Recherche Opérationnelle

Programmation Linéaire

Nadia Brauner & Alice Joffard

22 janvier 2021

Définitions

Définitions

Cambridge Dictionary

Linear Programming

Mathematical modeling technique in which a linear function is maximized or minimized when subjected to various constraints

Définitions

Cambridge Dictionary

Linear Programming

Mathematical modeling technique in which a linear function is maximized or minimized when subjected to various constraints

Wikipedia

Programmation linéaire

Méthode permettant d'optimiser une production compte tenu de contraintes comme, par exemple, des ressources disponibles, en satisfaisant au mieux un objectif donné.

Définitions

Cambridge Dictionary

Linear Programming

Mathematical modeling technique in which a linear function is maximized or minimized when subjected to various constraints

Wikipedia

Programmation linéaire

Méthode permettant d'optimiser une production compte tenu de contraintes comme, par exemple, des ressources disponibles, en satisfaisant au mieux un objectif donné.

Roadef

Programmation linéaire

Elle consiste à minimiser (ou maximiser) une fonction linéaire sous des contraintes également linéaires, ce qui, en pratique, permet de modéliser un grand nombre de situations

A vous de jouer

Une entreprise dispose d'un budget publicitaire de 4500 euros. Sa campagne utilisera la télévision et la radio. Chaque minute de télévision atteint 100 000 nouveaux spectateurs et chaque minute de radio 80 000. Une minute de télévision coûte 800 euros et une minute de radio 600. L'entreprise souhaite diffuser au moins 1min30 de télévision et 1min de radio. Son objectif est de maximiser le nombre de nouveaux spectateurs. Comment leur conseillez-vous de diffuser leurs pubs ?

Correction

Correction

- Qu'est ce qui est le plus avantageux ?

Correction

- Qu'est ce qui est le plus avantageux ?

→ On calcule le rapport spectateurs/coût: 125 pour la télévision, 133+ pour la radio

Correction

- Qu'est ce qui est le plus avantageux ?

→ On calcule le rapport spectateurs/coût: 125 pour la télévision, 133+ pour la radio

→ La radio est plus avantageuse

Correction

- Qu'est ce qui est le plus avantageux ?

→ On calcule le rapport spectateurs/coût: 125 pour la télévision, 133+ pour la radio

→ La radio est plus avantageuse

- Il faut au moins 1.5min de télévision, pour un budget de 1.5*800=1200 euros

Correction

- Qu'est ce qui est le plus avantageux ?

→ On calcule le rapport spectateurs/coût: 125 pour la télévision, 133+ pour la radio

→ La radio est plus avantageuse

- Il faut au moins 1.5min de télévision, pour un budget de 1.5*800=1200 euros

→ Il reste un budget de 3300 euros, on dépense tout en radio, $\frac{3300}{600} = 5.5 \geq 1$

Correction

- Qu'est ce qui est le plus avantageux ?

→ On calcule le rapport spectateurs/coût: 125 pour la télévision, 133+ pour la radio

→ La radio est plus avantageuse

- Il faut au moins 1.5min de télévision, pour un budget de 1.5*800=1200 euros

→ Il reste un budget de 3300 euros, on dépense tout en radio, $\frac{3300}{600} = 5.5 \geq 1$

→ L'entreprise doit diffuser 5min30 de radio et 1min30 de télévision

A vous de jouer

Un agriculteur produisant des navets et des courgettes souhaite savoir comment produire un maximum (en poids) de légumes. Un m^2 de courgettes donne 4kg et un m^2 de navets 5kg. Chaque m^2 de navets nécessite 1kg de guano, 2kg de compost, et 1kg de marc de café. Chaque m^2 de courgettes nécessite 2kg de guano et 1kg de compost. Il dispose de 8kg de guano, 7kg de compost, et 3kg de marc de café. Comment lui conseillez-vous de planter ses légumes ?

A vous de jouer

Un agriculteur produisant des navets et des courgettes souhaite savoir comment produire un maximum (en poids) de légumes. Un m^2 de courgettes donne 4kg et un m^2 de navets 5kg. Chaque m^2 de navets nécessite 1kg de guano, 2kg de compost, et 1kg de marc de café. Chaque m^2 de courgettes nécessite 2kg de guano et 1kg de compost. Il dispose de 8kg de guano, 7kg de compost, et 3kg de marc de café. Comment lui conseillez-vous de planter ses légumes ?

- Plus difficile car pas un seul coût pour chaque légume !

A vous de jouer

Un agriculteur produisant des navets et des courgettes souhaite savoir comment produire un maximum (en poids) de légumes. Un m^2 de courgettes donne 4kg et un m^2 de navets 5kg. Chaque m^2 de navets nécessite 1kg de guano, 2kg de compost, et 1kg de marc de café. Chaque m^2 de courgettes nécessite 2kg de guano et 1kg de compost. Il dispose de 8kg de guano, 7kg de compost, et 3kg de marc de café. Comment lui conseillez-vous de planter ses légumes ?

- Plus difficile car pas un seul coût pour chaque légume !
- Essayez à taton de trouver la meilleure solution

A vous de jouer

Un agriculteur produisant des navets et des courgettes souhaite savoir comment produire un maximum (en poids) de légumes. Un m^2 de courgettes donne 4kg et un m^2 de navets 5kg. Chaque m^2 de navets nécessite 1kg de guano, 2kg de compost, et 1kg de marc de café. Chaque m^2 de courgettes nécessite 2kg de guano et 1kg de compost. Il dispose de 8kg de guano, 7kg de compost, et 3kg de marc de café. Comment lui conseillez-vous de planter ses légumes ?

- Plus difficile car pas un seul coût pour chaque légume !
- Essayez à taton de trouver la meilleure solution

→ Êtes-vous sûrs que c'est la meilleure solution possible ?

Programmation linéaire

Programmation linéaire

Cadre de la PL: nombre fini de variables réelles, contraintes linéaires, objectif linéaire

Programmation linéaire

Cadre de la PL: nombre fini de variables réelles, contraintes linéaires, objectif linéaire

- Variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ réelles

Programmation linéaire

Cadre de la PL: nombre fini de variables réelles, contraintes linéaires, objectif linéaire

- Variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ réelles
- Contrainte générique (contrainte i) :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ \leq \ b_i$$

Programmation linéaire

Cadre de la PL: nombre fini de variables réelles, contraintes linéaires, objectif linéaire

- Variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ réelles
- Contrainte générique (contrainte i) :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ \leq \ b_i$$

- Fonction-objectif générique (à maximiser / minimiser) :

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \ = \ \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

A vous de jouer

Une entreprise dispose d'un budget publicitaire de 4500 euros. Sa campagne utilisera la télévision et la radio. Chaque minute de télévision atteint 100 000 nouveaux spectateurs et chaque minute de radio 80 000. Une minute de télévision coûte 800 euros et une minute de radio 600. L'entreprise souhaite diffuser au moins 1min30 de télévision et 1min de radio. Son objectif est de maximiser le nombre de nouveaux spectateurs. Comment leur conseillez-vous de diffuser leurs pubs ?

Programmation linéaire

Programmation linéaire

Traduction du problème en PL:

Programmation linéaire

Traduction du problème en PL:

- Variables de décision: $x_t \in \mathbb{R}$ le temps de télévision, $x_r \in \mathbb{R}$ le temps de radio

Programmation linéaire

Traduction du problème en PL:

- Variables de décision: $x_t \in \mathbb{R}$ le temps de télévision, $x_r \in \mathbb{R}$ le temps de radio
- Contraintes:

Programmation linéaire

Traduction du problème en PL:

- Variables de décision: $x_t \in \mathbb{R}$ le temps de télévision, $x_r \in \mathbb{R}$ le temps de radio
- Contraintes:
  - *L'entreprise souhaite diffuser au moins 1min30 de télévision* $\rightarrow x_t \geq 1.5$

Programmation linéaire

Traduction du problème en PL:

- Variables de décision: $x_t \in \mathbb{R}$ le temps de télévision, $x_r \in \mathbb{R}$ le temps de radio
- Contraintes:
  - *L'entreprise souhaite diffuser au moins 1min30 de télévision* $\rightarrow x_t \geq 1.5$
  - *et 1min de radio* $\rightarrow x_r \geq 1$

Programmation linéaire

Traduction du problème en PL:

- Variables de décision: $x_t \in \mathbb{R}$ le temps de télévision, $x_r \in \mathbb{R}$ le temps de radio
- Contraintes:
    - *L'entreprise souhaite diffuser au moins 1min30 de télévision* $\rightarrow x_t \geq 1.5$
    - *et 1min de radio* $\rightarrow x_r \geq 1$
    - *dispose d'un budget publicitaire de 4500 euros* $\rightarrow 800x_t + 600x_r \leq 4500$

Programmation linéaire

Traduction du problème en PL:

- Variables de décision: $x_t \in \mathbb{R}$ le temps de télévision, $x_r \in \mathbb{R}$ le temps de radio
- Contraintes:
  - *L'entreprise souhaite diffuser au moins 1min30 de télévision* $\rightarrow x_t \geq 1.5$
  - *et 1min de radio* $\rightarrow x_r \geq 1$
  - *dispose d'un budget publicitaire de 4500 euros* $\rightarrow 800x_t + 600x_r \leq 4500$
  - Positivité des variables

Programmation linéaire

Traduction du problème en PL:

- Variables de décision: $x_t \in \mathbb{R}$ le temps de télévision, $x_r \in \mathbb{R}$ le temps de radio
- Contraintes:
  - *L'entreprise souhaite diffuser au moins 1min30 de télévision* $\rightarrow x_t \geq 1.5$
  - *et 1min de radio* $\rightarrow x_r \geq 1$
  - *dispose d'un budget publicitaire de 4500 euros* $\rightarrow 800x_t + 600x_r \leq 4500$
  - Positivité des variables
- Fonction objectif: *Son objectif est de maximiser le nombre de nouveaux spectateurs* $\rightarrow 100000x_t + 80000x_r$ à maximiser

A vous de jouer

Un agriculteur produisant des navets et des courgettes souhaite savoir comment produire un maximum (en poids) de légumes. Un m^2 de courgettes donne 4kg et un m^2 de navets 5kg. Chaque m^2 de navets nécessite 1kg de guano, 2kg de compost, et 1kg de marc de café. Chaque m^2 de courgettes nécessite 2kg de guano et 1kg de compost. Il dispose de 8kg de guano, 7kg de compost, et 3kg de marc de café. Comment lui conseillez-vous de planter ses légumes ?

Programmation linéaire

Programmation linéaire

Traduction du problème en PL:

Programmation linéaire

Traduction du problème en PL:

- Variables de décision: $x_n \in \mathbb{R}$ le m^2 de navets, $x_c \in \mathbb{R}$ le m^2 de courgettes

Programmation linéaire

Traduction du problème en PL:

- Variables de décision: $x_n \in \mathbb{R}$ le m^2 de navets, $x_c \in \mathbb{R}$ le m^2 de courgettes
- Contraintes:

Programmation linéaire

Traduction du problème en PL:

- Variables de décision: $x_n \in \mathbb{R}$ le m^2 de navets, $x_c \in \mathbb{R}$ le m^2 de courgettes
- Contraintes:
  - *Il dispose de 8kg de guano* $\rightarrow x_n + 2x_c \leq 8$

Programmation linéaire

Traduction du problème en PL:

- Variables de décision: $x_n \in \mathbb{R}$ le m^2 de navets, $x_c \in \mathbb{R}$ le m^2 de courgettes
- Contraintes:
  - *Il dispose de 8kg de guano* $\rightarrow x_n + 2x_c \leq 8$
  - *7kg de compost* $\rightarrow 2x_n + x_c \leq 7$

Programmation linéaire

Traduction du problème en PL:

- Variables de décision: $x_n \in \mathbb{R}$ le m^2 de navets, $x_c \in \mathbb{R}$ le m^2 de courgettes
- Contraintes:
  - *Il dispose de 8kg de guano* $\rightarrow x_n + 2x_c \leq 8$
  - *7kg de compost* $\rightarrow 2x_n + x_c \leq 7$
  - *et 3kg de marc de café* $x_n \leq 3$

Programmation linéaire

Traduction du problème en PL:

- Variables de décision: $x_n \in \mathbb{R}$ le m^2 de navets, $x_c \in \mathbb{R}$ le m^2 de courgettes
- Contraintes:
  - *Il dispose de 8kg de guano* $\rightarrow x_n + 2x_c \leq 8$
  - *7kg de compost* $\rightarrow 2x_n + x_c \leq 7$
  - *et 3kg de marc de café* $x_n \leq 3$
  - Positivité des variables

Programmation linéaire

Traduction du problème en PL:

- Variables de décision: $x_n \in \mathbb{R}$ le m^2 de navets, $x_c \in \mathbb{R}$ le m^2 de courgettes
- Contraintes:
  - *Il dispose de 8kg de guano* $\rightarrow x_n + 2x_c \leq 8$
  - *7kg de compost* $\rightarrow 2x_n + x_c \leq 7$
  - *et 3kg de marc de café* $x_n \leq 3$
  - Positivité des variables
- Fonction objectif: *comment produire un maximum (en poids) de légumes* $\rightarrow 5x_n + 4x_c$ à maximiser

Programmation linéaire

Programmation linéaire

Intérêt de la PL:

Programmation linéaire

Intérêt de la PL:

- Pour les problèmes de RO en général: Pas de méthode générale de résolution

Programmation linéaire

Intérêt de la PL:

- Pour les problèmes de RO en général: Pas de méthode générale de résolution
- Pour les problèmes de PL: Existence de méthodes de résolution générales

Programmation linéaire

Intérêt de la PL:

- Pour les problèmes de RO en général: Pas de méthode générale de résolution
- Pour les problèmes de PL: Existence de méthodes de résolution générales
- Méthodes efficaces en théorie et en pratiques (logiciels: Excel, CPLEX, LP-Solve...)

Programmation linéaire

Intérêt de la PL:

- Pour les problèmes de RO en général: Pas de méthode générale de résolution
- Pour les problèmes de PL: Existence de méthodes de résolution générales
- Méthodes efficaces en théorie et en pratiques (logiciels: Excel, CPLEX, LP-Solve. . .)

Attention, il y a un cadre restrictif:

- nombre fini de variables réelles
- contraintes linéaires
- objectif linéaire

Vocabulaire

Vocabulaire

- x_i : variable de décision du problème

Vocabulaire

- x_i : variable de décision du problème
- $x = (x_1, \ldots, x_n)$ solution réalisable (=admissible) ssi elle satisfait toutes les contraintes

Vocabulaire

- x_i : variable de décision du problème
- $x = (x_1, \ldots, x_n)$ solution réalisable (=admissible) ssi elle satisfait toutes les contraintes
- ensemble des solutions réalisables = domaine ou région admissible

Vocabulaire

- x_i : variable de décision du problème
- $x = (x_1, \ldots, x_n)$ solution réalisable (=admissible) ssi elle satisfait toutes les contraintes
- ensemble des solutions réalisables = domaine ou région admissible
- $x = (x_1, \ldots, x_n)$ solution optimale ssi elle est réalisable et optimise la fonction objectif

Vocabulaire

- x_i : variable de décision du problème
- $x = (x_1, \dots, x_n)$ solution réalisable (=admissible) ssi elle satisfait toutes les contraintes
- ensemble des solutions réalisables = domaine ou région admissible
- $x = (x_1, \dots, x_n)$ solution optimale ssi elle est réalisable et optimise la fonction objectif
- contrainte: inégalité ou égalité linéaire

$$\begin{array}{rl} \text{s.c.} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ \text{et/ou} & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \ldots + a_{2n}x_n \geq b_2 \\ \text{et/ou} & a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \ldots + a_{3n}x_n = b_3 \end{array}$$

Vocabulaire

- x_i : variable de décision du problème
- $x = (x_1, \dots, x_n)$ solution réalisable (=admissible) ssi elle satisfait toutes les contraintes
- ensemble des solutions réalisables = domaine ou région admissible
- $x = (x_1, \dots, x_n)$ solution optimale ssi elle est réalisable et optimise la fonction objectif
- contrainte: inégalité ou égalité linéaire

$$\begin{array}{rl} \text{s.c.} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ \text{et/ou} & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \ldots + a_{2n}x_n \geq b_2 \\ \text{et/ou} & a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \ldots + a_{3n}x_n = b_3 \end{array}$$

- fonction objectif: fonction linéaire à maximiser ou minimiser:

$$\text{max/min} \quad c_1x_1 + c_2x_2 \ldots + c_nx_n$$

Exemple

$$\max z = x_1 - x_2$$

$$\text{s.c.} \quad \left| \begin{array}{rcl} \frac{1}{3}x_1 + x_2 & = & 2 \\ -2x_1 + 5x_2 & \leq & 7 \\ x_1 + x_2 & \leq & 4 \\ x_1 & \geq & 0 \\ x_2 & \in & \mathbb{R} \end{array} \right.$$

A vous de jouer

Exercice 1 **Production de vins** (G. Finke)

Dans une distillerie américaine on produit trois sortes de vin allemands authentiques : Heidelberg sweet, Heidelberg regular et Deutschland extra dry. Les produits de base, la main d'œuvre et le profit par gallon sont indiqués dans le tableau ci-dessous.

	raisin - type A (boisseau)	raisin - type B (boisseau)	sucre (kg)	main d'œuvre (heures)	profit (€)
Heidelberg sweet	1	1	2	2	10
Heidelberg regular	2	0	1	3	12
Deutschl. extra dry	0	2	0	1	20

La distillerie possède 150 boisseaux de raisin de type A, 150 boisseaux de raisin de type B, 80 kg de sucre et peut fournir 225 heures de travail. Quelles quantités faut-il produire de ces trois vins pour obtenir un profit maximum ?

Question 1 – Formuler comme programme linéaire.

A vous de jouer

Exercice 1 **Production de vins** (G. Finke)

Dans une distillerie américaine on produit trois sortes de vin allemands authentiques : Heidelberg sweet, Heidelberg regular et Deutschland extra dry. Les produits de base, la main d'œuvre et le profit par gallon sont indiqués dans le tableau ci-dessous.

	raisin - type A (boisseau)	raisin - type B (boisseau)	sucre (kg)	main d'œuvre (heures)	profit (€)
Heidelberg sweet	1	1	2	2	10
Heidelberg regular	2	0	1	3	12
Deutschl. extra dry	0	2	0	1	20

La distillerie possède 150 boisseaux de raisin de type A, 150 boisseaux de raisin de type B, 80 kg de sucre et peut fournir 225 heures de travail. Quelles quantités faut-il produire de ces trois vins pour obtenir un profit maximum ?

Question 1 – Formuler comme programme linéaire.

Correction: https://www.dailymotion.com/video/x7x8lwo

Représentations

Représentations

- Représentation in extenso:

$$\begin{aligned} \max \quad & 4x_c + 5x_n \\ \text{s.c.} \quad & 2x_c + x_n \leq 8 \\ & x_c + 2x_n \leq 7 \\ & x_n \leq 3 \\ & x_c \geq 0 \text{ et } x_n \geq 0 \end{aligned}$$

Représentations

- Représentation in extenso:

$$\begin{aligned} \max\ & 4x_c + 5x_n \\ \text{s.c.}\ & 2x_c + x_n \leq 8 \\ & x_c + 2x_n \leq 7 \\ & x_n \leq 3 \\ & x_c \geq 0 \text{ et } x_n \geq 0 \end{aligned}$$

- Représentation matricielle:

$$\max \quad \begin{pmatrix} 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_c \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_c \\ x_n \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$x_c \geq 0 \qquad x_n \geq 0$$

Représentatio in extenso

$$
\begin{array}{llccl}
\max z = & \sum_j c_j x_j & & & \\
s.c. & \sum_j a_{ij} x_j & \left\{ \begin{array}{c} \leq \\ \geq \\ = \end{array} \right\} & b_i & i = 1, 2 \ldots m \\
 & x_j & \geq & 0 & j = 1, 2 \ldots n
\end{array}
$$

Représentation matricielle

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \ddots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$c = (c_1, c_2 \dots c_n)$$

$$\begin{array}{lrcl} \max z & = cx & & \\ s.c. & Ax & \left\{ \begin{array}{c} \leq \\ \geq \\ = \end{array} \right\} & b \\ & x & \geq & 0 \end{array}$$

Vocabulaire

$$
\begin{array}{lrcl}
\max z & = cx & & \\
s.c. & Ax & \left\{ \begin{array}{c} \leq \\ \geq \\ = \end{array} \right\} & b \\
 & x & \geq & 0
\end{array}
$$

Vocabulaire

$$
\begin{aligned}
\max z \quad &= cx \\
s.c. \qquad Ax & \left\{ \begin{array}{c} \leq \\ \geq \\ = \end{array} \right\} \; b \\
x \quad & \geq \quad 0
\end{aligned}
$$

- b est le second membre

Vocabulaire

$$
\begin{aligned}
\max z \quad &= cx \\
s.c. \qquad Ax \; &\left\{ \begin{array}{c} \leq \\ \geq \\ = \end{array} \right\} \; b \\
x \quad &\geq \quad 0
\end{aligned}
$$

- b est le second membre
- c est le coût ou le profit

A vous de jouer

https://moodle.caseine.org/mod/quiz/view.php?id=35866

Forme canonique d'un PL

Forme canonique d'un PL

- Maximisation

Forme canonique d'un PL

- Maximisation
- Variables non négatives

Forme canonique d'un PL

- Maximisation
- Variables non négatives
- Contraintes inéquations du type "$\leq$"

Forme canonique d'un PL

- Maximisation
- Variables non négatives
- Contraintes inéquations du type "$\leq$"

$$\max z = \sum_j c_j x_j$$

→ Forme in extenso:

$$\begin{array}{llll} s.c. & \sum_j a_{ij} x_j & \leq & b_i & i = 1, 2 \ldots m \\ & x_j & \geq & 0 & j = 1, 2 \ldots n \end{array}$$

Forme canonique d'un PL

- Maximisation
- Variables non négatives
- Contraintes inéquations du type "≤"

→ Forme in extenso:

$$
\begin{array}{lrcll}
 & \max z = \sum_j c_j x_j & & & \\
s.c. & \sum_j a_{ij} x_j & \leq & b_i & i = 1, 2 \ldots m \\
 & x_j & \geq & 0 & j = 1, 2 \ldots n
\end{array}
$$

→ Forme matricielle:

$$
\begin{array}{lrcl}
\max z = cx & & & \\
s.c. & Ax & \leq & b \\
 & x & \geq & 0
\end{array}
$$

Forme standart d'un PL

Forme standart d'un PL

- Maximisation

Forme standart d'un PL

- Maximisation
- Variables non négatives

Forme standart d'un PL

- Maximisation
- Variables non négatives
- Contraintes équations (du type "=")

Forme standart d'un PL

- Maximisation
- Variables non négatives
- Contraintes équations (du type "=")

$$\max z = \sum_j c_j x_j$$

→ Forme in extenso:

$$\begin{array}{llll} s.c. & \sum_j a_{ij} x_j = b_i & & i = 1, 2 \ldots m \\ & x_j \geq 0 & & j = 1, 2 \ldots n \end{array}$$

Forme standart d'un PL

- Maximisation
- Variables non négatives
- Contraintes équations (du type "=")

$$\max z = \textstyle\sum_j c_j x_j$$

→ Forme in extenso:

$$\begin{array}{lrcll} s.c. & \sum_j a_{ij} x_j & = & b_i & i = 1, 2 \dots m \\ & x_j & \geq & 0 & j = 1, 2 \dots n \end{array}$$

→ Forme matricielle:

$$\begin{array}{lrcl} \max z = cx & & & \\ s.c. & Ax & = & b \\ & x & \geq & 0 \end{array}$$

Passage entre les formes

Passage entre les formes

- équation → inéquation:

$$ax = b \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} ax \leq b \\ ax \geq b \end{cases}$$

Passage entre les formes

- équation → inéquation:

$$ax = b \iff \begin{cases} ax \leq b \\ ax \geq b \end{cases}$$

- $\max \leftrightarrow \min : \max f(x) = -\min -f(x)$

Passage entre les formes

- équation → inéquation:

$$ax = b \iff \begin{cases} ax \leq b \\ ax \geq b \end{cases}$$

- $\max \leftrightarrow \min : \max f(x) = -\min -f(x)$
- inéquation → équation: ajouter une variable d'écart

$$\begin{aligned} ax \leq b &\iff ax + s = b, \qquad s \geq 0 \\ ax \geq b &\iff ax - s = b, \qquad s \geq 0 \end{aligned}$$

Passage entre les formes

- équation → inéquation:

$$ax = b \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} ax \leq b \\ ax \geq b \end{cases}$$

- $\max \leftrightarrow \min : \max f(x) = -\min -f(x)$
- inéquation → équation: ajouter une variable d'écart

$$\begin{aligned} ax \leq b \quad &\Longleftrightarrow \quad ax + s = b, \qquad s \geq 0 \\ ax \geq b \quad &\Longleftrightarrow \quad ax - s = b, \qquad s \geq 0 \end{aligned}$$

- variable non contrainte → variable positive:

$$x \in \mathbb{R} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x = x^+ - x^- \\ x^+, x^- \geq 0 \end{cases}$$

Linéarisation

Linéarisation

e_i : expression linéaire des variables de décision

Linéarisation

e_i : expression linéaire des variables de décision

- $\min \max\{e_1, e_2 \dots e_n\}$:

$$\begin{cases} \min y \\ y \geq e_i \qquad i = 1, 2 \dots n \end{cases}$$

Linéarisation

e_i : expression linéaire des variables de décision

- $\min \max\{e_1, e_2 \dots e_n\}$:

$$\begin{cases} \min y \\ y \geq e_i \qquad i = 1, 2 \dots n \end{cases}$$

- $\max \min\{e_1, e_2 \dots e_n\}$:

$$\begin{cases} \max y \\ y \leq e_i \qquad i = 1, 2 \dots n \end{cases}$$

Linéarisation

e_i : expression linéaire des variables de décision

- $\min \max\{e_1, e_2 \ldots e_n\}$:

  $$\begin{cases} \min y \\ y \geq e_i \qquad i = 1, 2 \ldots n \end{cases}$$

- $\max \min\{e_1, e_2 \ldots e_n\}$:

  $$\begin{cases} \max y \\ y \leq e_i \qquad i = 1, 2 \ldots n \end{cases}$$

- $\min |e_1|$:

  $$|e_1| = \max(e_1, -e_1) \quad \begin{cases} \min y \\ y \geq e_1 \\ y \geq -e_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \min e^+ + e^- \\ e_1 = e^+ - e^- \\ e^+, e^- \geq 0 \end{cases}$$

A vous de jouer

Exercice 6 **Formes linéaires et canoniques** (J.-F. Hêche)

Question 1 – Formuler les programmes linéaires suivants sous formes canonique et standard.

1. Max $z = 2x_1 - x_2$
$$\begin{array}{rcrcl}
\frac{1}{3}x_1 & + & x_2 & = & 2 \\
-2x_1 & + & 5x_2 & \leq & 7 \\
x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \\
x_1 & & & \geq & 0 \\
 & & x_2 & \in & \mathbb{R}
\end{array}$$

2. Min $z = -3x_1 + x_3$
$$\begin{array}{rcrcrcl}
x_1 & + & \frac{1}{2}x_2 & - & 3x_3 & \geq & 2 \\
 & & 4x_2 & + & x_3 & = & 5 \\
x_1 & & , & & x_3 & \geq & 0 \\
 & & x_2 & & & \leq & 0
\end{array}$$

3. Min $z = 2x_1 - 3x_2$
$$\begin{array}{rcrcl}
 & & x_2 & \geq & -3 \\
2x_1 & - & x_2 & = & 2 \\
-x_1 & + & 3x_2 & \geq & 1 \\
x_1 & & & \geq & 0
\end{array}$$

Exercice 7 **Linéarisation** (J.-F. Hêche)

Question 1 – Formuler les programmes linéaires suivants sous forme canonique.

1. Min $z = \max(2x_1 - 3x_2, x_1 - 2x_2 + 4x_3)$
$$\begin{array}{rcrcrcl}
-2x_1 & & & + & x_3 & = & 12 \\
x_1 & + & 2x_2 & & & \leq & 5 \\
x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq & 0
\end{array}$$

2. Min $z = |x_1 - 2x_3| + |-x_1 + 3x_2 + x_3|$
$$\begin{array}{rcrcrcl}
x_1 & - & 4x_2 & + & x_3 & = & 5 \\
 & & 5x_2 & - & 3x_3 & \leq & 6 \\
x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq & 0
\end{array}$$

3. Min $z = |x_1 - 10| + \max(2x_2 - 4, |3x_1 - 4x_3|)$
$$\begin{array}{lcl}
|x_1| + x_2 & \leq & 1 \\
\max(-x_1 + x_2 + x_3, x_1 - x_2 - 2x_3) & \leq & 7 \\
x_1, x_2, x_3 & \geq & 0
\end{array}$$

A vous de jouer

Exercice 6 **Formes linéaires et canoniques** (J.-F. Hêche)

Question 1 – Formuler les programmes linéaires suivants sous formes canonique et standard.

1. Max $z = 2x_1 - x_2$

$$\begin{array}{rcrcl} \frac{1}{3}x_1 & + & x_2 & = & 2 \\ -2x_1 & + & 5x_2 & \leq & 7 \\ x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \\ x_1 & & & \geq & 0 \\ & & x_2 & \in & \mathbb{R} \end{array}$$

2. Min $z = -3x_1 + x_3$

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & \frac{1}{2}x_2 & - & 3x_3 & \geq & 2 \\ & & 4x_2 & + & x_3 & = & 5 \\ x_1 & & , & & x_3 & \geq & 0 \\ & & x_2 & & & \leq & 0 \end{array}$$

3. Min $z = 2x_1 - 3x_2$

$$\begin{array}{rcrcl} & & x_2 & \geq & -3 \\ 2x_1 & - & x_2 & = & 2 \\ -x_1 & + & 3x_2 & \geq & 1 \\ x_1 & & & \geq & 0 \end{array}$$

Exercice 7 **Linéarisation** (J.-F. Hêche)

Question 1 – Formuler les programmes linéaires suivants sous forme canonique.

1. Min $z = \max(2x_1 - 3x_2, x_1 - 2x_2 + 4x_3)$

$$\begin{array}{rcrcrcl} -2x_1 & & & + & x_3 & = & 12 \\ x_1 & + & 2x_2 & & & \leq & 5 \\ x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

2. Min $z = |x_1 - 2x_3| + |-x_1 + 3x_2 + x_3|$

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & 4x_2 & + & x_3 & = & 5 \\ & & 5x_2 & - & 3x_3 & \leq & 6 \\ x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

3. Min $z = |x_1 - 10| + \max(2x_2 - 4, |3x_1 - 4x_3|)$

$$\begin{array}{lcl} |x_1| + x_2 & \leq & 1 \\ \max(-x_1 + x_2 + x_3, x_1 - x_2 - 2x_3) & \leq & 7 \\ x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

Corrections:

- Exo 6: https://youtu.be/fjaVc5p7dVM
- Exo 7: https://www.dailymotion.com/video/x7xloq2