Recherche Opérationnelle

Programmation Linéaire en Nombres Entiers

Nadia Brauner & Alice Joffard

22 janvier 2021

Université Grenoble Alpes

G-SCOP
SCIENCES POUR LA CONCEPTION, L'OPTIMISATION ET LA PRODUCTION

A vous de jouer !

L'entreprise française Tizu (`http://tizu.fr`) créé des tables à partir de tissus recyclés et de bois du Jura. Deux sortes de tables peuvent être construites: carrées, ou rectangulaires. Chaque table carrée nécessite $1600 cm^2$ de tissu et 4 pieds en bois, et se vend à 89 euros. Chaque table rectangulaire nécessite $4000 cm^2$ de tissu et 4 pieds en bois, et se vend à 129 euros. Tizu dispose de $1.5 m^2$ de tissus et de 22 pieds en bois. Tout ce qu'ils produisent est vendu. Combien doivent-il produire de tables carrées et de tables rectangulaires pour maximiser leur profit ?

A vous de jouer !

L'entreprise française Tizu (http://tizu.fr) créé des tables à partir de tissus recyclés et de bois du Jura. Deux sortes de tables peuvent être construites: carrées, ou rectangulaires. Chaque table carrée nécessite $1600cm^2$ de tissu et 4 pieds en bois, et se vend à 89 euros. Chaque table rectangulaire nécessite $4000cm^2$ de tissu et 4 pieds en bois, et se vend à 129 euros. Tizu dispose de $1.5m^2$ de tissus et de 22 pieds en bois. Tout ce qu'ils produisent est vendu. Combien doivent-il produire de tables carrées et de tables rectangulaires pour maximiser leur profit ?

Problème: Les variables de décision sont entières

Définition

Définition

Wikipédia: Domaine des mathématiques et de l'informatique théorique dans lequel on considère des problèmes d'optimisation décrits par une fonction de coût et des contraintes linéaires, et par des variables entières.

Cadre de la PLNE: nombre fini de variables entières, contraintes linéaires, objectif linéaire

Définition

Wikipédia: Domaine des mathématiques et de l'informatique théorique dans lequel on considère des problèmes d'optimisation décrits par une fonction de coût et des contraintes linéaires, et par des variables entières.

Cadre de la PLNE: nombre fini de variables entières, contraintes linéaires, objectif linéaire

- Variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ entières

Définition

Wikipédia: Domaine des mathématiques et de l'informatique théorique dans lequel on considère des problèmes d'optimisation décrits par une fonction de coût et des contraintes linéaires, et par des variables entières.

Cadre de la PLNE: nombre fini de variables entières, contraintes linéaires, objectif linéaire

- Variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ entières
- Contrainte générique (contrainte i) : $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i$

Définition

Wikipédia: Domaine des mathématiques et de l'informatique théorique dans lequel on considère des problèmes d'optimisation décrits par une fonction de coût et des contraintes linéaires, et par des variables entières.

Cadre de la PLNE: nombre fini de variables entières, contraintes linéaires, objectif linéaire

- Variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ entières
- Contrainte générique (contrainte i) : $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ \leq \ b_i$
- Fonction-objectif générique (à maximiser / minimiser) :

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \ = \ \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

Définition

Wikipédia: Domaine des mathématiques et de l'informatique théorique dans lequel on considère des problèmes d'optimisation décrits par une fonction de coût et des contraintes linéaires, et par des variables entières.

Cadre de la PLNE: nombre fini de variables entières, contraintes linéaires, objectif linéaire

- Variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ entières
- Contrainte générique (contrainte i) : $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i$
- Fonction-objectif générique (à maximiser / minimiser) :

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

Forme matricielle, forme standart, forme canonique : La seule différence avec un PL est que les variables sont entières

Exemple de Tizu

Exemple de Tizu

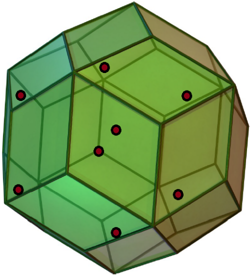
Modélisation en PLNE:

$$\begin{aligned} \max \quad & 89x + 129y \\ \text{s.c.} \quad & 1.6x + 4y \leq 15 \\ & 4x + 4y \leq 22 \\ & x, y \geq 0 \\ & x, y \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Géométrie d'un PLNE

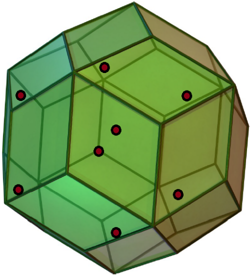
Géométrie d’un PLNE

L’ensemble des solutions réalisables est un ensemble discret de points dans un polyèdre



Géométrie d'un PLNE

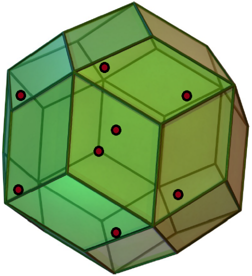
L'ensemble des solutions réalisables est un ensemble discret de points dans un polyèdre



Les lignes de niveau $\{f = \text{constante}\}$ de la fonction-objectif f sont des hyperplans affines ($n = 2 \Rightarrow$ droite, $n = 3 \Rightarrow$ plan...)

Géométrie d'un PLNE

L'ensemble des solutions réalisables est un ensemble discret de points dans un polyèdre



Les lignes de niveau $\{f = \text{constante}\}$ de la fonction-objectif f sont des hyperplans affines ($n = 2 \Rightarrow$ droite, $n = 3 \Rightarrow$ plan...)

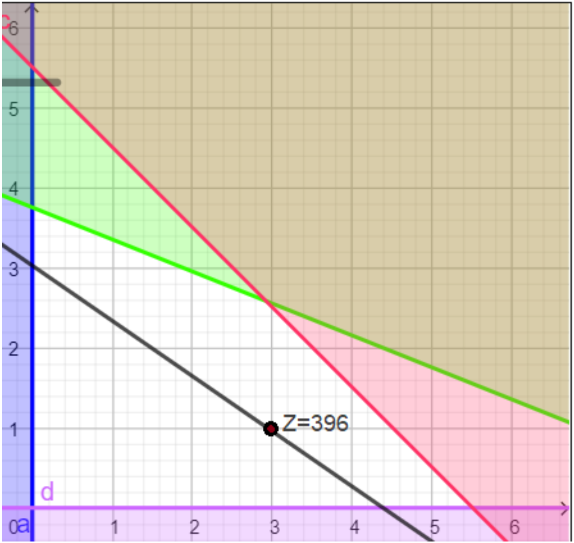
L'optimum de la fonction-objectif, s'il existe, n'est pas forcément atteint en un sommet du polyèdre.

Exemple de Tizu

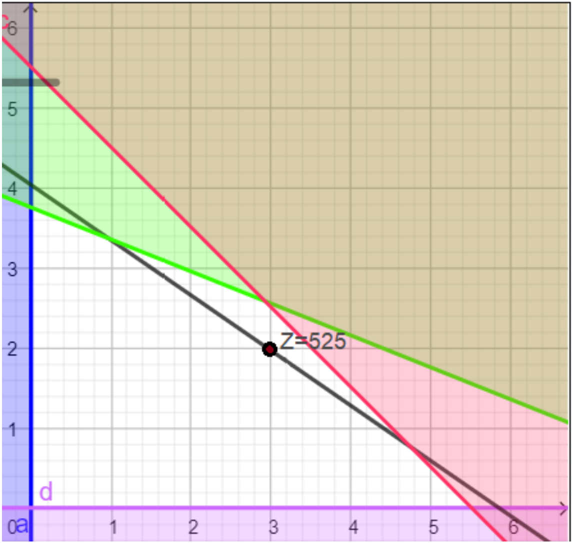
Exemple de Tizu

Exemple de Tizu

Exemple de Tizu



Exemple de Tizu



Résolution d'un PLNE

Résolution d'un PLNE

- Si le nombre de solutions réalisables est suffisamment petit, on peut calculer la valeur de la fonction objective pour toutes ces solutions afin de trouver l'optimum

Résolution d'un PLNE

- Si le nombre de solutions réalisables est suffisamment petit, on peut calculer la valeur de la fonction objective pour toutes ces solutions afin de trouver l'optimum
- Mais le nombre de solutions réalisables peut être exponentiel

Résolution d'un PLNE

- Si le nombre de solutions réalisables est suffisamment petit, on peut calculer la valeur de la fonction objective pour toutes ces solutions afin de trouver l'optimum
- Mais le nombre de solutions réalisables peut être exponentiel

→ C'est un problème NP-complet !

Résolution d'un PLNE

- Si le nombre de solutions réalisables est suffisamment petit, on peut calculer la valeur de la fonction objective pour toutes ces solutions afin de trouver l'optimum
- Mais le nombre de solutions réalisables peut être exponentiel

→ C'est un problème NP-complet !

- De nombreux problèmes difficiles peuvent s'exprimer sous la forme d'un PLNE

Résolution d'un PLNE

- Si le nombre de solutions réalisables est suffisamment petit, on peut calculer la valeur de la fonction objective pour toutes ces solutions afin de trouver l'optimum
- Mais le nombre de solutions réalisables peut être exponentiel

→ C'est un problème NP-complet !

- De nombreux problèmes difficiles peuvent s'exprimer sous la forme d'un PLNE
- On peut souvent utiliser des simplifications: pour Tizu, il vaut mieux vendre 3 tables carrées et 2 rectangulaires que 3 carrées et 1 rectangulaire.

Résolution d'un PLNE

- Si le nombre de solutions réalisables est suffisamment petit, on peut calculer la valeur de la fonction objective pour toutes ces solutions afin de trouver l'optimum
- Mais le nombre de solutions réalisables peut être exponentiel

→ C'est un problème NP-complet !

- De nombreux problèmes difficiles peuvent s'exprimer sous la forme d'un PLNE
- On peut souvent utiliser des simplifications: pour Tizu, il vaut mieux vendre 3 tables carrées et 2 rectangulaires que 3 carrées et 1 rectangulaire.
- On utilise aussi le problème relaxé: c'est le PL obtenu en enlevant les contraintes entières. La solution du PLNE est moins bien que celle du PL relaxé.

Résolution d'un PLNE

- Si le nombre de solutions réalisables est suffisamment petit, on peut calculer la valeur de la fonction objective pour toutes ces solutions afin de trouver l'optimum
- Mais le nombre de solutions réalisables peut être exponentiel

→ C'est un problème NP-complet !

- De nombreux problèmes difficiles peuvent s'exprimer sous la forme d'un PLNE
- On peut souvent utiliser des simplifications: pour Tizu, il vaut mieux vendre 3 tables carrées et 2 rectangulaires que 3 carrées et 1 rectangulaire.
- On utilise aussi le problème relaxé: c'est le PL obtenu en enlevant les contraintes entières. La solution du PLNE est moins bien que celle du PL relaxé.
- Pour aller plus loin: voir l'algorithme de résolution exacte *Branch & Bound*

A vous de jouer

Exercice 10: **Usine**

Une usine fabrique deux types de pianos P. Le marché est porteur et toute la production de la semaine sera vendue. Chacun de ces produits demande des heures de fabrication sur les machines A, B et C comme indiqué dans le tableau ci-dessous. Ce tableau indique également la disponibilité totale de chaque machine par semaine.

	Machine A	Machine B	Machine C
Piano P_1	2h	0h	1h
Piano P_2	5h	1h	0h
Disponibilité	24h	3h	5h

On cherche à maximiser les profits de l'entreprise, sachant que la vente du piano P_1 rapporte (en terme de marge) 1000 € à l'entreprise, et la vente du piano P_2 rapporte 2000 €.

1) Modéliser le problème sous la forme d'un PLNE
2) Représenter l'espace des solutions réalisables et trouver la solution optimale
3) Vérifiez votre solution en utilisant OPL: `https://moodle.caseine.org/mod/vpl/forms/edit.php?id=35235&userid=31793`

A vous de jouer

Exercice 10: Usine

Une usine fabrique deux types de pianos P. Le marché est porteur et toute la production de la semaine sera vendue. Chacun de ces produits demande des heures de fabrication sur les machines A, B et C comme indiqué dans le tableau ci-dessous. Ce tableau indique également la disponibilité totale de chaque machine par semaine.

	Machine A	Machine B	Machine C
Piano P_1	2h	0h	1h
Piano P_2	5h	1h	0h
Disponibilité	24h	3h	5h

On cherche à maximiser les profits de l'entreprise, sachant que la vente du piano P_1 rapporte (en terme de marge) 1000 € à l'entreprise, et la vente du piano P_2 rapporte 2000 €.

1) Modéliser le problème sous la forme d'un PLNE
2) Représenter l'espace des solutions réalisables et trouver la solution optimale
3) Vérifiez votre solution en utilisant OPL: https://moodle.caseine.org/mod/vpl/forms/edit.php?id=35235&userid=31793

Correction: https://youtu.be/7iW2KFqSqX8