TD3 - Systèmes formels et Logique

I. Les systèmes formels

Exercice 1. Dans l'article "Chaînage avant et déductions logiques", apparu dans la revue *Pour la Science* de février 1992, **Jean-Paul Delahaye** nous présente certaines connaissances concernant un étudiant appelé Armand, qui est "grand" et "ne porte pas de lunettes" (base de faits). On connaît les informations suivantes :

(1) Si musicien alors aime les mathématiques,

(2) Si grand et brun alors musicien,

(3) Si sans-lunettes alors brun.

L'utilisation du modus ponens (règle d'inférence qui enchaîne les règles de gauche à droite, i.e. en chaînage avant) fait croître nos connaissances sur Armand. On déduit ainsi que Armand est : "grand", "sans-lunettes", "brun", "musicien", et "aime les mathématiques".

A la base précedente, ajoutons la règle

(4) Si lunettes alors musicien,

et considérons la base de faits associée à Bernard, dont nous savons simplement qu'il est "grand".

a- Expliquer, par un raisonnement à vous, pourquoi Bernard aime les mathématiques.

b- Pour quelle raison pensez-vous que ce même résultat ne peut pas être obtenu en utilisant seulement le chaînage avant ? Est-il gênant d'acheter un logiciel qui utilise le chaînage avant comme algorithme de déduction avec des bases de règles comme celles de l'exemple, et où les notices d'utilisation n'avertissent pas les acheteurs qu'ils risquent de ne pas obtenir ce que la logique usuelle fait attendre ?

II. Complexité des preuves par résolution

Exercice 2. Le principe des pigeons (an anglais : pigeonhole)

Lorsque l'on place $n + 1$ pigeons dans n boîtes (ou tiroirs), une des boîtes doit contenir au moins deux pigeons.

Le but de l'exercice est de montrer que la méthode de résolution peut être "mauvaise" (preuves de longueur exponentielle, **Haken** *1985).*

Répondre aux points suivants :

a- Formaliser ce principe au moyen d'une règle (formule du Calcul Propositionnel). Le résultat sera $\mathbf{PH_n}$.

On introduira pour cela $n \times (n + 1)$ lettres propositionnelles :

$$p_{1,1},\ p_{1,2},\ p_{1,3}, \dots,\ p_{1,n},\ p_{2,1}, \dots,\ p_{i,j}, \dots,\ p_{n+1,n}$$

pour $1 \leq i \leq n + 1$, $1 \leq j \leq n$.

La variable propositionnelle $p_{i,j}$ sera interprétée de la façon suivante :

$$p_{i,j} : \text{le pigeon } i \text{ est dans la boîte } j$$

b- Soit $\mathbf{I}(\mathbf{PH_n})$ la valeur de vérité de la formule $\mathbf{PH_n}$. Montrer, en utilisant des arguments mathématiques (principe informel des pigeons) que $\mathbf{PH_n}$ est une tautologie.

c- Considérer la négation de $\mathbf{PH_n}$. Vérifier qu'elle est écrite en forme normale conjonctive (= forme clausale). Appliquer la méthode de résolution pour $n = 3$. Combien de clauses obtient-on ?

III. Ecriture des expressions logiques (formules) sous forme normale

Exercice 3. Pour illustrer l'**intérêt du langage de la logique des prédicats comme outil de représentation des connaissances**, **Jacques Pitrat** (1985) a considéré une expression logique pour décrire un exemple portant sur *l'univers de blocs.*

On cherche à trouver les objets x qui vérifient l'énoncé :

$$\begin{aligned} E: \ Est(x, cube) \ & \wedge \ Couleur(x, rouge) \\ & \wedge \ \exists y \ (\ Est(y, pyramide) \ \wedge \ Soutient(x, y)\ ) \\ & \wedge \ \neg\exists y \ (\ Est(y, boite) \ \wedge \ Contient(y, x)\ ) \end{aligned}$$

a- Trouver un sens à chaque composante présente dans l'expression donnée et interpréter l'expression entière.

b- Faire la liste des termes, des atomes et des littéraux (positifs et négatifs) présents dans l'énoncé E.

c- Transformer la formule donnée pour obtenir un ensemble de clauses. On procédera pas à pas en expliquant à chaque étape la démarche suivie.

IV. Algorithme d'unification

Etant données deux formules atomiques, comportant éventuellement des variables, l'unification consiste à trouver, si elles existent, les valeurs qui doivent prendre **les variables** présentes dans l'un ou l'autre des formules pour que celles-ci coïncident.

Exercice 4. Décider, à l'aide de l'**algorithme de Robinson**, si l'ensemble suivant est unifiable. Si oui, donner **un** plus grand unificateur (en abrégé **mgu :** a most general unifier)
(intuitivement, un plus grand unificateur d'un ensemble de formules -quand il en existe- est une substitution des variables aussi générale que possible faisant coïncider les formules).

$$E = \{\ f(x, g(y, z),\ y,\ a), \quad f(g(h(b, v), y),\ x,\ h(b, u),\ w)\ \}$$

$(x, y, z, u, v, w$ sont des variables, a, b des constantes).
