapporte 5 euros. Les quantités disponibles sont 4 litres de diluant, 12kg de résine et 18g de pigment. L'objectif est de décider de la production de chaque type de peinture afin de maximiser les marges. Modéliser et résoudre graphiquement le problème.
Correction: `https://youtu.be/IcyQ2-KRoeI`

A vous de jouer

Exercice 8: Un atelier produit deux types de peintures pour carrosserie: A et C. Un litre de peinture C nécessite 1 litres de diluant et 3g de pigment et rapporte 3 euros. Un litre de peinture A nécessite 2kg de résine et 2g de pigment et rapporte 5 euros. Les quantités disponibles sont 4 litres de diluant, 12kg de résine et 18g de pigment. L'objectif est de décider de la production de chaque type de peinture afin de maximiser les marges. Modéliser et résoudre graphiquement le problème.
Correction: https://youtu.be/IcyQ2-KRoeI Sur Geogebra: https://moodle.caseine.org/mod/geogebra/view.php?id=35259

A vous de jouer

Exercice 8: Un atelier produit deux types de peintures pour carrosserie: A et C. Un litre de peinture C nécessite 1 litres de diluant et 3g de pigment et rapporte 3 euros. Un litre de peinture A nécessite 2kg de résine et 2g de pigment et rapporte 5 euros. Les quantités disponibles sont 4 litres de diluant, 12kg de résine et 18g de pigment. L'objectif est de décider de la production de chaque type de peinture afin de maximiser les marges. Modéliser et résoudre graphiquement le problème.
Correction: https://youtu.be/IcyQ2-KRoeI Sur Geogebra: https://moodle.caseine.org/mod/geogebra/view.php?id=35259
Pour résoudre graphiquement un PL à deux variables: https://moodle.caseine.org/mod/geogebra/view.php?id=35258

A vous de jouer !

Quiz sur le changement de forme d'un PL:
https://moodle.caseine.org/mod/quiz/view.php?id=35871

A vous de jouer !

Un restaurateur va acheter des lentilles en vrac. Il a pris deux bidons d'une contenance de 5L. Il y a une promotion dans le magasin: Pour un produit acheté, le second est offert (celui le moins cher). Il va acheter des lentilles corail et des lentilles vertes, mais il aimerait payer le moins possible. Il a besoin d'au moins 2.8L de lentilles, mais il aimerait que le poids des deux bidons ne dépasse pas 3kg, sachant qu'un bidon vide pèse 250g, 1cL de lentilles vertes pèse 5g, et 1cL de lentilles corail pèse 4g. Le litre de lentilles vertes est à 1.6 euros, celui de lentilles corail à 4 euros.

1) Modéliser le problème du restaurateur sous la forme d'un Programme Linéaire (sous forme "in extenso" et sous forme matricielle)
2) Mettre ce Programme Linéaire sous la forme canonique.
3) Mettre ce Programme Linéaire sous la forme standart.
4) Résoudre graphiquement le problème à la main. Pour ramener le problème en deux dimensions, vous pourrez considérer deux cas donnant deux Programmes Linéaires différents.
5) Que remarquez vous ? Cela vous semble-t-il normal ? Justifiez.
6) Vérifier votre solution graphiquement sur caséine: `https://moodle.caseine.org/mod/geogebra/view.php?id=35258`. Vous pourrez éventuellement supprimer des contraintes redondantes.
7) Vérifiez votre solution en utilisant OPL: `https://moodle.caseine.org/mod/vpl/forms/edit.php?id=35235` (guide: `https://moodle.caseine.org/mod/resource/view.php?id=35231`)

Si vous avez fini: `https://moodle.caseine.org/mod/vpl/view.php?id=35240`

A vous de jouer !

Un restaurateur va acheter des lentilles en vrac. Il a pris deux bidons d'une contenance de 5L. Il y a une promotion dans le magasin: Pour un produit acheté, le second est offert (celui le moins cher). Il va acheter des lentilles corail et des lentilles vertes, mais il aimerait payer le moins possible. Il a besoin d'au moins 2.8L de lentilles, mais il aimerait que le poids des deux bidons ne dépasse pas 3kg, sachant qu'un bidon vide pèse 250g, 1cL de lentilles vertes pèse 5g, et 1cL de lentilles corail pèse 4g. Le litre de lentilles vertes est à 1.6 euros, celui de lentilles corail à 4 euros.

1) Modéliser le problème du restaurateur sous la forme d'un Programme Linéaire (sous forme "in extenso" et sous forme matricielle)
2) Mettre ce Programme Linéaire sous la forme canonique.
3) Mettre ce Programme Linéaire sous la forme standart.
4) Résoudre graphiquement le problème à la main. Pour ramener le problème en deux dimensions, vous pourrez considérer deux cas donnant deux Programmes Linéaires différents.
5) Que remarquez vous ? Cela vous semble-t-il normal ? Justifiez.
6) Vérifier votre solution graphiquement sur caséine: `https://moodle.caseine.org/mod/geogebra/view.php?id=35258`. Vous pourrez éventuellement supprimer des contraintes redondantes.
7) Vérifiez votre solution en utilisant OPL: `https://moodle.caseine.org/mod/vpl/forms/edit.php?id=35235` (guide: `https://moodle.caseine.org/mod/resource/view.php?id=35231`)

Correction: `https://youtu.be/UI44lskujOk`