TD BIA 2012
TD3 Logique(1) révision + TD4

Nadia Kabachi, Alain Mille, Amjad Rattrout

18 octobre 2012

Pour ce TD -> 30 minutes de révision par le commentaire de la correction pendant le TD, puis réalisation de la partie 3.

1 Révision 1 : Formules atomiques (atomes), variables, termes, formules du premier ordre (formules)

Lorsqu'il s'agit de la logique des prédicats et selon les auteurs, on trouvera indifféremment atome pour désigner une "formule atomique" et formules pour désigner les "formules du premier ordre".

Dans les formules suivantes, qu'est-ce qui est atomes, variables, termes, formules ?
$(\forall x \exists y \forall t R(x,z,y)) \rightarrow (\exists x \forall y \exists t S(x,z,t))$
$(\forall x \exists y \forall t R(x,z,t)) \rightarrow (\exists x \forall y \exists t S(x,z,t))$
Mettre ces formules sous forme prénexe.

éléments de correction

Rappels sur atomes, termes, variables liées et libres, formules

Un atome (ou formule atomique) est un prédicat directement valuable à Vrai ou Faux

Un terme est soit une variable, soit une constante, soit une fonction. Un terme prend sa valeur dans le domaine des variables.

Une variable peut être liée ou libre selon qu'elle est quantifiée (par un quantificateur ou non).

Une formule, est soit un atome, soit une composition de formules avec les connecteurs et les quantificateurs.

Dans la formule $(\forall x \exists y \forall t R(x,z,y)) \rightarrow (\exists x \forall y \exists t S(x,z,t))$
x, z, y, t sont des termes de type variables
$R(x,z,y)$ et $S(x,z,t)$ sont des formules atomiques ou atomes.
$(\forall x \exists y \forall t R(x,z,y)) \rightarrow (\exists x \forall y \exists t S(x,z,t))$,$\forall x \exists y \forall t R(x,z,y))$, $\exists x \forall y \exists t S(x,z,t)$, $R(x,z,y)$, $S(x,z,t)$ sont des formules non atomiques.
x, y, t sont des variables liées, z est une variable libre.

Rappels sur la forme prénexe

Une formule F est **prénexe** si elle est de la forme $Q_1 x_1 Q_2 x_2 \ldots Q_n x_n G$ avec G sans quantificateur et chaque Q_i étant soit $\forall$ soit $\exists$.

Les régles à appliquer sont (si Q est un quantificateur et Q' l'autre quantificateur) :

1. $\neg QxF \equiv Q'x \neg F$
2. $QxF \wedge G \equiv Qx(F \wedge G)$ si x n'a pas d'occurence dans F
3. $G \wedge QxF \equiv Qx(G \wedge F)$ si x n'a pas d'occurence dans G
4. $QxF \vee G \equiv Qx(F \vee G)$ si x n'a pas d'occurence dans F
5. $G \vee QxF \equiv Qx(G \vee F)$ si x n'a pas d'occurence dans G

Attention, $\exists x \forall y (P(x,y))$ n'est en général pas équivalent à $\forall y \exists x (P(x,y))$

Pour mettre sous forme prénexe une formule quelconque :

- Eliminer les connecteurs $\rightarrow$ et $\leftrightarrow$ en appliquant les lois d'équivalence $((P \rightarrow Q) \equiv (\neg P \vee Q)$ et $(P \leftrightarrow Q) \equiv ((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)))$.
- Transporter les symboles de négation $\neg$ devant les formules atomiques (lois de de Morgan, lois de double négation, et la régle 1)
- Renommer si nécessaire les variables pour pouvoir appliquer les régles d'équivalence en cas de déplacement des quantificateurs
  - $\forall x(A(x) \wedge B(x)) \equiv \forall x A(x) \wedge \forall x B(x)$ mais pas vrai pour le $\vee$!
  - $\exists x(A(x) \vee B(x)) \equiv \exists x A(x) \vee \exists x B(x)$ mais pas vrai pour le $\wedge$!
- Transporter les quantificateurs devant la formule de façon à obtenir une formule prénexe. Utilser les régles 2 à 5 citées plus haut)

Appliquons ces régles à $(\forall x \exists y \forall t R(x, z, t)) \rightarrow (\exists x \forall y \exists t S(x, z, t))$
On supprime $\rightarrow$.
$\neg(\forall x \exists y \forall t R(x, z, y)) \vee (\exists x \forall y \exists t S(x, z, t))$
On transporte l'opérateur de négation devant la formule atomique (application régle 1)
$\exists x \forall y \exists t \neg R(x, z, y) \vee (\exists x \forall y \exists t S(x, z, t))$ (forme $QxF \vee G \equiv Qx(F \vee G)$)
On déplace les quantificateurs (régle 4) après avoir enlevé les quantificateurs inutiles.
$\exists x \forall y \neg R(x, z, y) \vee (\exists x \exists t S(x, z, t))$ le $\forall y$ ne peut pas être le même pour les deux sous-formules.
Il n'y a pas de renommage à faire puisque le quantificateur $\forall$ ne porte que sur la première sous-formule (pas de y dans la seconde).
$\exists x \forall y \exists t(\neg R(x, z, y) \vee (\exists x \forall y \exists t S(x, z, t)))$
On déplace les quantificateurs (régle 5)
$\exists x \forall y \exists t(\exists x \forall y \exists t(\neg R(x, z, y) \vee S(x, z, t)))$
On simplifie
$\exists x \forall y \exists t \neg R(x, z, y) \vee S(x, z, t)$

Appliquons ces règles à $(\forall x \exists y \forall t R(x, z, t)) \rightarrow (\exists x \forall y \exists t S(x, z, t))$
On supprime $\rightarrow$.
$\neg(\forall x \exists y \forall t R(x, z, t)) \vee (\exists x \forall y \exists t S(x, z, t))$
On supprime les quantificateurs portant sur une variable n'appartenant pas aux formules
$\neg(\forall x \forall t R(x, z, t)) \vee (\exists x \exists t S(x, z, t))$
On transporte l'opérateur de négation devant la formule atomique (application régle 1)
$\exists x \exists t \neg R(x, z, t) \vee (\exists x \exists t S(x, z, t))$ (forme $QxF \vee G \equiv Qx(F \vee G)$)
On applique les régles 4 et 5 et on simplifie (il n'y a pas de renommage nécessaire).
$\exists x \exists t \neg R(x, z, t) \vee S(x, z, t)$

2 Révision 2 : Skolemisation, formes clausales

Considérons les énoncés suivants :

1. *Tous les descendants d'un pigeon peuvent voler*
2. *Joe a au moins un parent gris ou blanc*
3. *Un pigeon quelconque est satisfait si tous ses descendants peuvent voler*
4. *Les pigeons gris peuvent voler*
5. *Un pigeon est gris s'il a au moins un parent gris ou blanc*

Mettre les énoncés 1 à 5 sous forme de formules, puis mettre sous forme clausale la conjonction des formules 3 à 5. On se place dans l'univers des pigeons.

Les énoncés proposés se modélisent de la façon suivante.
Comme nous sommes dans l'univers des pigeons, les variables prennent leurs valeurs dans les identifiants de pigeon (des prénoms dans notre cas).
On considére les prédicats :
- $S(x)$, x est satisfait
- $P(x, y)$, x est parent de y
- $Vo(x)$, x peut voler
- $B(x)$, x est blanc
- $G(x)$, x est gris

Les énoncés se traduisent donc par :

1. Tous les descendants d'un pigeon peuvent voler $\boxed{F1 = \forall x, \forall y P(x, y) \to Vo(y)}$
2. Joe a au moins un parent gris ou blanc $\boxed{F2 = \exists x P(x, Joe) \wedge (G(x) \vee B(x))}$
3. Un pigeon quelconque est satisfait si tous ses descendants peuvent voler $\boxed{F3 = \forall x(\forall y(P(x, y) \wedge Vo(y)) \to S(x))}$
4. Les pigeons gris peuvent voler $\boxed{F4 = \forall x(G(x) \to Vo(x))}$
5. Un pigeon est gris s'il a au moins un parent gris ou blanc $\boxed{F5 = \forall x((\exists y(P(y, x) \wedge (B(y) \vee G(y))) \to G(x))}$.

La mise sous forme clausale des formules $F3$, $F4$ et $F5$

Préparation de $F3$ pour la mise en forme clausale :
$F3 = \forall x(\forall y(P(x, y) \wedge Vo(y)) \to S(x))$
$F3 = \forall x \neg(\forall y(P(x, y) \wedge Vo(y)) \vee S(x))$
$F3 = \forall x \exists y(\neg P(x, y) \vee \neg Vo(y) \vee S(x))$
$CF3 = \{\neg P(x_1, y_1) \vee \neg Vo(y_1) \vee S(x_1)\}$

Préparation de $F4$ pour la mise en forme clausale
$F4 \equiv \forall x(\neg G(x) \vee Vo(x))$
$CF4 = \{\neg G(x_3) \vee Vo(x_3)\}$

Détaillons le processus pour $F5$

Mise de $F5$ en forme prénexe
$F5 \equiv \forall x(\neg(\exists y(P(y, x) \wedge (B(y) \vee G(y))) \vee G(x))$
déplacement de la négation prés des atomes
$F5 \equiv \forall x((\forall y \neg((P(y, x) \wedge (B(y) \vee G(y)))) \vee G(x))$
puis $F5 \equiv \forall x((\forall y(\neg(P(y, x) \wedge (B(y) \vee G(y)))) \vee G(x))$
puis $F5 \equiv \forall x((\forall y((\neg P(y, x) \vee \neg(B(y) \vee G(y)))) \vee G(x))$
puis $F5 \equiv \forall x(\forall y((\neg P(y, x) \vee (\neg B(y) \wedge \neg G(y)))) \vee G(x))$
mise en forme normale conjonctive
$F5 \equiv \forall x \forall y(\neg P(y, x) \vee \neg G(y) \vee B(y)) \wedge (\neg P(y, x) \vee \neg G(y) \vee G(x))$
$CF5 = \{\neg P(y_1, x_4) \vee \neg G(y_1) \vee B(x_4), \neg P(y_2, x_5) \vee \neg G(y_2) \vee G(x_5)\}$

3 Monde de Herbrand

3.1 Montrer que $\exists x \forall y(((U(x) \to U(y)) \to T(x)) \to T(y))$ est universellement valide.

3.2 Déduction

Pour une déduction, on établit d'abord ce qui est vrai (conjonction de prédicats) et pour établir la conclusion, on nie cette conclusion et on l'ajoute à la conjonction. Si la formule ainsi formée est impossible à satisfaire, c'est qu'il n'est pas possible de nier la conclusion en présence des prémisses et que donc la conclusion est une déduction logique des prémisses.

Valider le raisonnement suivant :

1. *Quelques chandelles éclairent très mal*

2. *Les chandelles sont faites pour éclairer*
3. *donc : quelques objets qui sont fait pour éclairer le font très mal*