Logique(s) Langages Algorithmes

module **un** – **Logique(s)**

Dr. hab. Narendra Jussien

École des Mines de Nantes

IMA3

Plan du cours

Plan

Définition

Définition (Logique (*n. f.*))

- *Étude scientifique des conditions de vérité des propositions*
- *Manière de raisonner*
- *Enchaînement cohérent d'idées*

Un (bref) historique

De l'antiquité à la logique moderne

- Aristote
  - Notion de **prédicat** : « S est P »
  - Syllogisme : « $A \longrightarrow B$ et $B \longrightarrow C$ donne $A \longrightarrow C$ ».
- XIVe siècle
  - Buridan : généralisation de la logique d'Aristote
- XIXe siècle
  - Boole et Frege détachent la logique de la philosophie et la rattachent aux mathématiques

Un (bref) historique

De l'antiquité à la logique moderne

- Aristote
    - Notion de **prédicat** : « S est P »
    - Syllogisme : « $A \longrightarrow B$ et $B \longrightarrow C$ donne $A \longrightarrow C$ ».
- XIV^{e} siècle
    - Buridan : généralisation de la logique d'Aristote
- XIX^{e} siècle
    - Boole et Frege détachent la logique de la philosophie et la rattachent aux mathématiques

déclic

passage de l'**implicite** à l'**explicite**

Démarche du cours

- Étude de la logique binaire dans la perspective de la **démonstration automatique**

Démarche du cours

- Étude de la logique binaire dans la perspective de la **démonstration automatique**
  - Logique des propositions ($\neg, \wedge, \vee, \ldots$)

Démarche du cours

- Étude de la logique binaire dans la perspective de la **démonstration automatique**
  - Logique des propositions ($\neg, \wedge, \vee, \ldots$)
  - Logique du premier ordre ($\forall, \exists, R, S, T, f, g, x, y, \ldots$)

Démarche du cours

- Étude de la logique binaire dans la perspective de la **démonstration automatique**
  - Logique des propositions $(\neg, \wedge, \vee, \dots)$
  - Logique du premier ordre $(\forall, \exists, R, S, T, f, g, x, y, \dots)$
- Étude de logiques non classiques

Démarche du cours

- Étude de la logique binaire dans la perspective de la **démonstration automatique**
  - Logique des propositions $(\neg, \wedge, \vee, \ldots)$
  - Logique du premier ordre $(\forall, \exists, R, S, T, f, g, x, y, \ldots)$
- Étude de logiques non classiques
  - Quelques extensions de la logique classique

Démarche du cours

- Étude de la logique binaire dans la perspective de la **démonstration automatique**
  - Logique des propositions ($\neg, \wedge, \vee, \ldots$)
  - Logique du premier ordre ($\forall, \exists, R, S, T, f, g, x, y, \ldots$)
- Étude de logiques non classiques
  - Quelques extensions de la logique classique
    - logique(s) modale(s)

Démarche du cours

- Étude de la logique binaire dans la perspective de la **démonstration automatique**
  - Logique des propositions ($\neg, \wedge, \vee, \ldots$)
  - Logique du premier ordre ($\forall, \exists, R, S, T, f, g, x, y, \ldots$)
- Étude de logiques non classiques
  - Quelques extensions de la logique classique
    - logique(s) modale(s)
    - logique temporelle

Démarche du cours

- Étude de la logique binaire dans la perspective de la **démonstration automatique**
  - Logique des propositions $(\neg, \wedge, \vee, \ldots)$
  - Logique du premier ordre $(\forall, \exists, R, S, T, f, g, x, y, \ldots)$
- Étude de logiques non classiques
  - Quelques extensions de la logique classique
    - logique(s) modale(s)
    - logique temporelle
  - Quelques logiques rivales

Démarche du cours

- Étude de la logique binaire dans la perspective de la **démonstration automatique**
  - Logique des propositions $(\neg, \wedge, \vee, \ldots)$
  - Logique du premier ordre $(\forall, \exists, R, S, T, f, g, x, y, \ldots)$
- Étude de logiques non classiques
  - Quelques extensions de la logique classique
    - logique(s) modale(s)
    - logique temporelle
  - Quelques logiques rivales
    - logique(s) multivalente(s) (vrai, faux, indéterminé)

Démarche du cours

- Étude de la logique binaire dans la perspective de la **démonstration automatique**
  - Logique des propositions ($\neg, \wedge, \vee, \ldots$)
  - Logique du premier ordre ($\forall, \exists, R, S, T, f, g, x, y, \ldots$)
- Étude de logiques non classiques
  - Quelques extensions de la logique classique
    - logique(s) modale(s)
    - logique temporelle
  - Quelques logiques rivales
    - logique(s) multivalente(s) (vrai, faux, indéterminé)
    - logique floue

Plan

Notion de proposition

Définition

Une **proposition** *est un énoncé du langage ordinaire considéré du point de vue formel. Cet énoncé est soit* **vrai** *soit* **faux** *mais pas les deux.*

Notion de proposition

Définition

Une **proposition** *est un énoncé du langage ordinaire considéré du point de vue formel. Cet énoncé est soit* **vrai** *soit* **faux** *mais pas les deux.*

Exemple

« Le chat du voisin est mort » est une proposition

Notion de valeur de vérité

Valeur de vérité

Proposition **vraie** si adéquation entre proposition et faits du monde réel, **fausse** sinon

Notion de valeur de vérité

Valeur de vérité

Proposition **vraie** si adéquation entre proposition et faits du monde réel, **fausse** sinon

Exemples

- Le chat du voisin est mort
- Jean consulte ses sources, en fait une synthèse et passe à la phase d'écriture

Étude du calcul propositionnel

Quatre étapes

1. Comment écrire les formules ?
   aspects syntaxiques
2. Comment déterminer la valeur de vérité d'une formule ?
   aspects sémantiques
3. Existe-t-il un lien entre logique et mathématique ?
   aspects algébriques
4. Comment démontrer (automatiquement) de nouveaux résultats ?
   aspects déductifs

Plan

Les données

Variables propositionnelles

$$P = \{p, q, r, \ldots\}$$

Il s'agit d'**énoncés élémentaires**

Connecteurs logiques

$$C = \{ \quad \neg, \quad \wedge, \quad \vee, \quad \rightarrow, \quad \leftrightarrow \}$$

$\mathcal{F}$ l'ensemble des formules du calcul propositionnel

Définition (récursive)

Toute formule $F \in \mathcal{F}$ est de l'une des formes suivantes

1. $F = p$ *avec* $p \in P$, F *est alors dite formule élémentaire ;*
2. $F = \neg(H)$ *avec* $H \in \mathcal{F}$ *;*
3. $F = (H)\Box(F)$ *avec* $\Box \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ *et* $(H, K) \in \mathcal{F}^2$.

$\mathcal{F}$ l'ensemble des formules du calcul propositionnel

Définition (récursive)

Toute formule $F \in \mathcal{F}$ est de l'une des formes suivantes

1. $F = p$ *avec* $p \in P$, F *est alors dite formule élémentaire ;*
2. $F = \neg(H)$ *avec* $H \in \mathcal{F}$ *;*
3. $F = (H)\Box(F)$ *avec* $\Box \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ *et* $(H, K) \in \mathcal{F}^2$*.*

Exemples

$$(p) \wedge (q) \qquad (p) \rightarrow ((p) \rightarrow (q))$$

$\mathcal{F}$ l'ensemble des formules du calcul propositionnel

Définition (récursive)

Toute formule $F \in \mathcal{F}$ est de l'une des formes suivantes

1. $F = p$ *avec* $p \in P$, F *est alors dite formule élémentaire ;*
2. $F = \neg(H)$ *avec* $H \in \mathcal{F}$ *;*
3. $F = (H)\Box(F)$ *avec* $\Box \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ *et* $(H, K) \in \mathcal{F}^2$.

Exemples

$$(p) \wedge (q) \qquad (p) \rightarrow ((p) \rightarrow (q))$$

Contre-exemples

$$p \wedge q \qquad (p)(q)\wedge$$

Règles d'élimination des parenthèses

1. Supprimer les parenthèses entourant les variables
2. Tenir compte de la priorité des connecteurs
   ordre standard : $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
3. Considérer qu'un opérateur unaire l'« emporte » toujours sur un opérateur binaire

Règles d'élimination des parenthèses

1. Supprimer les parenthèses entourant les variables
2. Tenir compte de la priorité des connecteurs
   ordre standard : $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
3. Considérer qu'un opérateur unaire l'« emporte » toujours sur un opérateur binaire

Exemples

- $(\neg(p)) \wedge (q)$ devient $\neg p \wedge q$
- $((\neg(p)) \wedge (q)) \rightarrow (r)$ devient $\neg p \wedge q \rightarrow r$
- Par contre, $(\neg(p)) \wedge ((q) \rightarrow (r))$ devient $\neg p \wedge (q \rightarrow r)$

Caractérisation par une grammaire syntaxique de Chomsky

Définition (Grammaire générative de type 2)

$$G = \{V_N, \quad V_T, \quad S, \quad R\}$$

- *V_N désigne le vocabulaire non terminal*
- *V_T désigne le vocabulaire terminal.*
- *S un symbole de départ ;*
- *R est l'ensemble des règles de la grammaire.*

G_{CP} : une grammaire de Chomsky pour le calcul propositionnel

Définition de G_{CP}

- $V_N = \{S\}$
- $V_T = \{(,)\} \cup P \cup C$
- $R = R_N \cup R_T$ avec $R_N = \{r_\square | \square \in C\}$ où :

$$\begin{cases} & r_\neg = (S, \neg(S)) \\ \forall \square \in C \setminus \{\neg\} & r_\square = (S, (S)\square(S)) \end{cases}$$

et $R_T = \{r_p | p \in P\}$ avec $r_p = (S, p)$.

G_{CP} : une grammaire de Chomsky pour le calcul propositionnel

Définition de G_{CP}

- $V_N = \{S\}$
- $V_T = \{(,)\} \cup P \cup C$
- $R = R_N \cup R_T$ avec $R_N = \{r_\Box | \Box \in C\}$ où :

$$\begin{cases} & r_\neg & = & (S, \neg(S)) \\ \forall \Box \in C \setminus \{\neg\} & r_\Box & = & (S, (S)\Box(S)) \end{cases}$$

et $R_T = \{r_p | p \in P\}$ avec $r_p = (S, p)$.

NB : (S, A) se lit « je remplace S par A »

Caractérisation de mots

Définition (Mots)

Un **mot** *pour un ensemble donné E est une juxtaposition d'éléments de cet ensemble*
Il s'agit donc d'un élément de E^*

Caractérisation de mots

Définition (Mots)

Un **mot** *pour un ensemble donné E est une juxtaposition d'éléments de cet ensemble*
Il s'agit donc d'un élément de E^*

Exemples de mots sur V_T

$$pq\wedge \qquad (p))q \qquad (p)\wedge(q)$$

Caractérisation de mots

Définition (Mots correctes)

On dit qu'un mot est **correct** *ou encore qu'il appartient au langage généré par une grammaire G* **si et seulement si**

- *c'est un* **mot** *sur V_T*
- *il « dérive » de S par l'application d'un nombre fini de règles*

Caractérisation de mots

Définition (Mots correctes)

On dit qu'un mot est **correct** *ou encore qu'il appartient au langage généré par une grammaire G* **si et seulement si**

- *c'est un* **mot** *sur V_T*
- *il « dérive » de S par l'application d'un nombre fini de règles*

Exemple

$(p) \wedge (q)$ est correct dans G_{CP}
Il dérive de S par l'application successive des règles : $r_\wedge$, r_p et r_q.
On note :

$$S \xrightarrow{r_\wedge} (S) \wedge (S) \xrightarrow{r_p} (p) \wedge (S) \xrightarrow{r_q} (p) \wedge (q)$$

Exercice

Montrer que $((p) \wedge (q)) \longrightarrow (r)$ est correct pour G_{CP}.

Exercice

Montrer que $((p) \wedge (q)) \rightarrow (r)$ est correct pour G_{CP}.

Correction

Il s'agit bien d'un mot sur V_T et ce mot dérive de S par l'application successive de $r_{\rightarrow}$, $r_{\wedge}$, r_p, r_q, r_r.

Définition (Langage engendré par une grammaire)

L'ensemble des mots corrects dans une grammaire G est appelé **langage** *engendré par G. Il est noté $\mathcal{L}(G)$.*

Définition (Langage engendré par une grammaire)

L'ensemble des mots corrects dans une grammaire G est appelé **langage** *engendré par G. Il est noté $\mathcal{L}(G)$.*

NB : par définition, $\mathcal{F} = \mathcal{L}(G_{CP})$.

Backus-Naur-Form : une autre façon d'écrire les règles

$$G_{CP} = \{V_N,\quad V_T,\quad \texttt{<proposition>},\quad R\}$$

- $V_N = \{$ <proposition>, <implication>, <terme>, <facteur>, <proposition secondaire>, <proposition primaire>$\}$
- R est donné sous la forme BNF suivante :

```
<prop.>         ::=  <impl.> | <prop.> ↔ <impl.>
<impl.>         ::=  <terme> | <implication> → <terme>
<terme>         ::=  <fact.> | <terme> ∨ <fact.>
<fact.>         ::=  <prop. sec.> | <fact.> ∧ <prop. sec.>
<prop. sec.>    ::=  <prop. prim.> | ¬ <prop. prim.>
<prop. prim.>   ::=  (<prop.>) | p (avec p ∈ P)
```

NB : `S ::= A | B` équivaut à (S, A) et (S, B)

Exercice

Comment dérive-t-on $p \wedge (q \rightarrow r)$?

Exercice

Comment dérive-t-on $p \wedge (q \rightarrow r)$?

Correction

$$
\begin{array}{lcl}
\texttt{<prop>} & \Longrightarrow & \texttt{<implic.>} \\
 & \Longrightarrow & \texttt{<terme>} \\
 & \Longrightarrow & \texttt{<facteur>} \\
 & \Longrightarrow & \texttt{<facteur>} \wedge \texttt{<prop. sec.>} \\
 & \Longrightarrow & \texttt{<prop. sec.>} \wedge \texttt{<prop. sec.>} \\
 & \Longrightarrow & \texttt{<prop. prim.>} \wedge \texttt{<prop. sec.>} \\
 & \Longrightarrow & p \wedge \texttt{<prop. sec.>} \\
 & \Longrightarrow & p \wedge \texttt{<prop. prim.>} \\
 & \Longrightarrow & p \wedge (\texttt{<prop.>}) \\
 & \Longrightarrow & \vdots \\
 & \Longrightarrow & p \wedge (q \rightarrow r)
\end{array}
$$

Suppression complète des parenthèses : notations *polonaises* (ou de Łukasiewicz)

Définition (Notation post-fixée)

$$G'_{CP} = \{ \quad \{S\}, \quad V'_T, \quad S, \quad R'_N \cup R_T \quad \}$$

- $V'_T = P \cup C$;
- S *est le symbole de départ ;*
- $R'_N = \{r'_\square | \square \in C\}$ *où :*

$$\begin{cases} & r'_\neg = (S, S\neg) \\ \forall \square \in C \setminus \{\neg\} & r'_\square = (S, SS\square) \end{cases}$$

Suppression complète des parenthèses : notations *polonaises* (ou de Łukasiewicz)

Définition (Notation post-fixée)

$$G'_{CP} = \{ \quad \{S\}, \quad V'_T, \quad S, \quad R'_N \cup R_T \quad \}$$

- $V'_T = P \cup C$;
- S *est le symbole de départ ;*
- $R'_N = \{r'_\square | \square \in C\}$ *où :*

$$\begin{cases} & r'_\neg & = & (S, S\neg) \\ \forall \square \in C \setminus \{\neg\} & r'_\square & = & (S, SS\square) \end{cases}$$

NB : on note $\mathcal{F}' = \mathcal{L}(G'_{CP})$

Notation postfixée

Exemple

$1 + 2$ en notation **infixée** s'écrit $1 \cdot 2 \cdot +$ en notation **postfixée**

Notation postfixée

Exemple

$1 + 2$ en notation **infixée** s'écrit $1 \cdot 2 \cdot +$ en notation **postfixée**

Exercice

Comment s'écrit la formule de $\mathcal{L}(G_{CP})$ $\neg(p \wedge q \rightarrow r)$ dans $\mathcal{L}(G'_{CP})$?

Notation postfixée

Exemple

$1+2$ en notation **infixée** s'écrit $1 \cdot 2 \cdot +$ en notation **postfixée**

Exercice

Comment s'écrit la formule de $\mathcal{L}(G_{CP})$ $\neg(p \wedge q \rightarrow r)$ dans $\mathcal{L}(G'_{CP})$?

Correction

$$pq \wedge r \rightarrow \neg$$

Définition (Notation préfixée)

$$G''_{CP} = \{ \quad \{S\}, \quad V'_T, \quad S, \quad R''_N \cup R_T \quad \}$$

- *S est le symbole de départ ;*
- $R''_N = \{r''_\Box | \Box \in C\}$ *où :*

$$\begin{cases} & r''_\neg & = & (S, \neg S) \\ \forall \Box \in C \setminus \{\neg\} & r''_\Box & = & (S, \Box SS) \end{cases}$$

Définition (Notation préfixée)

$$G''_{CP} = \{ \quad \{S\}, \quad V'_T, \quad S, \quad R''_N \cup R_T \quad \}$$

- *S est le symbole de départ ;*
- $R''_N = \{r''_\Box | \Box \in C\}$ *où :*

$$\left\{ \begin{array}{rrcl} & r''_\neg & = & (S, \neg S) \\ \forall \Box \in C \setminus \{\neg\} & r''_\Box & = & (S, \Box SS) \end{array} \right.$$

NB : on note $\mathcal{F}'' = \mathcal{L}(G''_{CP})$

Notation préfixée

Exemple

$1 + 2$ en notation **infixée** s'écrit $+ \cdot 1 \cdot 2$ en notation **préfixée**

Notation préfixée

Exemple

$1 + 2$ en notation **infixée** s'écrit $+ \cdot 1 \cdot 2$ en notation **préfixée**

Exercice

Comment s'écrit la formule de $\mathcal{L}(G_{CP})$ $\neg(p \wedge q \rightarrow r)$ dans $\mathcal{L}(G''_{CP})$?

Notation préfixée

Exemple

$1+2$ en notation **infixée** s'écrit $+\cdot 1 \cdot 2$ en notation **préfixée**

Exercice

Comment s'écrit la formule de $\mathcal{L}(G_{CP})$ $\neg(p \wedge q \rightarrow r)$ dans $\mathcal{L}(G''_{CP})$?

Correction

$$\neg \rightarrow \wedge pqr$$

D'une notation à l'autre

Soit $f' : R_T \cup R_N \longrightarrow R_T \cup R'_N$

$$f'(r) = \begin{cases} r & \text{si } r \in R_T \\ r'_{\square} & \text{si } \square \in C \text{ et } r = r_{\square} \end{cases}$$

De $\mathcal{L}(G_{CP})$ à $\mathcal{L}(G'_{CP})$

Si $S \overset{\widehat{r}}{\Longrightarrow} F \in \mathcal{L}(G_{CP})$ alors $S \overset{f'(\widehat{r})}{\Longrightarrow} F' \in \mathcal{L}(G'_{CP})$

- $\widehat{r}$ est une séquence $r_1, \ldots, r_n$ d'éléments de $R_T \cup R_N$
- $f'(\widehat{r})$ est définie comme la séquence de règles de $R_T \cup R'_N$: $f'(r_1), \ldots, f'(r_n)$

Exemple

Soit $F = \neg(p \wedge q \rightarrow r)$ formule de $\mathcal{F}$.

$$S \overset{\widehat{r}}{\Longrightarrow} F$$

On a $\widehat{r} = r_{\neg}, r_{\rightarrow}, r_{\wedge}, r_p, r_q, r_r$
On a $f'(\widehat{r}) = r'_{\neg}, r'_{\rightarrow}, r'_{\wedge}, r_p, r_q, r_r$
On obtient directement $F' = pq \wedge r \rightarrow \neg$.

Exemple

Soit $F = \neg(p \wedge q \rightarrow r)$ formule de $\mathcal{F}$.

$$S \overset{\widehat{r}}{\Longrightarrow} F$$

On a $\widehat{r} = r_{\neg}, r_{\rightarrow}, r_{\wedge}, r_p, r_q, r_r$
On a $f'(\widehat{r}) = r'_{\neg}, r'_{\rightarrow}, r'_{\wedge}, r_p, r_q, r_r$
On obtient directement $F' = pq \wedge r \rightarrow \neg$.

NB : on définit de la même façon les traductions entre les différents langages décrivant les formules du calcul propositionnel

Quelques instants de réflexion

Exercice

Comment s'écrit la formule de $\mathcal{L}(G_{CP})$ $\neg(p \wedge q \rightarrow r)$ dans $\mathcal{L}(G''_{CP})$?

Quelques instants de réflexion

Exercice

Comment s'écrit la formule de $\mathcal{L}(G_{CP})$ $\neg(p \wedge q \to r)$ dans $\mathcal{L}(G''_{CP})$?

Correction

On a $S \overset{r_\neg, r_\to, r_\wedge}{\Longrightarrow} F$. Donc, on a $S \overset{r''_\neg, r''_\to, r''_\wedge}{\Longrightarrow} F''$. Ce qui donne $F'' = \neg \to \wedge pqr$.

Quelques instants de réflexion

Exercice

Résoudre les exercices 8 et 9 du poly

Plan

Valeurs de vérité

Définition (Logique binaire)

- **vrai** *(noté* $\blacksquare$ *ou* 1*)*
- **faux** *(noté* $\square$ *ou* 0*)*

Définition (Opérateur)

À chaque connecteur c *de* C*, on associe un* **opérateur** $\underline{c}$.

L'opérateur $\underline{\neg}$

À $\neg$ est associé l'opérateur unaire $\underline{\neg}$ de $\{\square, \blacksquare\}$ dans $\{\square, \blacksquare\}$:

- $\underline{\neg}(\square) = \blacksquare$
- $\underline{\neg}(\blacksquare) = \square$

Opérateurs binaires usuels

conjonction

$\wedge$	□	■
□	□	□
■	□	■

Opérateurs binaires usuels

conjonction

$\underline{\wedge}$	□	■
□	□	□
■	□	■

disjonction

$\underline{\vee}$	□	■
□	□	■
■	■	■

Opérateurs binaires usuels

conjonction

$\wedge$	□	■
□	□	□
■	□	■

implication

$\rightarrow$	□	■
□	■	■
■	□	■

disjonction

$\vee$	□	■
□	□	■
■	■	■

Opérateurs binaires usuels

implication

$\rightarrow$	□	■
□	■	■
■	□	■

Exercice

Le procureur général : « si l'accusé est coupable, il a un complice »
L'avocat : « c'est faux ! ».
Que penser de l'avocat ?

Opérateurs binaires usuels

conjonction

$\wedge$	□	■
□	□	□
■	□	■

implication

$\rightarrow$	□	■
□	■	■
■	□	■

disjonction

$\vee$	□	■
□	□	■
■	■	■

équivalence

$\leftrightarrow$	□	■
□	■	□
■	□	■

Notion d'interprétation

Définition (Interprétation)

À chaque variable propositionnelle p on associe une **interprétation** *ou valeur de vérité*

$$\delta : P \longrightarrow \{\square, \blacksquare\}$$

Définition (Extension aux formules)

On prolonge δ (on note $\underline{\delta}$) à l'ensemble des formules

- $\underline{\delta}(p) = \delta(p)$ *avec* $p \in P$;
- $\underline{\delta}(\neg F) = \underline{\neg}(\underline{\delta}(F))$ *avec* $F \in \mathcal{F}$;
- $\underline{\delta}(F \triangle G) = \underline{\delta}(F)\underline{\triangle}\underline{\delta}(G)$ *avec* $\triangle \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ *et* $(F, G) \in \mathcal{F}^2$.

Tables de vérités

Définition (Table de vérité)

C'est un tableau dont les lignes sont les interprétations possibles

Tables de vérités

Définition (Table de vérité)

C'est un tableau dont les lignes sont les interprétations possibles

Tables de vérités des opérateurs binaires usuels

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
□	□	□	□	■	■
□	■	□	■	■	□
■	□	□	■	□	□
■	■	■	■	■	■

Exemple

On considère : $(\neg p \rightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow r)$

p	q	r	$\neg p$	$\neg p \rightarrow q$	$q \leftrightarrow r$	$(\neg p \rightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow r)$
□	□	□				
□	□	■				
□	■	□				
□	■	■				
■	□	□				
■	□	■				
■	■	□				
■	■	■				

Exemple

On considère : $(\neg p \rightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow r)$

p	q	r	$\neg p$	$\neg p \rightarrow q$	$q \leftrightarrow r$	$(\neg p \rightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow r)$
□	□	□	■			
□	□	■	■			
□	■	□	■			
□	■	■	■			
■	□	□	□			
■	□	■	□			
■	■	□	□			
■	■	■	□			

Exemple

On considère : $(\neg p \rightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow r)$

p	q	r	$\neg p$	$\neg p \rightarrow q$	$q \leftrightarrow r$	$(\neg p \rightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow r)$
□	□	□	■	□		
□	□	■	■	□		
□	■	□	■	■		
□	■	■	■	■		
■	□	□	□	■		
■	□	■	□	■		
■	■	□	□	■		
■	■	■	□	■		

Exemple

On considère : $(\neg p \rightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow r)$

p	q	r	$\neg p$	$\neg p \rightarrow q$	$q \leftrightarrow r$	$(\neg p \rightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow r)$
□	□	□	■	□	■	
□	□	■	■	□	□	
□	■	□	■	■	□	
□	■	■	■	■	■	
■	□	□	□	■	■	
■	□	■	□	■	□	
■	■	□	□	■	□	
■	■	■	□	■	■	

Exemple

On considère : $(\neg p \rightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow r)$

p	q	r	$\neg p$	$\neg p \rightarrow q$	$q \leftrightarrow r$	$(\neg p \rightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow r)$
□	□	□	■	□	■	□
□	□	■	■	□	□	□
□	■	□	■	■	□	□
□	■	■	■	■	■	■
■	□	□	□	■	■	■
■	□	■	□	■	□	□
■	■	□	□	■	□	□
■	■	■	□	■	■	■

Formules particulières

Définition (Formule satisfiable)

Une formule est **satisfiable** *si et seulement si :*

$$\exists\delta \quad \delta(F) = \blacksquare$$

Formules particulières

Définition (Formule satisfiable)

Une formule est **satisfiable** *si et seulement si :*

$$\exists \delta \quad \delta(F) = \blacksquare$$

NB : on dit aussi que F est consistante.

Formules particulières

Définition (Formule satisfiable)

Une formule est **satisfiable** *si et seulement si :*

$$\exists \delta \quad \delta(F) = \blacksquare$$

NB : on dit aussi que F est consistante.

Exemple

$F = (\neg p \rightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow r)$ est satisfiable pour $\delta(p) = \square$ et $\delta(q) = \delta(r) = \blacksquare$.

Formules particulières

Définition (Antilogie)

Une formule F est une **antilogie** *si et seulement si :*

$$\forall \delta \quad \delta(F) = \square$$

Formules particulières

Définition (Antilogie)

Une formule F est une **antilogie** *si et seulement si :*

$$\forall\delta \quad \delta(F) = \square$$

NB : on dit aussi que F est inconsistante, contradictoire, ou encore insatisfiable.

Formules particulières

Définition (Antilogie)

Une formule F est une **antilogie** *si et seulement si :*

$$\forall\delta \quad \delta(F) = \square$$

NB : on dit aussi que F est inconsistante, contradictoire, ou encore insatisfiable.

Exemple

$p \wedge \neg p$ est une antilogie.

p	$\neg p$	$p \wedge \neg p$
$\square$	$\blacksquare$	$\square$
$\blacksquare$	$\square$	$\square$

Formules particulières

Définition (Tautologies)

Une formule F est une **tautologie** *si et seulement si :*

$$\forall \delta \quad \delta(F) = \blacksquare$$

On note $\vdash F$
On note $\mathcal{T}$ *l'ensemble des tautologies. On a :* $\mathcal{T} \subset \mathcal{F} \subset V_T^*$.

Formules particulières

Définition (Tautologies)

Une formule F est une **tautologie** *si et seulement si :*

$$\forall \delta \quad \delta(F) = \blacksquare$$

On note $\vdash F$
On note $\mathcal{T}$ l'ensemble des tautologies. On a : $\mathcal{T} \subset \mathcal{F} \subset V_T^*$.

Exemple

$p \vee \neg p$ est une tautologie.

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$
$\square$	$\blacksquare$	$\blacksquare$
$\blacksquare$	$\square$	$\blacksquare$

Définition (Formules tautologiquement équivalentes)

Deux formules F et G sont **tautologiquement équivalentes** *si et seulement si :*

$$\forall \delta, \delta(F) = \delta(G) \quad \text{ou encore} \quad \forall \delta, \delta(F \leftrightarrow G) = \blacksquare$$

On note $\vdash F \leftrightarrow G$

Définition (Formules tautologiquement équivalentes)

Deux formules F et G sont **tautologiquement équivalentes** *si et seulement si :*

$$\forall\delta, \delta(F) = \delta(G) \quad \text{ou encore} \quad \forall\delta, \delta(F \leftrightarrow G) = \blacksquare$$

On note $\vdash F \leftrightarrow G$

Exemple

$p \rightarrow q$ et $\neg p \vee q$ sont tautologiquement équivalentes. On peut donc écrire : $\vdash (p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$.

p	$\neg p$	q	$p \rightarrow q$	$\neg p \vee q$
□	■	□	■	■
□	■	■	■	■
■	□	□	□	□
■	□	■	■	■

Équivalences tautologiques bien connues

double implication

$$\vdash (F \leftrightarrow G) \leftrightarrow ((F \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow F))$$

Équivalences tautologiques bien connues

double implication

$$\vdash (F \leftrightarrow G) \leftrightarrow ((F \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow F))$$

lien implication – disjonction

$$\vdash (F \rightarrow G) \leftrightarrow (\neg F \vee G)$$

Équivalences tautologiques bien connues

double implication

$$\vdash (F \leftrightarrow G) \leftrightarrow ((F \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow F))$$

lien implication – disjonction

$$\vdash (F \rightarrow G) \leftrightarrow (\neg F \vee G)$$

commutativité

$$\vdash (F \vee G) \leftrightarrow (G \vee F) \qquad \vdash (F \wedge G) \leftrightarrow (G \wedge F)$$

Équivalences tautologiques bien connues

associativité

$$\vdash (F \vee (G \vee H)) \leftrightarrow ((F \vee G) \vee H)$$

$$\vdash (F \wedge (G \wedge H)) \leftrightarrow ((F \wedge G) \wedge H)$$

Équivalences tautologiques bien connues

associativité

$$\vdash (F \vee (G \vee H)) \leftrightarrow ((F \vee G) \vee H)$$

$$\vdash (F \wedge (G \wedge H)) \leftrightarrow ((F \wedge G) \wedge H)$$

distributivité

$$\vdash (F \vee (G \wedge H)) \leftrightarrow ((F \vee G) \wedge (F \vee H))$$

$$\vdash (F \wedge (G \vee H)) \leftrightarrow ((F \wedge G) \vee (F \wedge H))$$

Équivalences tautologiques bien connues

éléments neutres

$$\vdash (F \vee \square) \leftrightarrow F \qquad \vdash (F \wedge \blacksquare) \leftrightarrow F$$

Équivalences tautologiques bien connues

éléments neutres

$$\vdash (F \vee \square) \leftrightarrow F \qquad \vdash (F \wedge \blacksquare) \leftrightarrow F$$

éléments absorbants

$$\vdash (F \vee \blacksquare) \leftrightarrow \blacksquare \qquad \vdash (F \wedge \square) \leftrightarrow \square$$

Équivalences tautologiques bien connues

éléments neutres

$$\vdash (F \vee \square) \leftrightarrow F \qquad \vdash (F \wedge \blacksquare) \leftrightarrow F$$

éléments absorbants

$$\vdash (F \vee \blacksquare) \leftrightarrow \blacksquare \qquad \vdash (F \wedge \square) \leftrightarrow \square$$

tiers exclu et non-contradiction

$$\vdash (F \vee \neg F) \leftrightarrow \blacksquare \qquad \vdash (F \wedge \neg F) \leftrightarrow \square$$

Équivalences tautologiques bien connues

double négation

$$\vdash \neg(\neg F) \leftrightarrow F$$

Équivalences tautologiques bien connues

double négation

$$\vdash \neg(\neg F) \leftrightarrow F$$

lois de de Morgan

$$\vdash \neg(F \vee G) \leftrightarrow (\neg F \wedge \neg G)$$

$$\vdash \neg(F \wedge G) \leftrightarrow (\neg F \vee \neg G)$$

Équivalences tautologiques bien connues

double négation

$$\vdash \neg(\neg F) \leftrightarrow F$$

lois de de Morgan

$$\vdash \neg(F \vee G) \leftrightarrow (\neg F \wedge \neg G)$$

$$\vdash \neg(F \wedge G) \leftrightarrow (\neg F \vee \neg G)$$

simplification

$$\vdash (F \to (G \to H)) \leftrightarrow ((F \wedge G) \to H)$$

Morphisme de susbtitution

Définition (Morphisme de substitution)

$$\begin{aligned} f : \quad V_T^* &\to V_T^* \\ x &\mapsto \begin{cases} x & \text{si } x \in V_T^* \setminus P \\ y \in \mathcal{F} & \text{si } x \in P \end{cases} \end{aligned}$$

Morphisme de susbtitution

Définition (Morphisme de substitution)

$$
\begin{array}{rccl}
f : & V_T^* & \longrightarrow & V_T^* \\
 & x & \longmapsto & \begin{cases} x & \text{si } x \in V_T^* \setminus P \\ y \in \mathcal{F} & \text{si } x \in P \end{cases}
\end{array}
$$

NB : un morphisme de substitution permet de remplacer chaque variable par une formule.

Morphisme de susbtitution

Définition (Morphisme de substitution)

$$
\begin{array}{rrcl}
f : & V_T^* & \longrightarrow & V_T^* \\
& x & \longmapsto & \begin{cases} x & \text{si } x \in V_T^* \setminus P \\ y \in \mathcal{F} & \text{si } x \in P \end{cases}
\end{array}
$$

NB : un morphisme de substitution permet de remplacer chaque variable par une formule.

Exemple

si $f(p) = (p \rightarrow q)$ et $f(q) = r$
alors

$$f(p \wedge q) \quad = \quad f(p)f(\wedge)f(q) \quad = \quad (p \rightarrow q) \wedge r$$

Morphisme de susbtitution et valeur de vérité

Théorème

Soit $\delta \in \{\square, \blacksquare\}^P$*. Considérons* $\delta' \in \{\square, \blacksquare\}^P$ *défini par :*
$\forall p \in P, \delta'(p) = \underline{\delta}(f(p))$ *alors :*

$$\underline{\delta'} = \underline{\delta} \circ f$$

Morphisme de susbtitution et valeur de vérité

Théorème

Soit $\delta \in \{\square, \blacksquare\}^P$. *Considérons* $\delta' \in \{\square, \blacksquare\}^P$ *défini par :*
$\forall p \in P, \delta'(p) = \underline{\delta}(f(p))$ *alors :*

$$\underline{\delta'} = \underline{\delta} \circ f$$

Corollaire

L'ensemble des tautologies $\mathcal{T}$ *est stable pour tout morphisme de substitution*

Morphisme de susbtitution et valeur de vérité

Théorème

Soit $\delta \in \{\square, \blacksquare\}^P$. *Considérons* $\delta' \in \{\square, \blacksquare\}^P$ *défini par :*
$\forall p \in P, \delta'(p) = \underline{\delta}(f(p))$ *alors :*

$$\underline{\delta'} = \underline{\delta} \circ f$$

Corollaire

L'ensemble des tautologies $\mathcal{T}$ *est stable pour tout morphisme de substitution*

Corollaire

Dans tout formule F, *on peut remplacer toute sous-formule par une formule équivalente*

Fonctions booléennes

Définition (Fonctions booléennes)

- *Une* **fonction booléenne** n**-aire** *est une application de* $\{\square, \blacksquare\}^n$ *dans* $\{\square, \blacksquare\}$.
- *On note* $\mathcal{B}$ *l'ensemble des fonctions booléennes :*

$$\mathcal{B} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^+} \{\square, \blacksquare\}^{\{\square, \blacksquare\}^n}$$

Fonctions booléennes

Définition (Fonctions booléennes)

- *Une* **fonction booléenne** *n***-aire** *est une application de* $\{\square, \blacksquare\}^n$ *dans* $\{\square, \blacksquare\}$.
- *On note* $\mathcal{B}$ *l'ensemble des fonctions booléennes :*

$$\mathcal{B} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^+} \{\square, \blacksquare\}^{\{\square, \blacksquare\}^n}$$

Exercice

Combient y a-t-il de fonction booléennes à 9 variables ?

Fonctions booléennes

Définition (Fonctions booléennes)

- *Une* **fonction booléenne** n-**aire** *est une application de* $\{\square, \blacksquare\}^n$ *dans* $\{\square, \blacksquare\}$.
- *On note* $\mathcal{B}$ *l'ensemble des fonctions booléennes :*

$$\mathcal{B} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^+} \{\square, \blacksquare\}^{\{\square, \blacksquare\}^n}$$

Exercice

Combient y a-t-il de fonction booléennes à 9 variables ?

Correction

$$2^{2^9}$$

Formules et fonctions booléennes

- Une formule est notée $F(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ si les seules variables propositionnelles ayant des occurences dans F sont prises dans $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$, c'est-à-dire :

$$F \in (\{p_1, p_2, \ldots, p_n\} \cup C \cup \{(,)\})^*$$

- À toute formule F telle que l'on ait $F(p_1, p_2, \ldots, p_n)$, on associe la fonction booléenne n-aire $\underline{F}$ telle que pour $\delta \in \{\square, \blacksquare\}^P$ vérifiant $\forall i \in]n], \delta(p_i) = x_i$, on ait :

$$\forall (x_1, \ldots x_n) \in \{\square, \blacksquare\}^n, \underline{F}(x_1, \ldots, x_n) = \underline{\delta}(F)$$

On dit alors que F est représentée par $\underline{F}$. On a :

$$\vdash F \leftrightarrow G \quad \text{si et seulement si} \quad \underline{F} = \underline{G}$$

Théorème

Toute fonction booléenne peut être représentée par une formule

Théorème

Toute fonction booléenne peut être représentée par une formule

	φ_0	φ_1	φ_2	φ_3
□	□	□	■	■
■	□	■	□	■

Les 4 fonctions booléennes à une variable

Exercice

Déterminer les formules associées à chacune des fonctions booléennes à deux variables.

Exercice

Déterminer les formules associées à chacune des fonctions booléennes à deux variables.

Correction

Il y a $2^{2^2} = 16$ fonctions booléennes à 2 variables.

p	q	φ_0	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6	φ_7
□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
□	■	□	□	□	□	■	■	■	■
■	□	□	□	■	■	□	□	■	■
■	■	□	■	□	■	□	■	□	■

p	q	φ_8	φ_9	φ_{10}	φ_{11}	φ_{12}	φ_{13}	φ_{14}	φ_{15}
□	□	■	■	■	■	■	■	■	■
□	■	□	□	□	□	■	■	■	■
■	□	□	□	■	■	□	□	■	■
■	■	□	■	□	■	□	■	□	■

Les 16 fonctions booléennes à deux variables

Exercice

Déterminer les formules associées à chacune des fonctions booléennes à deux variables.

Correction

Il y a $2^{2^2} = 16$ fonctions booléennes à 2 variables.

p	q	φ_0	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6	φ_7
□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
□	■	□	□	□	□	■	■	■	■
■	□	□	□	■	■	□	□	■	■
■	■	□	■	□	■	□	■	□	■
					p		q		

p	q	φ_8	φ_9	φ_{10}	φ_{11}	φ_{12}	φ_{13}	φ_{14}	φ_{15}
□	□	■	■	■	■	■	■	■	■
□	■	□	□	□	□	■	■	■	■
■	□	□	□	■	■	□	□	■	■
■	■	□	■	□	■	□	■	□	■
				$\neg q$		$\neg p$			

Les 16 fonctions booléennes à deux variables

Exercice

Déterminer les formules associées à chacune des fonctions booléennes à deux variables.

Correction

Il y a $2^{2^2} = 16$ fonctions booléennes à 2 variables.

p	q	φ_0	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6	φ_7
□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
□	■	□	□	□	□	■	■	■	■
■	□	□	□	■	■	□	□	■	■
■	■	□	■	□	■	□	■	□	■
			$p \wedge q$		p		q		$p \vee q$

p	q	φ_8	φ_9	φ_{10}	φ_{11}	φ_{12}	φ_{13}	φ_{14}	φ_{15}
□	□	■	■	■	■	■	■	■	■
□	■	□	□	□	□	■	■	■	■
■	□	□	□	■	■	□	□	■	■
■	■	□	■	□	■	□	■	□	■
			$p \leftrightarrow q$	$\neg q$		$\neg p$	$p \rightarrow q$		

Les 16 fonctions booléennes à deux variables

Exercice

Déterminer les formules associées à chacune des fonctions booléennes à deux variables.

Correction

Il y a $2^{2^2} = 16$ fonctions booléennes à 2 variables.

p	q	φ_0	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6	φ_7
□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
□	■	□	□	□	□	■	■	■	■
■	□	□	□	■	■	□	□	■	■
■	■	□	■	□	■	□	■	□	■
		$p \wedge \neg p$	$p \wedge q$		p		q		$p \vee q$

p	q	φ_8	φ_9	φ_{10}	φ_{11}	φ_{12}	φ_{13}	φ_{14}	φ_{15}
□	□	■	■	■	■	■	■	■	■
□	■	□	□	□	□	■	■	■	■
■	□	□	□	■	■	□	□	■	■
■	■	□	■	□	■	□	■	□	■
			$p \leftrightarrow q$	$\neg q$		$\neg p$	$p \rightarrow q$		$p \vee \neg p$

Les 16 fonctions booléennes à deux variables

Exercice

Déterminer les formules associées à chacune des fonctions booléennes à deux variables.

Correction

Il y a $2^{2^2} = 16$ fonctions booléennes à 2 variables.

p	q	φ_0	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6	φ_7
□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
□	■	□	□	□	□	■	■	■	■
■	□	□	□	■	■	□	□	■	■
■	■	□	■	□	■	□	■	□	■
		$p \wedge \neg p$	$p \wedge q$		p		q		$p \vee q$

p	q	φ_8	φ_9	φ_{10}	φ_{11}	φ_{12}	φ_{13}	φ_{14}	φ_{15}
□	□	■	■	■	■	■	■	■	■
□	■	□	□	□	□	■	■	■	■
■	□	□	□	■	■	□	□	■	■
■	■	□	■	□	■	□	■	□	■
			$p \leftrightarrow q$	$\neg q$	$q \rightarrow p$	$\neg p$	$p \rightarrow q$		$p \vee \neg p$

Les 16 fonctions booléennes à deux variables

Exercice

Déterminer les formules associées à chacune des fonctions booléennes à deux variables.

Correction

Il y a $2^{2^2} = 16$ fonctions booléennes à 2 variables.

p	q	φ_0	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6	φ_7
□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
□	■	□	□	□	□	■	■	■	■
■	□	□	□	■	■	□	□	■	■
■	■	□	■	□	■	□	■	□	■
		$p \wedge \neg p$	$p \wedge q$	$p \wedge \neg q$	p	$q \wedge \neg p$	q		$p \vee q$

p	q	φ_8	φ_9	φ_{10}	φ_{11}	φ_{12}	φ_{13}	φ_{14}	φ_{15}
□	□	■	■	■	■	■	■	■	■
□	■	□	□	□	□	■	■	■	■
■	□	□	□	■	■	□	□	■	■
■	■	□	■	□	■	□	■	□	■
			$p \leftrightarrow q$	$\neg q$	$q \rightarrow p$	$\neg p$	$p \rightarrow q$		$p \vee \neg p$

Les 16 fonctions booléennes à deux variables

Exercice

Déterminer les formules associées à chacune des fonctions booléennes à deux variables.

Correction

Il y a $2^{2^2} = 16$ fonctions booléennes à 2 variables.

p	q	φ_0	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6	φ_7
□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
□	■	□	□	□	□	■	■	■	■
■	□	□	□	■	■	□	□	■	■
■	■	□	■	□	■	□	■	□	■
		$p \wedge \neg p$	$p \wedge q$	$p \wedge \neg q$	p	$q \wedge \neg p$	q		$p \vee q$

p	q	φ_8	φ_9	φ_{10}	φ_{11}	φ_{12}	φ_{13}	φ_{14}	φ_{15}
□	□	■	■	■	■	■	■	■	■
□	■	□	□	□	□	■	■	■	■
■	□	□	□	■	■	□	□	■	■
■	■	□	■	□	■	□	■	□	■
		$\neg(p \vee q)$	$p \leftrightarrow q$	$\neg q$	$q \rightarrow p$	$\neg p$	$p \rightarrow q$	$\neg(p \wedge q)$	$p \vee \neg p$

Les 16 fonctions booléennes à deux variables

Exercice

Déterminer les formules associées à chacune des fonctions booléennes à deux variables.

Correction

Il y a $2^{2^2} = 16$ fonctions booléennes à 2 variables.

p	q	φ_0	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6	φ_7
□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
□	■	□	□	□	□	■	■	■	■
■	□	□	□	■	■	□	□	■	■
■	■	□	■	□	■	□	■	□	■
		$p \wedge \neg p$	$p \wedge q$	$p \wedge \neg q$	p	$q \wedge \neg p$	q	p xor q	$p \vee q$

p	q	φ_8	φ_9	φ_{10}	φ_{11}	φ_{12}	φ_{13}	φ_{14}	φ_{15}
□	□	■	■	■	■	■	■	■	■
□	■	□	□	□	□	■	■	■	■
■	□	□	□	■	■	□	□	■	■
■	■	□	■	□	■	□	■	□	■
		$\neg(p \vee q)$	$p \leftrightarrow q$	$\neg q$	$q \rightarrow p$	$\neg p$	$p \rightarrow q$	$\neg(p \wedge q)$	$p \vee \neg p$

Les 16 fonctions booléennes à deux variables

Réduction de formules

Problème

multiplication des connecteurs = écriture alourdie

Réduction de formules

Problème

multiplication des connecteurs = écriture alourdie

1. limiter le nombre de connecteurs utilisés
2. normaliser l'« allure » des formules manipulées

Systèmes complets de connecteurs

Définition (Système complet de connecteurs)

Un ensemble S de symboles de connecteurs est dit **système complet de connecteurs** *si et seulement si*

$$\forall F \in \mathcal{F}, \quad \exists H \in \mathcal{F} \cap (P \cup S \cup \{(,)\})^*, \quad \vdash F \leftrightarrow H$$

Systèmes complets de connecteurs

Définition (Système complet de connecteurs)

Un ensemble S de symboles de connecteurs est dit **système complet de connecteurs** *si et seulement si*

$$\forall F \in \mathcal{F}, \quad \exists H \in \mathcal{F} \cap (P \cup S \cup \{(,)\})^*, \quad \vdash F \leftrightarrow H$$

Théorème

$\{\neg, \vee\}$ *est un système complet de connecteurs.*

Corollaire

Les systèmes suivants sont des systèmes complets de connecteurs :

$$\{\neg, \wedge\} \qquad \{\neg, \rightarrow\} \qquad \{\uparrow\} \qquad \{\downarrow\}$$

Corollaire

Les systèmes suivants sont des systèmes complets de connecteurs :

$$\{\neg, \wedge\} \qquad \{\neg, \rightarrow\} \qquad \{\uparrow\} \qquad \{\downarrow\}$$

- $\uparrow$ **se lit nand et est défini par** $p \uparrow q = \neg(p \wedge q)$

Corollaire

Les systèmes suivants sont des systèmes complets de connecteurs :

$$\{\neg, \wedge\} \qquad \{\neg, \rightarrow\} \qquad \{\uparrow\} \qquad \{\downarrow\}$$

- **$\uparrow$ se lit nand et est défini par $p \uparrow q = \neg(p \wedge q)$**
- **$\downarrow$ se lit nor et est défini par $p \downarrow q = \neg(p \vee q)$**

Corollaire

Les systèmes suivants sont des systèmes complets de connecteurs :

$$\{\neg, \wedge\} \qquad \{\neg, \rightarrow\} \qquad \{\uparrow\} \qquad \{\downarrow\}$$

- $\uparrow$ **se lit nand et est défini par** $p \uparrow q = \neg(p \wedge q)$
- $\downarrow$ **se lit nor et est défini par** $p \downarrow q = \neg(p \vee q)$

Exercice

Écrire la formule $p \wedge q \rightarrow r$ dans le système $\{\neg, \vee\}$ puis dans le système $\{\downarrow\}$.

Corollaire

Les systèmes suivants sont des systèmes complets de connecteurs :

$$\{\neg, \wedge\} \qquad \{\neg, \rightarrow\} \qquad \{\uparrow\} \qquad \{\downarrow\}$$

- **$\uparrow$ se lit nand et est défini par $p \uparrow q = \neg(p \wedge q)$**
- **$\downarrow$ se lit nor et est défini par $p \downarrow q = \neg(p \vee q)$**

Exercice

Écrire la formule $p \wedge q \rightarrow r$ dans le système $\{\neg, \vee\}$ puis dans le système $\{\downarrow\}$.

Correction

- Dans $\{\neg, \vee\}$, $p \wedge q \rightarrow r$ s'écrit : $\neg p \vee \neg q \vee r$
- Dans $\{\downarrow\}$, $p \wedge q \rightarrow r$ s'écrit :
  $(((p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)) \downarrow ((p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)) \downarrow r) \downarrow$
  $(((p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)) \downarrow ((p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)) \downarrow r)$

Formes normales

Définition (Littéraux)

Les éléments de P sont appelés **littéraux positifs***. La négation d'un élément de P est un* **littéral négatif***.*

Formes normales

Définition (Littéraux)

Les éléments de P sont appelés **littéraux positifs**. *La négation d'un élément de P est un* **littéral négatif**.

Définition (Forme normale disjonctive)

Une formule F est sous **forme normale disjonctive** *si et seulement si*

$$F = \bigvee_{i \in]k]} H_i \quad \text{et} \quad \forall i \in]k], H_i \in (P \cup P_\neg \cup \{\wedge, (,)\})^+$$

Formes normales

Définition (Littéraux)

Les éléments de P sont appelés **littéraux positifs***. La négation d'un élément de P est un* **littéral négatif***.*

Définition (Forme normale disjonctive)

Une formule F est sous **forme normale disjonctive** *si et seulement si*

$$F = \bigvee_{i \in]k]} H_i \quad \text{et} \quad \forall i \in]k], H_i \in (P \cup P_\neg \cup \{\wedge, (,)\})^+$$

NB : si dans chaque H_i figurent toutes les variables ou leur négation, on parle de forme canonique

Forme normale disjonctive

Exemple

- $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ est une formule sous forme normale disjonctive non canonique.
- $(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r)$ est une formule sous forme normale disjonctive canonique.

Forme normale disjonctive

Exemple

- $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ est une formule sous forme normale disjonctive non canonique.
- $(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r)$ est une formule sous forme normale disjonctive canonique.

Exercice

Montrer que les deux formules de l'exemple précédent sont tautologiquement équivalentes.

Formes normales

Définition (Forme normale conjonctive)

Une formule F est sous **forme normale conjonctive** *si et seulement si*

$$F = \bigwedge_{i \in]k]} H_i \quad \text{et} \quad \forall i \in]k], H_i \in (P \cup P_\neg \cup \{\vee, (,)\})^+$$

Formes normales

Définition (Forme normale conjonctive)

Une formule F est sous **forme normale conjonctive** *si et seulement si*

$$F = \bigwedge_{i \in]k]} H_i \quad \text{et} \quad \forall i \in]k], H_i \in (P \cup P_\neg \cup \{\vee, (,)\})^+$$

Définition (Clause)

Une clause est une disjonction de littéraux

Formes normales

Définition (Forme normale conjonctive)

Une formule F est sous **forme normale conjonctive** *si et seulement si*

$$F = \bigwedge_{i \in]k]} H_i \quad \text{et} \quad \forall i \in]k], H_i \in (P \cup P_\neg \cup \{\vee, (,)\})^+$$

Définition (Clause)

Une clause est une disjonction de littéraux

La forme normale conjonctive est aussi appelée **forme clausale**.

Intérêt des formes normales

Théorème

Toute formule du calcul propositionnel est équivalente à une formule sous forme normale disjonctive.

Intérêt des formes normales

Théorème

Toute formule du calcul propositionnel est équivalente à une formule sous forme normale disjonctive.

Corollaire

Toute formule du calcul propositionnel est équivalente à une formule sous forme normale conjonctive

Formes normales conjonctive et disjonctive

Exemple

Soit une fonction booléenne φ à trois variables prenant la valeur $\blacksquare$ uniquement pour les triplets :

1. $(\square, \square, \square)$,
2. $(\square, \blacksquare, \square)$,
3. $(\square, \blacksquare, \blacksquare)$.

- une forme normale disjonctive canonique est :
  $(\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r)$

Formes normales conjonctive et disjonctive

Exemple

Soit une fonction booléenne φ à trois variables prenant la valeur $\blacksquare$ uniquement pour les triplets :

1. $(\square, \square, \square)$,
2. $(\square, \blacksquare, \square)$,
3. $(\square, \blacksquare, \blacksquare)$.

- une forme normale disjonctive canonique est :
  $(\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r)$
- une forme normale disjonctive simplifiée est :
  $(\neg p \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q)$

Formes normales conjonctive et disjonctive

Exemple

Soit une fonction booléenne φ à trois variables prenant la valeur $\blacksquare$ uniquement pour les triplets :

1. $(\square, \square, \square)$,
2. $(\square, \blacksquare, \square)$,
3. $(\square, \blacksquare, \blacksquare)$.

- une forme normale disjonctive canonique est : $(\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r)$
- une forme normale disjonctive simplifiée est : $(\neg p \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q)$
- une forme normale conjonctive simplifiée est : $\neg p \wedge (q \vee \neg r)$

Un outil pour les formes normales

Le **diagramme de Karnaugh** est un outil qui permet d'obtenir une représentation condensée d'une table de vérité.

Un outil pour les formes normales

Le **diagramme de Karnaugh** est un outil qui permet d'obtenir une représentation condensée d'une table de vérité.

- Pour **deux** variables, on retrouve les tables de vérité

q \ p	□	■
□	□	□
■	□	■

Diagramme de Karnaugh à 2 variables – $p \wedge q$

Un outil pour les formes normales

Le **diagramme de Karnaugh** est un outil qui permet d'obtenir une représentation condensée d'une table de vérité.

- Pour **deux** variables, on retrouve les tables de vérité

${}_{q}{}^{p}$	□	■
□	□	□
■	□	■

Diagramme de Karnaugh à 2 variables – $p \wedge q$

- Pour **trois** variables, on obtient :

${}_{r}{}^{pq}$	□□	□■	■■	■□
□	■	■	□	■
■	□	□	■	□

Diagramme de Karnaugh à 3 variables – $(p \wedge q) \leftrightarrow r$

Diagramme de Karnaugh

Dans un diagramme de Karnaugh, deux cases contiguës ne diffèrent que par le changement de valeur de vérité d'une unique variable.

Diagramme de Karnaugh

Dans un diagramme de Karnaugh, deux cases contiguës ne diffèrent que par le changement de valeur de vérité d'une unique variable.
NB : un diagramme de Karnaugh est un tore multidimensionnel

Diagramme de Karnaugh

Dans un diagramme de Karnaugh, deux cases contiguës ne diffèrent que par le changement de valeur de vérité d'une unique variable.

Exercice

À quoi ressemblerait un diagramme de Karnaugh à 5 variables ?

Diagramme de Karnaugh

Dans un diagramme de Karnaugh, deux cases contiguës ne diffèrent que par le changement de valeur de vérité d'une unique variable.

Exercice

À quoi ressemblerait un diagramme de Karnaugh à 5 variables ?

Correction

Un diagramme de Karnaugh à cinq variables (a, b, c, d, e) a cette allure :

$de \backslash abc$	□□□	□□■	□■■	□■□	■■□	■■■	■□■	■□□
□□								
□■								
■■								
■□								

Exercice

Suite à un problème d'absentéisme, le directeur des études d'un institut mène son enquête.
Après avoir interrogé différentes personnes, il sait que **trois affirmations parmi les cinq suivantes sont vraies**.

1. Archiduc : « je n'ai pas séché le cours »
2. Cale : « j'ai séché le cours avec Lelinge »
3. Lelinge : « je n'ai pas séché avec Cale mais avec Archiduc »
4. Sahara : « Archiduc n'était pas au cours »
5. Le prof : « j'ai vu Archiduc au cours »

Qui a séché ?

Diagramme de Karnaugh et formes normales

- Les ■ donnent directement une **forme normale disjonctive canonique**
- Les simplifications sont lisibles sur le diagramme
- Les □ permettent d'obtenir la **forme normale conjonctive**

Diagramme de Karnaugh et formes normales

- Les ■ donnent directement une **forme normale disjonctive canonique**
- Les simplifications sont lisibles sur le diagramme
- Les □ permettent d'obtenir la **forme normale conjonctive**

Exemple

$$(p \wedge q) \leftrightarrow r$$

$r \backslash pq$	□□	□■	■■	■□
□	■	■	□	■
■	□	□	■	□

Exercice

Une banque vient d'installer un nouveau coffre-fort. Le coffre-fort ne doit pouvoir être ouvert que par :

1. le directeur et le secrétaire général ensemble, ou bien par,
2. le directeur, le caissier et le comptable ensemble, ou bien par,
3. le secrétaire général, le comptable et l'adjoint du caissier.

Ces ensembles de personnnes (et les ensembles les incluant) sont les seules possibilités existantes pour ouvrir le coffre. **Combien** faut-il installer de serrures au minimum sur ce coffre et **comment** répartir les clefs de ces serrures ?

Plan

Aspects algébriques

George Boole

Il existe des liens forts entre calcul propositionnel et diverses structures algébriques

Aspects algébriques

George Boole

Il existe des liens forts entre calcul propositionnel et diverses structures algébriques

Définition (Algèbre de Boole)

Une **algèbre de Boole** *est la donnée de :*

- *un ensemble E*
- *deux éléments particuliers de E: $\perp$ et $\top$*
- *deux opérations binaires sur E : $\oplus$ et $\otimes$*
- *une opération unaire sur E : $\bar{\ }$*

Algèbre de Boole

Définition (Propriétés des opérations)

1. *commutativité :*
   $a \oplus b = b \oplus a$ $\qquad$ $a \otimes b = b \otimes a$
2. *associativité :*
   $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$ $\qquad$ $(a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c)$
3. *distributivité :*
   $a \oplus (b \otimes c) = (a \oplus b) \otimes (a \oplus c)$ *et*
   $a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c)$
4. *éléments neutres :*
   $a \oplus \bot = a$ $\qquad$ $a \otimes \top = a$
5. *complémentation :*
   $a \oplus \overline{a} = \top$ $\qquad$ $a \otimes \overline{a} = \bot$

Algèbre de Boole

Exemple

Pour tout ensemble E, $\mathcal{P}(E)$ est une algèbre de Boole. On a :

- $\oplus = \cup$ et $\otimes = \cap$
- $\perp = \varnothing$ et $\top = E$
- $\overline{a} = \complement_E a$

Principaux résultats montrés par Boole

Théorème

$\oplus$ *et* $\otimes$ *sont idempotentes*

Principaux résultats montrés par Boole

Théorème

$\oplus$ *et* $\otimes$ *sont idempotentes*

Théorème

$\top$ *et* $\bot$, *neutres pour, respectivement,* $\otimes$ *et* $\oplus$ *sont absorbants pour, respectivement,* $\oplus$ *et* $\otimes$

Principaux résultats montrés par Boole

Théorème

$\oplus$ *et* $\otimes$ *sont idempotentes*

Théorème

$\top$ *et* $\bot$, *neutres pour, respectivement,* $\otimes$ *et* $\oplus$ *sont absorbants pour, respectivement,* $\oplus$ *et* $\otimes$

Théorème (Lois de de Morgan)

$$\overline{a \oplus b} = \overline{a} \otimes \overline{b} \qquad \overline{a \otimes b} = \overline{a} \oplus \overline{b}$$

Principaux résultats montrés par Boole

Théorème

$\oplus$ *et* $\otimes$ *sont idempotentes*

Théorème

$\top$ *et* $\bot$*, neutres pour, respectivement,* $\otimes$ *et* $\oplus$ *sont absorbants pour, respectivement,* $\oplus$ *et* $\otimes$

Théorème (Lois de de Morgan)

$$\overline{a \oplus b} = \overline{a} \otimes \overline{b} \qquad \overline{a \otimes b} = \overline{a} \oplus \overline{b}$$

Théorème (Lois d'absorption)

$$a \oplus (a \otimes b) = a \qquad a \otimes (a \oplus b) = a$$

Autres résultats

Proposition

La complémentation est une opération involutive

Autres résultats

Proposition

La complémentation est une opération involutive

Preuve

On a $\overline{x} \oplus x = \top$ et $\overline{x} \otimes x = \bot$, ceci montre que le complémentaire de $\overline{x}$ est x (en plus de montrer que le complémentaire de x est $\overline{x}$). En d'autres termes : $\overline{\overline{x}} = x$.

Autres résultats

Proposition

La complémentation est une opération involutive

Preuve

On a $\overline{x} \oplus x = \top$ et $\overline{x} \otimes x = \bot$, ceci montre que le complémentaire de $\overline{x}$ est x (en plus de montrer que le complémentaire de x est $\overline{x}$). En d'autres termes : $\overline{\overline{x}} = x$.

Proposition

Dans une algèbre de Boole, le complément d'un élément est unique

Autres résultats

Proposition

La complémentation est une opération involutive

Preuve

On a $\overline{x} \oplus x = \top$ et $\overline{x} \otimes x = \bot$, ceci montre que le complémentaire de $\overline{x}$ est x (en plus de montrer que le complémentaire de x est $\overline{x}$). En d'autres termes : $\overline{\overline{x}} = x$.

Proposition

Dans une algèbre de Boole, le complément d'un élément est unique

Preuve

Soit $x' \neq \overline{x}$ autre complément de x. On a : $\overline{x} = \overline{x \oplus x} = x' \otimes x' = x'$.

Une autre approche des algèbres de Boole

Définition (Algèbre de Boole)

Un ensemble A ordonné par la relation $\propto$ tel que :

- *tout ensemble à deux éléments $\{x, y\}$ a une borne supérieure (notée $\sup(x, y)$) et une borne inférieure (notée $\inf(x, y)$)*
- *A possède un plus grand élément (noté $\top$)*
- *A possède un plus petit élément (noté $\perp$)*
- *tout élément x possède un complément $\overline{x}$ tel que :* $\sup(x, \overline{x}) = \top$ *et* $\inf(x, \overline{x}) = \perp$

est une **algèbre de Boole**

Une autre approche des algèbres de Boole

Définition (Algèbre de Boole)

Un ensemble A ordonné par la relation $\propto$ tel que :

- *tout ensemble à deux éléments $\{x, y\}$ a une borne supérieure (notée $\sup(x, y)$) et une borne inférieure (notée $\inf(x, y)$)*
- *A possède un plus grand élément (noté $\top$)*
- *A possède un plus petit élément (noté $\bot$)*
- *tout élément x possède un complément $\overline{x}$ tel que :* $\sup(x, \overline{x}) = \top$ *et* $\inf(x, \overline{x}) = \bot$

est une **algèbre de Boole**

Preuve

Il suffit de poser $x \oplus y = \inf(x, y)$ et $x \otimes y = \sup(x, y)$

Algèbre de Boole et Treillis

Définition (Treillis de Boole)

Une algèbre de Boole définit un treillis distributif complémenté. On l'appelle **treillis de Boole***.*

Algèbre de Boole et Treillis

Définition (Treillis de Boole)

Une algèbre de Boole définit un treillis distributif complémenté. On l'appelle **treillis de Boole**.

Preuve

1. $(E, \oplus, \otimes)$ est un **treillis** puisque : $\oplus$ et $\otimes$ sont *associatives*, *commutatives*, *idempotentes* et vérifient les *lois d'absorption*.
2. $(E, \oplus, \otimes)$ est **distributif** puisque $\oplus$ et $\otimes$ sont *distributives* l'une par rapport à l'autre
3. $(E, \oplus, \otimes)$ est **complémenté** car $\oplus$ et $\otimes$ possèdent chacune un élément neutre (respectivement, $\perp$ et $\top$) et $\forall x \exists y (x \oplus y = \top) \wedge (x \otimes y = \perp)$.

Algèbre de Boole et Treillis

Définition (Treillis de Boole)

Une algèbre de Boole définit un treillis distributif complémenté. On l'appelle **treillis de Boole***.*

Preuve

1. $(E, \oplus, \otimes)$ est un **treillis** puisque : $\oplus$ et $\otimes$ sont *associatives*, *commutatives*, *idempotentes* et vérifient les *lois d'absorption*.
2. $(E, \oplus, \otimes)$ est **distributif** puisque $\oplus$ et $\otimes$ sont *distributives* l'une par rapport à l'autre
3. $(E, \oplus, \otimes)$ est **complémenté** car $\oplus$ et $\otimes$ possèdent chacune un élément neutre (respectivement, $\perp$ et $\top$) et $\forall x \exists y (x \oplus y = \top) \wedge (x \otimes y = \perp)$.

NB : y est le complément de x, il s'agit de $\overline{x}$.

Algèbre de Boole et Anneau

Définition

Une algèbre de Boole définit un anneau commutatif idempotent et unitaire. On l'appelle **anneau de Boole**.

Algèbre de Boole et Anneau

Définition

Une algèbre de Boole définit un anneau commutatif idempotent et unitaire. On l'appelle **anneau de Boole**.

Preuve

On définit l'opération $x \varovee y = (x \oplus y) \otimes (\overline{x} \oplus \overline{y})$,

1. $(E, \varovee)$ est un **groupe abélien**
   $\varovee$ est associative, commutative, possède un élément neutre $(\bot)$ et tout élément à un symétrique
2. $(E, \varovee, \otimes)$ est un **anneau commutatif et idempotent**
   puisque $\otimes$ est à la fois commutative et idempotente.
3. $(E, \varovee, \otimes)$ un anneau **unitaire**
   puisque $\top$ est neutre pour $\otimes$.

Anneau de Boole

Exemple

Pour tout ensemble E, $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E muni de la différence symétrique ($\triangle$) et de l'intersection ($\cap$) est un anneau de Boole.

Anneau de Boole

Exemple

Pour tout ensemble E, $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E muni de la différence symétrique ($\triangle$) et de l'intersection ($\cap$) est un anneau de Boole.

Exercice

Montrer que dans un anneau de Boole, tout élément est son propre symétrique pour la loi $\veebar$.

Principaux résultats

Théorème

Tout anneau de Boole est un treillis de Boole

Principaux résultats

Théorème

Tout anneau de Boole est un treillis de Boole

NB : si $(E, \ovee, \otimes)$ un anneau de Boole. $(E, \oplus, \otimes)$ est un treillis de Boole avec $x \oplus y = x \ovee y \ovee (x \otimes y)$.

Principaux résultats

Théorème

Tout anneau de Boole est un treillis de Boole

Théorème

Tout treillis de Boole est un anneau de Boole.

Principaux résultats

Théorème

Tout anneau de Boole est un treillis de Boole

Théorème

Tout treillis de Boole est un anneau de Boole.

NB : on a déjà montré ce théorème en introduisant la notion d'anneau de Boole.

Principaux résultats

Théorème

Tout anneau de Boole est un treillis de Boole

Théorème

Tout treillis de Boole est un anneau de Boole.

Théorème (Théorème de Stone – non démontré)

Tout anneau de Boole est isomorphe à un anneau de parties d'un ensemble E

Algèbre de Boole et calcul propositionnel

Proposition

$(\{\square, \blacksquare\}, \wedge, \vee)$ *est un treillis de Boole.*

Algèbre de Boole et calcul propositionnel

Proposition

$(\{\square, \blacksquare\}, \wedge, \vee)$ *est un treillis de Boole.*

Preuve

Il suffit de dire que $\top = \blacksquare$, $\bot = \square$, $\oplus = \vee$, $\otimes = \wedge$ et $\bar{\ } = \neg$.

Algèbre de Boole et calcul propositionnel

Proposition

$(\{\square, \blacksquare\}, \wedge, \vee)$ *est un treillis de Boole.*

Preuve

Il suffit de dire que $\top = \blacksquare$, $\bot = \square$, $\oplus = \vee$, $\otimes = \wedge$ et $\bar{} = \neg$.

NB : dans ce cas, $\veebar$ est le ou exclusif ou xor.

Algèbre de Boole et calcul propositionnel

Proposition

$(\{\square, \blacksquare\}, \wedge, \vee)$ *est un treillis de Boole.*

Preuve

Il suffit de dire que $\top = \blacksquare$, $\perp = \square$, $\oplus = \vee$, $\otimes = \wedge$ et $\bar{\ } = \neg$.

Proposition

Pour tout ensemble E, l'ensemble des applications de E dans $\{\square, \blacksquare\}$ noté $\{\square, \blacksquare\}^E$ est une algèbre de Boole.

Algèbre de Boole et calcul propositionnel

Proposition

$(\{\square, \blacksquare\}, \wedge, \vee)$ *est un treillis de Boole.*

Preuve

Il suffit de dire que $\top = \blacksquare$, $\perp = \square$, $\oplus = \vee$, $\otimes = \wedge$ et $\bar{\ } = \neg$.

Proposition

Pour tout ensemble E, l'ensemble des applications de E dans $\{\square, \blacksquare\}$ noté $\{\square, \blacksquare\}^E$ est une algèbre de Boole.

Preuve

On pose $(f \otimes g)(x) = f(x) \wedge g(x)$, $(f \oplus g)(x) = f(x) \vee g(x)$.

Algèbre de Lindenbaum

Définition (Une relation d'équivalence sur $\mathcal{F}$)

On définit une relation d'équivalence sur $\mathcal{F}$ notée $\equiv$ par :

$$F_1 \equiv F_2 \quad \text{ssi} \quad \vdash F_1 \leftrightarrow F_2$$

Algèbre de Lindenbaum

Définition (Une relation d'équivalence sur $\mathcal{F}$)

On définit une relation d'équivalence sur $\mathcal{F}$ notée $\equiv$ par :

$$F_1 \equiv F_2 \quad \text{ssi} \quad \vdash F_1 \leftrightarrow F_2$$

NB : $\mathcal{F}$ est l'ensemble des formules du calcul propositionnel construites sur P.

Algèbre de Lindenbaum

Définition (Une relation d'équivalence sur $\mathcal{F}$)

On définit une relation d'équivalence sur $\mathcal{F}$ notée $\equiv$ par :

$$F_1 \equiv F_2 \quad \text{ssi} \quad \vdash F_1 \leftrightarrow F_2$$

Définition (Algèbre de Lindenbaum)

L'ensemble quotient de $\mathcal{F}$ par $\equiv$ noté $\mathcal{F}/_\equiv$ est appelé **Algèbre de Lindenbaum**. *On note $\widehat{F}$ la classe d'équivalence d'une formule F.*

Algèbre de Lindenbaum

Définition (Une relation d'équivalence sur $\mathcal{F}$)

On définit une relation d'équivalence sur $\mathcal{F}$ notée $\equiv$ par :

$$F_1 \equiv F_2 \quad \text{ssi} \quad \vdash F_1 \leftrightarrow F_2$$

Définition (Algèbre de Lindenbaum)

L'ensemble quotient de $\mathcal{F}$ par $\equiv$ noté $\mathcal{F}/_{\equiv}$ est appelé **Algèbre de Lindenbaum**. *On note $\widehat{F}$ la classe d'équivalence d'une formule F.*

Exemple

$\widehat{p \to q} = \{p \to q, \neg p \vee q, \neg q \vee \neg p, \ldots\}$

Algèbre de Lindenbaum et Algèbre de Boole

Proposition

$\mathcal{F}/_{\equiv}$ muni de la relation d'ordre $\propto$ définie par :

$$H \propto K \quad \text{ssi} \quad \vdash H \rightarrow K$$

est une **algèbre de Boole** *avec :*

- $\widehat{H} \otimes \widehat{K} = \widehat{H \wedge K}$
- $\widehat{H} \oplus \widehat{K} = \widehat{H \vee K}$
- $\overline{\widehat{H}} = \widehat{\neg H}$
- $\top = \hat{\blacksquare} = \mathcal{T}$ *l'ensemble des tautologies*
- $\bot = \hat{\square} = \mathcal{T}_{\neg}$ *l'ensemble des antilogies*

Principaux résultats

Théorème

$\mathcal{F}/_{\equiv}$ ne peut être isomorphe à l'anneau de Boole des parties d'un ensemble E

Principaux résultats

Théorème

$\mathcal{F}/_{\equiv}$ ne peut être isomorphe à l'anneau de Boole des parties d'un ensemble E

Théorème

$\mathcal{F}/_{\equiv}$ est isomorphe à un anneau de parties de l'ensemble $E = \{\square, \blacksquare\}^P$, c'est-à-dire un sous-ensemble non vide de E stable pour la complémentation et l'union.

Aspects algébriques du calcul propositionnel

Ce qu'il faut retenir

- Le calcul propositionnel présente une structure mathématique bien particulière
- Il existe des liens très étroits entre :
  - $\oplus$, $\cup$ et $\vee$
  - $\otimes$, $\cap$ et $\wedge$
  - $\circledvee$, $\triangle$ et xor

Plan

Notion de conséquence

Définition (Conséquence logique)

Soit $\mathcal{A} = \{F_1, \ldots, F_n\}$ *un ensemble d'éléments de* $\mathcal{F}$ *et* G *une formule.*
On dit que G *est* **conséquence logique** *de* $\mathcal{A}$ *si et seulement si toute distribution de valeur de vérité satisfaisant simultanément toutes les formules de* $\mathcal{A}$ *satisfait* G*.*
On note $\mathcal{A} \vdash G$

Notion de conséquence

Définition (Conséquence logique)

Soit $\mathcal{A} = \{F_1, \ldots, F_n\}$ un ensemble d'éléments de $\mathcal{F}$ et G une formule.
On dit que G est **conséquence logique** *de $\mathcal{A}$ si et seulement si toute distribution de valeur de vérité satisfaisant simultanément toutes les formules de $\mathcal{A}$ satisfait G.*
On note $\mathcal{A} \vdash G$

Exemple

On a ainsi : $\{p \rightarrow q, p\} \vdash q$ et aussi $\{p \rightarrow q, \neg q\} \vdash \neg p$

Notion de conséquence

Définition (Conséquence logique)

Soit $\mathcal{A} = \{F_1, \ldots, F_n\}$ un ensemble d'éléments de $\mathcal{F}$ et G une formule.
On dit que G est **conséquence logique** *de $\mathcal{A}$ si et seulement si toute distribution de valeur de vérité satisfaisant simultanément toutes les formules de $\mathcal{A}$ satisfait G.*
On note $\mathcal{A} \vdash G$

NB : une conséquence logique de $\emptyset$ est une tautologie

Quelques résultats

Théorème

$\mathcal{A} \vdash G$ *si et seulement si* $\vdash (F_1 \wedge \ldots \wedge F_n) \rightarrow G$.

Quelques résultats

Théorème

$\mathcal{A} \vdash G$ *si et seulement si* $\vdash (F_1 \wedge \ldots \wedge F_n) \to G$.

Théorème (Raisonnement par l'absurde – réfutation)

$\mathcal{A} \vdash G$ *si et seulement si* $F_1 \wedge \ldots \wedge F_n \wedge \neg G$ *est inconsistante.*

Systèmes formels

Définition (Système formel)

Un **système formel** *(ou théorie formelle)* $\mathcal{S}$ *est la donnée de :*

- *un ensemble dénombrable* V *de symboles ;*
- *un sous-ensemble* $\mathcal{F}$ *de* V^* *appelé ensemble des formules ;*
- *un sous-ensemble* $\mathcal{A}$ *de* $\mathcal{F}$ *appelé ensemble des axiomes ;*
- *un ensemble fini* $\mathcal{R}$ *de règles de déduction ou d'inférence.*

Systèmes formels

Définition (Système formel)

Un **système formel** *(ou théorie formelle) $\mathcal{S}$ est la donnée de :*

- *un ensemble dénombrable V de symboles ;*
- *un sous-ensemble $\mathcal{F}$ de V^* appelé ensemble des formules ;*
- *un sous-ensemble $\mathcal{A}$ de $\mathcal{F}$ appelé ensemble des axiomes ;*
- *un ensemble fini $\mathcal{R}$ de règles de déduction ou d'inférence.*

Définition (Règle d'inférence)

Une règle d'inférence est la donnée d'un ensemble de conditions et de la conclusion qu'on peut en tirer.

Systèmes formels

Définition (Système formel)

Un **système formel** *(ou théorie formelle)* $\mathcal{S}$ *est la donnée de :*

- *un ensemble dénombrable* V *de symboles ;*
- *un sous-ensemble* $\mathcal{F}$ *de* V^* *appelé ensemble des formules ;*
- *un sous-ensemble* $\mathcal{A}$ *de* $\mathcal{F}$ *appelé ensemble des axiomes ;*
- *un ensemble fini* $\mathcal{R}$ *de règles de déduction ou d'inférence.*

Définition (Règle d'inférence)

Une règle d'inférence est la donnée d'un ensemble de conditions et de la conclusion qu'on peut en tirer.

Exemple

De $p \rightarrow q$ et p, on peut déduire q – règle du **modus ponens**

Démonstrations et théorèmes

Définition (Démonstration)

Une **démonstration** *(ou une déduction) dans un système formel $\mathcal{S}$ est une suite d'énoncés $A_1, \ldots, A_n$ telle que tout énoncé A_i est soit*

- *un axiome de $\mathcal{S}$*
- *une conséquence des énoncés précédents par l'application de l'une des règles d'inférence*

Démonstrations et théorèmes

Définition (Démonstration)

Une **démonstration** *(ou une déduction) dans un système formel $\mathcal{S}$ est une suite d'énoncés $A_1, \ldots, A_n$ telle que tout énoncé A_i est soit*

- *un axiome de $\mathcal{S}$*
- *une conséquence des énoncés précédents par l'application de l'une des règles d'inférence*

Définition (Théorème)

Un **théorème** *de $\mathcal{S}$ est le dernier énoncé d'une démonstration.*

Démonstrations et théorèmes

Définition (Démonstration)

Une **démonstration** *(ou une déduction) dans un système formel* $\mathcal{S}$ *est une suite d'énoncés* $A_1, \ldots, A_n$ *telle que tout énoncé* A_i *est soit*

- *un axiome de* $\mathcal{S}$
- *une conséquence des énoncés précédents par l'application de l'une des règles d'inférence*

Définition (Théorème)

Un **théorème** *de* $\mathcal{S}$ *est le dernier énoncé d'une démonstration.*

NB : différence entre conséquence logique et démonstration

Prise en compte d'hypothèses

Définition (Déductibilité)

Soit $\mathcal{J}$ un ensemble de formules. Un énoncé A est dit **déductible** *sous les hypothèses $\mathcal{J}$, si et seulement s'il existe une suite finie d'énoncés $A_1, \ldots, A_n$ telle que : $A_n = A$ et $\forall i \in]n], A_i$ est dans une des situations suivantes :*

1. *A_i est un axiome*
2. *$A_i \in \mathcal{J}$*
3. *A_i découle d'énoncés précédents par l'utilisation d'une des règles d'inférence*

On note : $\mathcal{J} \models A$

Prise en compte d'hypothèses

Définition (Déductibilité)

Soit $\mathcal{J}$ un ensemble de formules. Un énoncé A est dit **déductible** *sous les hypothèses $\mathcal{J}$, si et seulement s'il existe une suite finie d'énoncés $A_1, \ldots, A_n$ telle que : $A_n = A$ et $\forall i \in]n], A_i$ est dans une des situations suivantes :*

1. *A_i est un axiome*
2. *$A_i \in \mathcal{J}$*
3. *A_i découle d'énoncés précédents par l'utilisation d'une des règles d'inférence*

On note : $\mathcal{J} \models A$

NB : on dit aussi que $\mathcal{J}$ est un modèle de A.

Prise en compte d'hypothèses

Définition (Déductibilité)

Soit $\mathcal{J}$ un ensemble de formules. Un énoncé A est dit **déductible** *sous les hypothèses $\mathcal{J}$, si et seulement s'il existe une suite finie d'énoncés $A_1, \ldots, A_n$ telle que : $A_n = A$ et $\forall i \in]n], A_i$ est dans une des situations suivantes :*

1. *A_i est un axiome*
2. *$A_i \in \mathcal{J}$*
3. *A_i découle d'énoncés précédents par l'utilisation d'une des règles d'inférence*

On note : $\mathcal{J} \models A$

NB : on dit aussi que $\mathcal{J}$ est un modèle de A.

Exercice

Qu'en est-il si $\mathcal{J} = \varnothing$?

Principales règles d'inférences

Définition (Modus ponens)

$$p \rightarrow q, p \models q$$

Définition (Modus tollens)

$$p \rightarrow q, \neg q \models \neg p$$

Définition (Syllogisme)

$$p \rightarrow q, q \rightarrow r \models p \rightarrow r$$

Principales règles d'inférences

Définition (Modus ponens)

$$p \rightarrow q, p \models q$$

Définition (Modus tollens)

$$p \rightarrow q, \neg q \models \neg p$$

Définition (Syllogisme)

$$p \rightarrow q, q \rightarrow r \models p \rightarrow r$$

Exercice

Peut-on remplacer $\models$ par $\vdash$? Que cela signifie-t-il ?

Quelques résultats

Proposition

Si $\mathcal{J}_1 \subset \mathcal{J}_2$ *et* $\mathcal{J}_1 \models A$ **alors** $\mathcal{J}_2 \models A$.

Quelques résultats

Proposition

Si $\mathcal{J}_1 \subset \mathcal{J}_2$ *et* $\mathcal{J}_1 \models A$ **alors** $\mathcal{J}_2 \models A$.

Proposition

Si $\mathcal{J}_1 \models A$ *et* **si** *pour tout énoncé* B *de* $\mathcal{J}_1$*, on a* $\mathcal{J}_2 \models B$ **alors** $\mathcal{J}_2 \models A$.

Définition (Un système formel pour le calcul propositionnel)

On se restreint au **système complet de connecteurs** $\{\neg, \rightarrow\}$.
On se donne trois **schémas d'axiome** *définissant un ensemble infini* $\mathcal{A}$ *d'axiomes :*

- *SA1 :* $A \rightarrow (B \rightarrow A)$
- *SA2 :* $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$
- *SA3 :* $(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$

On utilise **une seule règle de déduction** *dans ce système formel : le* **modus ponens** *:*

$$A, A \rightarrow B \models B$$

Principaux résultats

Proposition

$$\models A \rightarrow A$$

Principaux résultats

Proposition

$$\models A \to A$$

Preuve

1:	SA2	$(A \to ((A \to A) \to A)) \to ((A \to (A \to A)) \to (A \to A))$
2:	SA1	$(A \to ((A \to A) \to A))$
3:	mp $1 \cdot 2$	$(A \to (A \to A)) \to (A \to A)$
4:	SA1	$A \to (A \to A)$
5:	mp $3 \cdot 4$	$A \to A$

Principaux résultats

Proposition

$$\text{si} \quad A_1, \ldots, A_{n-1} \models A_n \rightarrow B \quad \text{alors} \quad A_1, \ldots, A_n \models B$$

Principaux résultats

Proposition

$$\text{si} \quad A_1, \ldots, A_{n-1} \models A_n \to B \quad \text{alors} \quad A_1, \ldots, A_n \models B$$

NB : il suffit d'utiliser la règle du modus ponens sur $A_n \to B$ pour le prouver.

Principaux résultats

Proposition

si $A_1, \ldots, A_{n-1} \models A_n \rightarrow B$ alors $A_1, \ldots, A_n \models B$

Proposition (Théorème de la déduction – Herbrand, 1930)

si $A_1, \ldots, A_n \models B$ alors $A_1, \ldots, A_{n-1} \models A_n \rightarrow B$

Principaux résultats

Proposition

$$\text{si} \quad A_1, \ldots, A_{n-1} \models A_n \rightarrow B \quad \text{alors} \quad A_1, \ldots, A_n \models B$$

Proposition (Théorème de la déduction – Herbrand, 1930)

$$\text{si} \quad A_1, \ldots, A_n \models B \quad \text{alors} \quad A_1, \ldots, A_{n-1} \models A_n \rightarrow B$$

Corollaire

$$\models A \rightarrow B \quad \text{si et seulement si} \quad A \models B$$

Principaux résultats

Proposition

$$\text{si} \quad A_1, \ldots, A_{n-1} \models A_n \rightarrow B \quad \text{alors} \quad A_1, \ldots, A_n \models B$$

Proposition (Théorème de la déduction – Herbrand, 1930)

$$\text{si} \quad A_1, \ldots, A_n \models B \quad \text{alors} \quad A_1, \ldots, A_{n-1} \models A_n \rightarrow B$$

Corollaire

$$\models A \rightarrow B \quad \text{si et seulement si} \quad A \models B$$

NB : ce corollaire permet de faire un lien fort entre « implication » ($\rightarrow$) et « démonstration » ($\models$).

Quelques résultats

Proposition

On peut démontrer les résultats suivants :

1. $\models (A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$
2. $\models B \to ((B \to C) \to C)$
3. $\models \neg B \to (B \to C)$
4. $\models \neg\neg B \to B$
5. $\models B \to \neg\neg B$
6. $\models (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$
7. $\models B \to (\neg C \to \neg(B \to C))$
8. $\models (B \to A) \to ((\neg B \to A) \to A)$

Propriétés fondamentales du calcul propositionnel

Théorème (Correction du calcul propositionnel)

si $\models A$ **alors** $\vdash A$

Propriétés fondamentales du calcul propositionnel

Théorème (Correction du calcul propositionnel)

si $\models A$ **alors** $\vdash A$

NB : ce théorème peut aussi se lire : tout ce qui est démontrable est vrai.

Propriétés fondamentales du calcul propositionnel

Théorème (Correction du calcul propositionnel)

si $\models A$ **alors** $\vdash A$

Théorème (Complétude du calcul propositionnel)

si $\vdash A$ **alors** $\models A$

Propriétés fondamentales du calcul propositionnel

Théorème (Correction du calcul propositionnel)

si $\models A$ **alors** $\vdash A$

Théorème (Complétude du calcul propositionnel)

si $\vdash A$ **alors** $\models A$

NB : ce théorème peut aussi se lire : tout ce qui est vrai est démontrable.

Propriétés fondamentales du calcul propositionnel

Définition (Décidabilité)

Un système formel est **décidable** *si et seulement si il existe un* **algorithme** *permettant de savoir si un énoncé donné est un théorème.*

Théorème (Décidabilité du calcul propositionnel)

Le calcul propositionnel est décidable.

Un outil pour la démonstration

Définition (Résolvante de deux clauses)

Soient deux clauses $C_1 = \ell \vee C_1'$ *et* $C_2 = \neg\ell \vee C_2'$ *où est* ℓ *est un littéral et* C_1' *et* C_2' *deux clauses éventuellement vides. On appelle* **résolvante** *de deux clauses la clause :* $C_1' \vee C_2'$.

Un outil pour la démonstration

Définition (Résolvante de deux clauses)

Soient deux clauses $C_1 = \ell \vee C_1'$ *et* $C_2 = \neg\ell \vee C_2'$ *où est* ℓ *est un littéral et* C_1' *et* C_2' *deux clauses éventuellement vides. On appelle* **résolvante** *de deux clauses la clause :* $C_1' \vee C_2'$.

NB : la clause vide est notée $\square$.

Un outil pour la démonstration

Définition (Résolvante de deux clauses)

Soient deux clauses $C_1 = \ell \vee C_1'$ et $C_2 = \neg \ell \vee C_2'$ où est ℓ est un littéral et C_1' et C_2' deux clauses éventuellement vides. On appelle **résolvante** *de deux clauses la clause : $C_1' \vee C_2'$.*

Exemple

Si $C_1 = \neg p \vee q$ et $C_2 = \neg q \vee r$. La résolvante de C_1 et C_2 est alors : $\neg p \vee r$.

Définition (Principe de résolution)

La règle de déduction produisant la clause $C'_1 \vee C'_2$ à partir des clauses C_1 et C_2 est appelée **principe de résolution**.

$$\ell \vee C'_1, \neg\ell \vee C'_2 \quad \models \quad C'_1 \vee C'_2$$

On note $C_1, C_2 \vdash_{reso} C'_1 \vee C'_2$.

Définition (Principe de résolution)

La règle de déduction produisant la clause $C'_1 \vee C'_2$ à partir des clauses C_1 et C_2 est appelée **principe de résolution**.

$$\ell \vee C'_1, \neg\ell \vee C'_2 \quad \models \quad C'_1 \vee C'_2$$

On note $C_1, C_2 \vdash_{reso} C'_1 \vee C'_2$.

NB : il a été introduit en 1960 par Robinson.

Définition (Principe de résolution)

La règle de déduction produisant la clause $C'_1 \vee C'_2$ à partir des clauses C_1 et C_2 est appelée **principe de résolution**.

$$\ell \vee C'_1, \neg\ell \vee C'_2 \quad \models \quad C'_1 \vee C'_2$$

On note $C_1, C_2 \vdash_{reso} C'_1 \vee C'_2$.

Exemple

Si $C_1 = \neg p \vee q$ et $C_2 = \neg q \vee r$. La résolvante de C_1 et C_2 est alors : $\neg p \vee r$.

Définition (Principe de résolution)

La règle de déduction produisant la clause $C'_1 \vee C'_2$ à partir des clauses C_1 et C_2 est appelée **principe de résolution**.

$$\ell \vee C'_1, \neg\ell \vee C'_2 \quad \models \quad C'_1 \vee C'_2$$

On note $C_1, C_2 \vdash_{reso} C'_1 \vee C'_2$.

Exemple

Si $C_1 = \neg p \vee q$ et $C_2 = \neg q \vee r$. La résolvante de C_1 et C_2 est alors : $\neg p \vee r$.

NB : on retrouve la règle d'inférence du syllogisme.

Proposition (Validité du principe de résolution)

La résolvante de deux clauses est une conséquence logique de ces deux clauses.

Proposition (Validité du principe de résolution)

La résolvante de deux clauses est une conséquence logique de ces deux clauses.

Définition (Résolution (linéaire))

Soit le système formel $\mathcal{R}$:

- *l'alphabet est $V = \{\neg, \vee\} \cup P$*
- *$\mathcal{F}_{\mathcal{R}}$ est l'ensemble des clauses sur V*
- *$\mathcal{A}_{\mathcal{R}} = \varnothing$*
- *la seule règle d'inférence est le* **principe de résolution**

Dans $\mathcal{R}$, une démonstration est une **résolution**.
Une résolution est dite **linéaire** *si et seulement si à chaque étape, C_{i+1} est obtenue par résolution à partir de C_i et d'une autre clause.*
L'ordre de prise en compte des clauses dans le cadre d'une résolution s'appelle une **stratégie**.

Principaux résultats sur $\mathcal{R}$

Proposition (Principe de réfutation)

$$\mathcal{A} \vdash F \quad \text{ssi} \quad \mathcal{A} \cup \{\neg F\} \quad \text{insatisfaisable}$$

Principaux résultats sur $\mathcal{R}$

Proposition (Principe de réfutation)

$$\mathcal{A} \vdash F \quad \text{ssi} \quad \mathcal{A} \cup \{\neg F\} \quad \text{insatisfaisable}$$

Proposition (Complétude du principe de résolution)

Un ensemble S de clauses est insatisfiable si et seulement si S mène par résolution à la clause vide :

$$S \vdash_{reso} \square$$

Principaux résultats sur $\mathcal{R}$

Proposition (Principe de réfutation)

$$\mathcal{A} \vdash F \quad \text{ssi} \quad \mathcal{A} \cup \{\neg F\} \quad \text{insatisfaisable}$$

Proposition (Complétude du principe de résolution)

Un ensemble S de clauses est insatisfiable si et seulement si S mène par résolution à la clause vide :

$$S \vdash_{reso} \Box$$

Proposition

$$\mathcal{A} \vdash C \quad \text{ssi} \quad \mathcal{A} \cup \{\neg C\} \vdash_{reso} \Box$$

Exercice

Montrer que $\{P \rightarrow S, S \rightarrow T, P\} \vdash T$.

Exercice

Montrer que $\{P \to S, S \to T, P\} \vdash T$.

Exercice

Montrer que **modus ponens**, **modus tollens** et **syllogisme** sont des cas particuliers du principe de résolution.

Exercice

Montrer que $\{P \rightarrow S, S \rightarrow T, P\} \vdash T$.

Exercice

Montrer que **modus ponens**, **modus tollens** et **syllogisme** sont des cas particuliers du principe de résolution.

Exercice

Quel est l'intérêt de la contraposition ?

Exercice

Soit 4 personnes accusées d'un délit : A, B, C et D. On sait que :

1. si A et B sont coupables alors C est complice
2. si A est coupable alors au moins un des deux B ou C est complice
3. si C est coupable alors D est complice
4. si A est innocent alors C est coupable

De qui peut-on démontrer la culpabilité ? A-t-on démontré tout ce qui est possible ?

Aspects déductifs du calcul propositionnel

Ce qu'il faut retenir

- conséquence logique *vs.* démonstration
- principe de résolution
- démonstration par réfutation

Plan

Une transition **explosive** vers le calcul des prédicats

Définition (Symboles numériques)

- 0 *est un symbole numérique*
- *si* x *est un symbole numérique alors* Sx *est un symbole numérique*

Une transition **explosive** vers le calcul des prédicats

Définition (Symboles numériques)

- 0 *est un symbole numérique*
- *si* x *est un symbole numérique alors* Sx *est un symbole numérique*

Définition (Variables)

- a, b, c, d, e *sont des variables*
- *si* v *est une variable, alors* v' *est aussi une variable*

Définition (Termes)

- *tous les symboles numériques et toutes les variables sont des termes*
- *si* t *est un terme,* St *est un terme*
- *si* s *et* t *sont des termes, alors* $(s + t)$ *et* $(s \cdot t)$ *sont des termes.*

Définition (Termes)

- *tous les symboles numériques et toutes les variables sont des termes*
- *si* t *est un terme,* St *est un terme*
- *si* s *et* t *sont des termes, alors* $(s + t)$ *et* $(s \cdot t)$ *sont des termes.*

NB : si un terme ne contient pas de variable, il est dit défini sinon il est dit indéfini.

Définition (Termes)

- *tous les symboles numériques et toutes les variables sont des termes*
- *si t est un terme, St est un terme*
- *si s et t sont des termes, alors $(s + t)$ et $(s \cdot t)$ sont des termes.*

Définition (Atomes)

- *si s et t sont des termes, alors $s = t$ est un atome*

Définition (Termes)

- *tous les symboles numériques et toutes les variables sont des termes*
- *si* t *est un terme,* St *est un terme*
- *si* s *et* t *sont des termes, alors* $(s + t)$ *et* $(s \cdot t)$ *sont des termes.*

Définition (Atomes)

- *si* s *et* t *sont des termes, alors* $s = t$ *est un atome*

NB : si un atome contient une variable, cette variable est dite libre.

Définition (Termes)

- *tous les symboles numériques et toutes les variables sont des termes*
- *si t est un terme, St est un terme*
- *si s et t sont des termes, alors $(s+t)$ et $(s \cdot t)$ sont des termes.*

Définition (Atomes)

- *si s et t sont des termes, alors $s=t$ est un atome*

NB : seul l'atome possède une valeur de vérité

Définition (Formules bien formées)

- *un atome est une formule bien formée*
- **si** *F est bien formée,* **alors** $\neg F$ *est bien formée*
- **si** x *et* y *sont des formules bien formées,* **alors** $x \wedge y$, $x \vee y$, $x \longrightarrow y$ *le sont aussi*
- **si** u *est une variable et* F *une formule bien formée dans laquelle* u *est libre,* **alors** $\exists u F$ *et* $\forall u F$ *sont des formules bien formées*

Définition (Formules bien formées)

- *un atome est une formule bien formée*
- **si** *F est bien formée,* **alors** *$\neg F$ est bien formée*
- **si** *x et y sont des formules bien formées,* **alors** *$x \wedge y$, $x \vee y$, $x \longrightarrow y$ le sont aussi*
- **si** *u est une variable et F une formule bien formée dans laquelle u est libre,* **alors** *$\exists uF$ et $\forall uF$ sont des formules bien formées*

NB : $\forall$ et $\exists$ sont appelés des quantificateurs.

Exercice

Que signifient les expressions ci-dessous ?

1. $\neg\forall c \exists b(SS0 \cdot b) = c$
2. $\forall c \neg\exists b(SS0 \cdot b) = c$
3. $\forall c \exists b \neg(SS0 \cdot b) = c$
4. $\neg\exists b \forall c(SS0 \cdot b) = c$
5. $\exists b \neg\forall c(SS0 \cdot b) = c$
6. $\exists b \forall c \neg(SS0 \cdot b) = c$

Exercice

Traduire en TNT les phrases suivantes :

1. 6 est un nombre pair
2. 2 n'est pas un carré
3. 1729 est la somme de deux cubes
4. Aucune somme de deux cubes n'est un cube
5. 5 est un nombre premier
6. Il existe une infinité de nombres premiers

Le système formel de la TNT

Définition (Axiomes)

- *(A1)* $\forall a, \neg Sa = 0$
- *(A2)* $\forall a, (a + 0) = a$
- *(A3)* $\forall a \forall b, (a + Sb) = S(a + b)$
- *(A4)* $\forall a, a \cdot 0 = 0$
- *(A5)* $\forall a \forall b, (a \cdot Sb) = ((a \cdot b) + a)$

Définition (Règles de déduction)

1. **spécification** : *soit u une variable contenue dans l'expression F.* **Si** $\forall u F$ *est un théorème,* **alors** F *l'est aussi ainsi que toute expression obtenue à partir de F en remplaçant u par un seul et même terme.*

Définition (Règles de déduction)

1. **spécification** : *soit u une variable contenue dans l'expression F.* **Si** *$\forall uF$ est un théorème,* **alors** *F l'est aussi ainsi que toute expression obtenue à partir de F en remplaçant u par un seul et même terme.*
2. **généralisation** : **si** *F est un théorème dans lequel u est libre,* **alors** *$\forall uF$ est un théorème*

Définition (Règles de déduction)

1. **spécification** : *soit u une variable contenue dans l'expression F.* **Si** $\forall uF$ *est un théorème,* **alors** F *l'est aussi ainsi que toute expression obtenue à partir de F en remplaçant u par un seul et même terme.*
2. **généralisation** : **si** F *est un théorème dans lequel u est libre,* **alors** $\forall uF$ *est un théorème*
3. **interchangeabilité** : $\forall u\neg$ *et* $\neg\exists u$ *sont interchangeables*

Définition (Règles de déduction)

1. **spécification** : *soit u une variable contenue dans l'expression F.* **Si** *$\forall uF$ est un théorème,* **alors** *F l'est aussi ainsi que toute expression obtenue à partir de F en remplaçant u par un seul et même terme.*
2. **généralisation** : **si** *F est un théorème dans lequel u est libre,* **alors** *$\forall uF$ est un théorème*
3. **interchangeabilité** : *$\forall u\neg$ et $\neg\exists u$ sont interchangeables*
4. **existence** : *on peut remplacer un terme dans un théorème par une variable non présente en plaçant le quantificateur existentiel en tête du théorème.*

Définition (Règles de déduction)

1. **spécification** : *soit u une variable contenue dans l'expression F.* **Si** $\forall u F$ *est un théorème,* **alors** F *l'est aussi ainsi que toute expression obtenue à partir de F en remplaçant u par un seul et même terme.*
2. **généralisation** : **si** F *est un théorème dans lequel u est libre,* **alors** $\forall u F$ *est un théorème*
3. **interchangeabilité** : $\forall u \neg$ *et* $\neg \exists u$ *sont interchangeables*
4. **existence** : *on peut remplacer un terme dans un théorème par une variable non présente en plaçant le quantificateur existentiel en tête du théorème.*
5. **égalité** : **si** $r = s$ *est un théorème,* **alors** $s = r$ *en est un (***symétrie***).* **Si** $r = s$ *et* $s = t$ *sont des théorèmes* **alors** $r = t$ *en est un (***transitivité***).*

Définition (Règles de déduction)

1. **spécification** : *soit u une variable contenue dans l'expression F.* **Si** $\forall uF$ *est un théorème,* **alors** F *l'est aussi ainsi que toute expression obtenue à partir de F en remplaçant u par un seul et même terme.*
2. **généralisation** : **si** F *est un théorème dans lequel u est libre,* **alors** $\forall uF$ *est un théorème*
3. **interchangeabilité** : $\forall u\neg$ *et* $\neg\exists u$ *sont interchangeables*
4. **existence** : *on peut remplacer un terme dans un théorème par une variable non présente en plaçant le quantificateur existentiel en tête du théorème.*
5. **égalité** : **si** $r = s$ *est un théorème,* **alors** $s = r$ *en est un (***symétrie***).* **Si** $r = s$ *et* $s = t$ *sont des théorèmes* **alors** $r = t$ *en est un (***transitivité***).*
6. **succession** : **si** $r = t$ *est un théorème,* **alors** $Sr = St$ *est un théorème (***ajout***).* **Si** $Sr = St$ *est un théorème,* **alors** $r = t$ *en est un (***suppression***).*

Exercice

Justifier la démonstration suivante :

1: $\forall a \forall b, (a + Sb) = S(a + b)$

2: $\forall b, (S0 + Sb) = S(S0 + b)$

3: $(S0 + S0) = S(S0 + 0)$

4: $\forall a, (a + 0) = a$

5: $(S0 + 0) = S0$

6: $S(S0 + 0) = SS0$

7: $(S0 + S0) = SS0$

Exercice

Justifier la démonstration suivante :

1:	axiome A3	$\forall a \forall b, (a + Sb) = S(a + b)$
2:		$\forall b, (S0 + Sb) = S(S0 + b)$
3:		$(S0 + S0) = S(S0 + 0)$
4:		$\forall a, (a + 0) = a$
5:		$(S0 + 0) = S0$
6:		$S(S0 + 0) = SS0$
7:		$(S0 + S0) = SS0$

Exercice

Justifier la démonstration suivante :

1:	axiome A3	$\forall a \forall b, (a + Sb) = S(a + b)$
2:	spécification sur 1 ($S0/a$)	$\forall b, (S0 + Sb) = S(S0 + b)$
3:		$(S0 + S0) = S(S0 + 0)$
4:		$\forall a, (a + 0) = a$
5:		$(S0 + 0) = S0$
6:		$S(S0 + 0) = SS0$
7:		$(S0 + S0) = SS0$

Exercice

Justifier la démonstration suivante :

1:	axiome A3	$\forall a \forall b, (a + Sb) = S(a + b)$
2:	spécification sur 1 $(S0/a)$	$\forall b, (S0 + Sb) = S(S0 + b)$
3:	spécification sur 2 $(0/b)$	$(S0 + S0) = S(S0 + 0)$
4:		$\forall a, (a + 0) = a$
5:		$(S0 + 0) = S0$
6:		$S(S0 + 0) = SS0$
7:		$(S0 + S0) = SS0$

Exercice

Justifier la démonstration suivante :

1:	axiome A3	$\forall a \forall b, (a + Sb) = S(a + b)$
2:	spécification sur 1 $(S0/a)$	$\forall b, (S0 + Sb) = S(S0 + b)$
3:	spécification sur 2 $(0/b)$	$(S0 + S0) = S(S0 + 0)$
4:	axiome A2	$\forall a, (a + 0) = a$
5:		$(S0 + 0) = S0$
6:		$S(S0 + 0) = SS0$
7:		$(S0 + S0) = SS0$

Exercice

Justifier la démonstration suivante :

1:	axiome A3	$\forall a \forall b, (a + Sb) = S(a + b)$
2:	spécification sur 1 ($S0/a$)	$\forall b, (S0 + Sb) = S(S0 + b)$
3:	spécification sur 2 ($0/b$)	$(S0 + S0) = S(S0 + 0)$
4:	axiome A2	$\forall a, (a + 0) = a$
5:	spécification sur 4 ($S0/a$)	$(S0 + 0) = S0$
6:		$S(S0 + 0) = SS0$
7:		$(S0 + S0) = SS0$

Exercice

Justifier la démonstration suivante :

1:	axiome A3	$\forall a \forall b, (a + Sb) = S(a + b)$
2:	spécification sur 1 ($S0/a$)	$\forall b, (S0 + Sb) = S(S0 + b)$
3:	spécification sur 2 ($0/b$)	$(S0 + S0) = S(S0 + 0)$
4:	axiome A2	$\forall a, (a + 0) = a$
5:	spécification sur 4 ($S0/a$)	$(S0 + 0) = S0$
6:	succession	$S(S0 + 0) = SS0$
7:		$(S0 + S0) = SS0$

Exercice

Justifier la démonstration suivante :

1:	axiome A3	$\forall a \forall b, (a + Sb) = S(a + b)$
2:	spécification sur 1 $(S0/a)$	$\forall b, (S0 + Sb) = S(S0 + b)$
3:	spécification sur 2 $(0/b)$	$(S0 + S0) = S(S0 + 0)$
4:	axiome A2	$\forall a, (a + 0) = a$
5:	spécification sur 4 $(S0/a)$	$(S0 + 0) = S0$
6:	succession	$S(S0 + 0) = SS0$
7:	transitivité $3 \cdot 6$	$(S0 + S0) = SS0$

Exercice

Justifier la démonstration suivante :

1:	axiome A3	$\forall a \forall b, (a + Sb) = S(a + b)$
2:	spécification sur 1 $(S0/a)$	$\forall b, (S0 + Sb) = S(S0 + b)$
3:	spécification sur 2 $(0/b)$	$(S0 + S0) = S(S0 + 0)$
4:	axiome A2	$\forall a, (a + 0) = a$
5:	spécification sur 4 $(S0/a)$	$(S0 + 0) = S0$
6:	succession	$S(S0 + 0) = SS0$
7:	transitivité $3 \cdot 6$	$(S0 + S0) = SS0$

NB : on a montré que $1 + 1 = 2$.

Exercice

Justifier la démonstration suivante :

1: $\forall a \forall b, (a \cdot Sb) = ((a \cdot b) + a)$

2: $\forall b, (S0 \cdot Sb) = ((S0 \cdot b) + S0)$

3: $(S0 \cdot S0) = ((S0 \cdot 0) + S0)$

4: $\forall a \forall b, (a + Sb) = S(a + b)$

5: $\forall b, ((S0 \cdot 0) + Sb) = S((S0 \cdot 0) + b)$

6: $((S0 \cdot 0) + S0) = S((S0 \cdot 0) + 0)$

7: $\forall a, (a + 0) = a$

8: $((S0 \cdot 0) + 0) = (S0 \cdot 0)$

9: $\forall a, (a \cdot 0) = 0$

10: $(S0 \cdot 0) = 0$

11: $((S0 \cdot 0) + 0) = 0$

12: $S((S0 \cdot 0) + 0) = S0$

13: $((S0 \cdot 0) + S0) = S0$

14: $(S0 \cdot S0) = S0$

Exercice

Justifier la démonstration suivante :

1:	axiome A5	$\forall a \forall b, (a \cdot Sb) = ((a \cdot b) + a)$
2:		$\forall b, (S0 \cdot Sb) = ((S0 \cdot b) + S0)$
3:		$(S0 \cdot S0) = ((S0 \cdot 0) + S0)$
4:		$\forall a \forall b, (a + Sb) = S(a + b)$
5:		$\forall b, ((S0 \cdot 0) + Sb) = S((S0 \cdot 0) + b)$
6:		$((S0 \cdot 0) + S0) = S((S0 \cdot 0) + 0)$
7:		$\forall a, (a + 0) = a$
8:		$((S0 \cdot 0) + 0) = (S0 \cdot 0)$
9:		$\forall a, (a \cdot 0) = 0$
10:		$(S0 \cdot 0) = 0$
11:		$((S0 \cdot 0) + 0) = 0$
12:		$S((S0 \cdot 0) + 0) = S0$
13:		$((S0 \cdot 0) + S0) = S0$
14:		$(S0 \cdot S0) = S0$

Exercice

Justifier la démonstration suivante :

1:	axiome A5	$\forall a \forall b, (a \cdot Sb) = ((a \cdot b) + a)$
2:	spécification $(S0/a)$	$\forall b, (S0 \cdot Sb) = ((S0 \cdot b) + S0)$
3:		$(S0 \cdot S0) = ((S0 \cdot 0) + S0)$
4:		$\forall a \forall b, (a + Sb) = S(a + b)$
5:		$\forall b, ((S0 \cdot 0) + Sb) = S((S0 \cdot 0) + b)$
6:		$((S0 \cdot 0) + S0) = S((S0 \cdot 0) + 0)$
7:		$\forall a, (a + 0) = a$
8:		$((S0 \cdot 0) + 0) = (S0 \cdot 0)$
9:		$\forall a, (a \cdot 0) = 0$
10:		$(S0 \cdot 0) = 0$
11:		$((S0 \cdot 0) + 0) = 0$
12:		$S((S0 \cdot 0) + 0) = S0$
13:		$((S0 \cdot 0) + S0) = S0$
14:		$(S0 \cdot S0) = S0$

Exercice

Justifier la démonstration suivante :

1:	axiome A5	$\forall a \forall b, (a \cdot Sb) = ((a \cdot b) + a)$
2:	spécification $(S0/a)$	$\forall b, (S0 \cdot Sb) = ((S0 \cdot b) + S0)$
3:	spécification $(0/b)$	$(S0 \cdot S0) = ((S0 \cdot 0) + S0)$
4:		$\forall a \forall b, (a + Sb) = S(a + b)$
5:		$\forall b, ((S0 \cdot 0) + Sb) = S((S0 \cdot 0) + b)$
6:		$((S0 \cdot 0) + S0) = S((S0 \cdot 0) + 0)$
7:		$\forall a, (a + 0) = a$
8:		$((S0 \cdot 0) + 0) = (S0 \cdot 0)$
9:		$\forall a, (a \cdot 0) = 0$
10:		$(S0 \cdot 0) = 0$
11:		$((S0 \cdot 0) + 0) = 0$
12:		$S((S0 \cdot 0) + 0) = S0$
13:		$((S0 \cdot 0) + S0) = S0$
14:		$(S0 \cdot S0) = S0$

Exercice

Justifier la démonstration suivante :

1:	axiome A5	$\forall a \forall b, (a \cdot Sb) = ((a \cdot b) + a)$
2:	spécification $(S0/a)$	$\forall b, (S0 \cdot Sb) = ((S0 \cdot b) + S0)$
3:	spécification $(0/b)$	$(S0 \cdot S0) = ((S0 \cdot 0) + S0)$
4:	axiome A3	$\forall a \forall b, (a + Sb) = S(a + b)$
5:		$\forall b, ((S0 \cdot 0) + Sb) = S((S0 \cdot 0) + b)$
6:		$((S0 \cdot 0) + S0) = S((S0 \cdot 0) + 0)$
7:		$\forall a, (a + 0) = a$
8:		$((S0 \cdot 0) + 0) = (S0 \cdot 0)$
9:		$\forall a, (a \cdot 0) = 0$
10:		$(S0 \cdot 0) = 0$
11:		$((S0 \cdot 0) + 0) = 0$
12:		$S((S0 \cdot 0) + 0) = S0$
13:		$((S0 \cdot 0) + S0) = S0$
14:		$(S0 \cdot S0) = S0$

Exercice

Justifier la démonstration suivante :

1:	axiome A5	$\forall a \forall b, (a \cdot Sb) = ((a \cdot b) + a)$
2:	spécification $(S0/a)$	$\forall b, (S0 \cdot Sb) = ((S0 \cdot b) + S0)$
3:	spécification $(0/b)$	$(S0 \cdot S0) = ((S0 \cdot 0) + S0)$
4:	axiome A3	$\forall a \forall b, (a + Sb) = S(a + b)$
5:	spécification $(S0 \cdot 0/a)$	$\forall b, ((S0 \cdot 0) + Sb) = S((S0 \cdot 0) + b)$
6:		$((S0 \cdot 0) + S0) = S((S0 \cdot 0) + 0)$
7:		$\forall a, (a + 0) = a$
8:		$((S0 \cdot 0) + 0) = (S0 \cdot 0)$
9:		$\forall a, (a \cdot 0) = 0$
10:		$(S0 \cdot 0) = 0$
11:		$((S0 \cdot 0) + 0) = 0$
12:		$S((S0 \cdot 0) + 0) = S0$
13:		$((S0 \cdot 0) + S0) = S0$
14:		$(S0 \cdot S0) = S0$

Exercice

Justifier la démonstration suivante :

1:	axiome A5	$\forall a \forall b, (a \cdot Sb) = ((a \cdot b) + a)$
2:	spécification $(S0/a)$	$\forall b, (S0 \cdot Sb) = ((S0 \cdot b) + S0)$
3:	spécification $(0/b)$	$(S0 \cdot S0) = ((S0 \cdot 0) + S0)$
4:	axiome A3	$\forall a \forall b, (a + Sb) = S(a + b)$
5:	spécification $(S0 \cdot 0/a)$	$\forall b, ((S0 \cdot 0) + Sb) = S((S0 \cdot 0) + b)$
6:	spécification $(0/b)$	$((S0 \cdot 0) + S0) = S((S0 \cdot 0) + 0)$
7:		$\forall a, (a + 0) = a$
8:		$((S0 \cdot 0) + 0) = (S0 \cdot 0)$
9:		$\forall a, (a \cdot 0) = 0$
10:		$(S0 \cdot 0) = 0$
11:		$((S0 \cdot 0) + 0) = 0$
12:		$S((S0 \cdot 0) + 0) = S0$
13:		$((S0 \cdot 0) + S0) = S0$
14:		$(S0 \cdot S0) = S0$

Exercice

Justifier la démonstration suivante :

1:	axiome A5	$\forall a \forall b, (a \cdot Sb) = ((a \cdot b) + a)$
2:	spécification $(S0/a)$	$\forall b, (S0 \cdot Sb) = ((S0 \cdot b) + S0)$
3:	spécification $(0/b)$	$(S0 \cdot S0) = ((S0 \cdot 0) + S0)$
4:	axiome A3	$\forall a \forall b, (a + Sb) = S(a + b)$
5:	spécification $(S0 \cdot 0/a)$	$\forall b, ((S0 \cdot 0) + Sb) = S((S0 \cdot 0) + b)$
6:	spécification $(0/b)$	$((S0 \cdot 0) + S0) = S((S0 \cdot 0) + 0)$
7:	axiome A2	$\forall a, (a + 0) = a$
8:		$((S0 \cdot 0) + 0) = (S0 \cdot 0)$
9:		$\forall a, (a \cdot 0) = 0$
10:		$(S0 \cdot 0) = 0$
11:		$((S0 \cdot 0) + 0) = 0$
12:		$S((S0 \cdot 0) + 0) = S0$
13:		$((S0 \cdot 0) + S0) = S0$
14:		$(S0 \cdot S0) = S0$

Exercice

Justifier la démonstration suivante :

1:	axiome A5	$\forall a \forall b, (a \cdot Sb) = ((a \cdot b) + a)$
2:	spécification $(S0/a)$	$\forall b, (S0 \cdot Sb) = ((S0 \cdot b) + S0)$
3:	spécification $(0/b)$	$(S0 \cdot S0) = ((S0 \cdot 0) + S0)$
4:	axiome A3	$\forall a \forall b, (a + Sb) = S(a + b)$
5:	spécification $(S0 \cdot 0/a)$	$\forall b, ((S0 \cdot 0) + Sb) = S((S0 \cdot 0) + b)$
6:	spécification $(0/b)$	$((S0 \cdot 0) + S0) = S((S0 \cdot 0) + 0)$
7:	axiome A2	$\forall a, (a + 0) = a$
8:	spécification $(S0 \cdot 0/a)$	$((S0 \cdot 0) + 0) = (S0 \cdot 0)$
9:		$\forall a, (a \cdot 0) = 0$
10:		$(S0 \cdot 0) = 0$
11:		$((S0 \cdot 0) + 0) = 0$
12:		$S((S0 \cdot 0) + 0) = S0$
13:		$((S0 \cdot 0) + S0) = S0$
14:		$(S0 \cdot S0) = S0$

Exercice

Justifier la démonstration suivante :

1:	axiome A5	$\forall a \forall b, (a \cdot Sb) = ((a \cdot b) + a)$
2:	spécification $(S0/a)$	$\forall b, (S0 \cdot Sb) = ((S0 \cdot b) + S0)$
3:	spécification $(0/b)$	$(S0 \cdot S0) = ((S0 \cdot 0) + S0)$
4:	axiome A3	$\forall a \forall b, (a + Sb) = S(a + b)$
5:	spécification $(S0 \cdot 0/a)$	$\forall b, ((S0 \cdot 0) + Sb) = S((S0 \cdot 0) + b)$
6:	spécification $(0/b)$	$((S0 \cdot 0) + S0) = S((S0 \cdot 0) + 0)$
7:	axiome A2	$\forall a, (a + 0) = a$
8:	spécification $(S0 \cdot 0/a)$	$((S0 \cdot 0) + 0) = (S0 \cdot 0)$
9:	axiome A4	$\forall a, (a \cdot 0) = 0$
10:		$(S0 \cdot 0) = 0$
11:		$((S0 \cdot 0) + 0) = 0$
12:		$S((S0 \cdot 0) + 0) = S0$
13:		$((S0 \cdot 0) + S0) = S0$
14:		$(S0 \cdot S0) = S0$

Exercice

Justifier la démonstration suivante :

1:	axiome A5	$\forall a \forall b, (a \cdot Sb) = ((a \cdot b) + a)$
2:	spécification $(S0/a)$	$\forall b, (S0 \cdot Sb) = ((S0 \cdot b) + S0)$
3:	spécification $(0/b)$	$(S0 \cdot S0) = ((S0 \cdot 0) + S0)$
4:	axiome A3	$\forall a \forall b, (a + Sb) = S(a + b)$
5:	spécification $(S0 \cdot 0/a)$	$\forall b, ((S0 \cdot 0) + Sb) = S((S0 \cdot 0) + b)$
6:	spécification $(0/b)$	$((S0 \cdot 0) + S0) = S((S0 \cdot 0) + 0)$
7:	axiome A2	$\forall a, (a + 0) = a$
8:	spécification $(S0 \cdot 0/a)$	$((S0 \cdot 0) + 0) = (S0 \cdot 0)$
9:	axiome A4	$\forall a, (a \cdot 0) = 0$
10:	spécification $(S0/a)$	$(S0 \cdot 0) = 0$
11:		$((S0 \cdot 0) + 0) = 0$
12:		$S((S0 \cdot 0) + 0) = S0$
13:		$((S0 \cdot 0) + S0) = S0$
14:		$(S0 \cdot S0) = S0$

Exercice

Justifier la démonstration suivante :

1:	axiome A5	$\forall a \forall b, (a \cdot Sb) = ((a \cdot b) + a)$
2:	spécification $(S0/a)$	$\forall b, (S0 \cdot Sb) = ((S0 \cdot b) + S0)$
3:	spécification $(0/b)$	$(S0 \cdot S0) = ((S0 \cdot 0) + S0)$
4:	axiome A3	$\forall a \forall b, (a + Sb) = S(a + b)$
5:	spécification $(S0 \cdot 0/a)$	$\forall b, ((S0 \cdot 0) + Sb) = S((S0 \cdot 0) + b)$
6:	spécification $(0/b)$	$((S0 \cdot 0) + S0) = S((S0 \cdot 0) + 0)$
7:	axiome A2	$\forall a, (a + 0) = a$
8:	spécification $(S0 \cdot 0/a)$	$((S0 \cdot 0) + 0) = (S0 \cdot 0)$
9:	axiome A4	$\forall a, (a \cdot 0) = 0$
10:	spécification $(S0/a)$	$(S0 \cdot 0) = 0$
11:	transitivité $8 \cdot 10$	$((S0 \cdot 0) + 0) = 0$
12:		$S((S0 \cdot 0) + 0) = S0$
13:		$((S0 \cdot 0) + S0) = S0$
14:		$(S0 \cdot S0) = S0$

Exercice

Justifier la démonstration suivante :

1:	axiome A5	$\forall a \forall b, (a \cdot Sb) = ((a \cdot b) + a)$
2:	spécification $(S0/a)$	$\forall b, (S0 \cdot Sb) = ((S0 \cdot b) + S0)$
3:	spécification $(0/b)$	$(S0 \cdot S0) = ((S0 \cdot 0) + S0)$
4:	axiome A3	$\forall a \forall b, (a + Sb) = S(a + b)$
5:	spécification $(S0 \cdot 0/a)$	$\forall b, ((S0 \cdot 0) + Sb) = S((S0 \cdot 0) + b)$
6:	spécification $(0/b)$	$((S0 \cdot 0) + S0) = S((S0 \cdot 0) + 0)$
7:	axiome A2	$\forall a, (a + 0) = a$
8:	spécification $(S0 \cdot 0/a)$	$((S0 \cdot 0) + 0) = (S0 \cdot 0)$
9:	axiome A4	$\forall a, (a \cdot 0) = 0$
10:	spécification $(S0/a)$	$(S0 \cdot 0) = 0$
11:	transitivité $8 \cdot 10$	$((S0 \cdot 0) + 0) = 0$
12:	succession	$S((S0 \cdot 0) + 0) = S0$
13:		$((S0 \cdot 0) + S0) = S0$
14:		$(S0 \cdot S0) = S0$

Exercice

Justifier la démonstration suivante :

1:	axiome A5	$\forall a \forall b, (a \cdot Sb) = ((a \cdot b) + a)$
2:	spécification $(S0/a)$	$\forall b, (S0 \cdot Sb) = ((S0 \cdot b) + S0)$
3:	spécification $(0/b)$	$(S0 \cdot S0) = ((S0 \cdot 0) + S0)$
4:	axiome A3	$\forall a \forall b, (a + Sb) = S(a + b)$
5:	spécification $(S0 \cdot 0/a)$	$\forall b, ((S0 \cdot 0) + Sb) = S((S0 \cdot 0) + b)$
6:	spécification $(0/b)$	$((S0 \cdot 0) + S0) = S((S0 \cdot 0) + 0)$
7:	axiome A2	$\forall a, (a + 0) = a$
8:	spécification $(S0 \cdot 0/a)$	$((S0 \cdot 0) + 0) = (S0 \cdot 0)$
9:	axiome A4	$\forall a, (a \cdot 0) = 0$
10:	spécification $(S0/a)$	$(S0 \cdot 0) = 0$
11:	transitivité $8 \cdot 10$	$((S0 \cdot 0) + 0) = 0$
12:	succession	$S((S0 \cdot 0) + 0) = S0$
13:	transitivité $6 \cdot 12$	$((S0 \cdot 0) + S0) = S0$
14:		$(S0 \cdot S0) = S0$

Exercice

Justifier la démonstration suivante :

1:	axiome A5	$\forall a \forall b, (a \cdot Sb) = ((a \cdot b) + a)$
2:	spécification $(S0/a)$	$\forall b, (S0 \cdot Sb) = ((S0 \cdot b) + S0)$
3:	spécification $(0/b)$	$(S0 \cdot S0) = ((S0 \cdot 0) + S0)$
4:	axiome A3	$\forall a \forall b, (a + Sb) = S(a + b)$
5:	spécification $(S0 \cdot 0/a)$	$\forall b, ((S0 \cdot 0) + Sb) = S((S0 \cdot 0) + b)$
6:	spécification $(0/b)$	$((S0 \cdot 0) + S0) = S((S0 \cdot 0) + 0)$
7:	axiome A2	$\forall a, (a + 0) = a$
8:	spécification $(S0 \cdot 0/a)$	$((S0 \cdot 0) + 0) = (S0 \cdot 0)$
9:	axiome A4	$\forall a, (a \cdot 0) = 0$
10:	spécification $(S0/a)$	$(S0 \cdot 0) = 0$
11:	transitivité $8 \cdot 10$	$((S0 \cdot 0) + 0) = 0$
12:	succession	$S((S0 \cdot 0) + 0) = S0$
13:	transitivité $6 \cdot 12$	$((S0 \cdot 0) + S0) = S0$
14:	transitivité $3 \cdot 13$	$(S0 \cdot S0) = S0$

Exercice

Justifier la démonstration suivante :

1:	axiome A5	$\forall a \forall b, (a \cdot Sb) = ((a \cdot b) + a)$
2:	spécification $(S0/a)$	$\forall b, (S0 \cdot Sb) = ((S0 \cdot b) + S0)$
3:	spécification $(0/b)$	$(S0 \cdot S0) = ((S0 \cdot 0) + S0)$
4:	axiome A3	$\forall a \forall b, (a + Sb) = S(a + b)$
5:	spécification $(S0 \cdot 0/a)$	$\forall b, ((S0 \cdot 0) + Sb) = S((S0 \cdot 0) + b)$
6:	spécification $(0/b)$	$((S0 \cdot 0) + S0) = S((S0 \cdot 0) + 0)$
7:	axiome A2	$\forall a, (a + 0) = a$
8:	spécification $(S0 \cdot 0/a)$	$((S0 \cdot 0) + 0) = (S0 \cdot 0)$
9:	axiome A4	$\forall a, (a \cdot 0) = 0$
10:	spécification $(S0/a)$	$(S0 \cdot 0) = 0$
11:	transitivité $8 \cdot 10$	$((S0 \cdot 0) + 0) = 0$
12:	succession	$S((S0 \cdot 0) + 0) = S0$
13:	transitivité $6 \cdot 12$	$((S0 \cdot 0) + S0) = S0$
14:	transitivité $3 \cdot 13$	$(S0 \cdot S0) = S0$

NB : on a montré que $1 \times 1 = 1$.

Plan

Les limites du calcul propositionnel

Exercice

Modéliser :

- *Les chandelles sont faites pour éclairer*
- *Quelques chandelles éclairent très mal*
- *Quelques objets qui sont fait pour éclairer le font très mal?*

Les limites du calcul propositionnel

Exercice

Modéliser :

- *Les chandelles sont faites pour éclairer*
- *Quelques chandelles éclairent très mal*
- *Quelques objets qui sont fait pour éclairer le font très mal ?*

Correction

Impossible (dans le cadre du calcul propositionnel)

Les limites du calcul propositionnel

Exercice

Modéliser :

- *Les chandelles sont faites pour éclairer*
- **Quelques** *chandelles éclairent très mal*
- *Quelques objets qui sont fait pour éclairer* **le** *font très mal ?*

Les limites du calcul propositionnel

Exercice

Modéliser :

- **Les** *chandelles sont faites pour éclairer*
- *Quelques chandelles éclairent très mal*
- *Quelques objets qui sont fait pour éclairer le font très mal?*

Les limites du calcul propositionnel

Exercice

Modéliser :

- **Toutes les** *chandelles sont faites pour éclairer*
- *Quelques chandelles éclairent très mal*
- *Quelques objets qui sont fait pour éclairer le font très mal?*

Être plus proche du langage naturel

De nouveaux outils

- Notion de **relation** (unaire, binaire, . . . , n-aire)
- Notion de **variable** (« place » réservée pour un énoncé à venir)
- Notion de **fonction**
- Notion de **quantification**

Être plus proche du langage naturel

De nouveaux outils

- Notion de **relation** (unaire, binaire, ..., n-aire)
- Notion de **variable** (« place » réservée pour un énoncé à venir)
- Notion de **fonction**
- Notion de **quantification**

Définition (Langage du premier ordre)

Dans un langage du **premier ordre**, *seules les variables sont quantifiées.*

Être plus proche du langage naturel

De nouveaux outils

- Notion de **relation** (unaire, binaire, . . . , *n*-aire)
- Notion de **variable** (« place » réservée pour un énoncé à venir)
- Notion de **fonction**
- Notion de **quantification**

Définition (Langage du premier ordre)

Dans un langage du **premier ordre***, seules les variables sont quantifiées.*

NB : dans un langage du second ordre, on peut aussi quantifier les relations et les fonctions

Étude du calcul des prédicats

Trois étapes

1. Comment écrire les formules ?
   aspects syntaxiques
2. Comment déterminer la valeur de vérité d'une formule ?
   aspects sémantiques
3. Comment démontrer (automatiquement) de nouveaux résultats ?
   aspects déductifs

Plan

Alphabet

Symboles de connecteurs

$$C = \{ \quad \neg, \quad \wedge, \quad \vee, \quad \rightarrow, \quad \leftrightarrow \}$$

Alphabet

Symboles de connecteurs

$$C = \{ \quad \neg, \quad \wedge, \quad \vee, \quad \rightarrow, \quad \leftrightarrow \}$$

Symboles de quantificateurs

- $\forall$ (**universel**) : « pour tout », « quel que soit », ...
- $\exists$ (**existentiel**) : « il existe au moins un ... tel que ... »

Alphabet

Symboles de connecteurs

$$C = \{ \quad \neg, \quad \wedge, \quad \vee, \quad \rightarrow, \quad \leftrightarrow \}$$

Symboles de quantificateurs

- $\forall$ (**universel**) : « pour tout », « quel que soit », ...
- $\exists$ (**existentiel**) : « il existe au moins un ... tel que ... »

Variables

$$\mathcal{V} = \{x, y, z, \ldots\}$$

Alphabet

Symboles de relations

$\mathcal{R} = \{P, Q, R, \ldots\}$ ensemble de symboles de relations (**prédicats**)

Alphabet

Symboles de relations

$\mathcal{R} = \{P, Q, R, \ldots\}$ ensemble de symboles de relations (**prédicats**)

Définition (Arité)

*À chaque symbole de relation R, on associe un entier $n \geq 0$; on dit alors que R est un symbole d'***arité** *n, c'est-à-dire une relation à n arguments ou n variables. On note $R_{/n}$.*

Alphabet

Symboles de relations

$\mathcal{R} = \{P, Q, R, \ldots\}$ ensemble de symboles de relations (**prédicats**)

Définition (Arité)

*À chaque symbole de relation R, on associe un entier $n \geq 0$; on dit alors que R est un symbole d'***arité** *n, c'est-à-dire une relation à n arguments ou n variables. On note $R_{/n}$.*

NB : on distingue un symbole de relation noté $=$ (d'arité 2) et appelé symbole d'égalité.

Alphabet

Symboles de fonctions

$\mathcal{F} = \{f, g, \ldots\}$ ensemble (disjoint de $\mathcal{R}$) de symboles de **fonction**

Alphabet

Symboles de fonctions

$\mathcal{F} = \{f, g, \ldots\}$ ensemble (disjoint de $\mathcal{R}$) de symboles de **fonction**

NB : à chaque symbole de fonction f, on associe un entier $n \geq 0$; on dit alors que f est un symbole d'arité n

Alphabet

Symboles de fonctions

$\mathcal{F} = \{f, g, \ldots\}$ ensemble (disjoint de $\mathcal{R}$) de symboles de **fonction**

NB : à chaque symbole de fonction f, on associe un entier $n \geq 0$; on dit alors que f est un symbole d'arité n

Définition (Constante)

Un symbole de fonction d'arité 0 *est appelé symbole de* **constante**.

Vocabulaire

Définition (Termes)

On définit les **termes** *inductivement :*

1. *les symboles de* **constantes** *et de* **variables** *sont des termes*
2. **si** f *est un symbole de fonction d'arité* n *et* $t_1, \ldots, t_n$ *sont des termes,* **alors** $f(t_1, \ldots, t_n)$ *est un terme*
3. *tous les termes sont obtenus par application des règles ci-dessus*

Vocabulaire

Définition (Termes)

On définit les **termes** *inductivement :*

1. *les symboles de* **constantes** *et de* **variables** *sont des termes*
2. **si** f *est un symbole de fonction d'arité* n *et* $t_1, \ldots, t_n$ *sont des termes,* **alors** $f(t_1, \ldots, t_n)$ *est un terme*
3. *tous les termes sont obtenus par application des règles ci-dessus*

NB : soit $\mathrm{var}(t)$ l'ensemble des variables de t. Si $\mathrm{var}(t) = \varnothing$, le terme est dit « de base ».

Vocabulaire

Définition (Termes)

On définit les **termes** *inductivement :*

1. *les symboles de* **constantes** *et de* **variables** *sont des termes*
2. **si** *f est un symbole de fonction d'arité n et $t_1, \ldots, t_n$ sont des termes,* **alors** *$f(t_1, \ldots, t_n)$ est un terme*
3. *tous les termes sont obtenus par application des règles ci-dessus*

NB : soit $\mathrm{var}(t)$ l'ensemble des variables de t. Si $\mathrm{var}(t) = \varnothing$, le terme est dit « de base ».

Définition (Atomes)

Si R est un symbole d'arité n et $t_1, \ldots, t_n$ des termes, alors $R(t_1, \ldots, t_n)$ est une formule atomique (ou **atome***).*

Les formules du calcul des prédicats

Définition (Formules)

1. *un* **atome** *est une formule*
2. **si** F *et* G *sont des formules,* **alors** $\neg(F)$, $(F) \wedge (G)$, $(F) \vee (G)$, $(F) \rightarrow (G)$ *et* $(F) \leftrightarrow (G)$ *sont des formules.*
3. **si** F *est une formule et* x *une variable,* **alors** $\forall x(F)$ *et* $\exists x(F)$ *sont des formules*
4. *toute formule est générée par un nombre fini d'application des règles* ❶, ❷ *et* ❸.

Les formules du calcul des prédicats

Définition (Formules)

1. *un* **atome** *est une formule*
2. **si** F *et* G *sont des formules,* **alors** $\neg(F)$, $(F) \wedge (G)$, $(F) \vee (G)$, $(F) \rightarrow (G)$ *et* $(F) \leftrightarrow (G)$ *sont des formules.*
3. **si** F *est une formule et* x *une variable,* **alors** $\forall x(F)$ *et* $\exists x(F)$ *sont des formules*
4. *toute formule est générée par un nombre fini d'application des règles* ❶, ❷ *et* ❸.

Exemple

$$\forall x \exists y \, (R(x, f(a, y), z) \rightarrow \neg T(g(b), z))$$

Exercice

Modéliser les expressions suivantes :

1. tous les lions sont féroces
2. quelques lions ne boivent pas de café
3. aucun singe n'est soldat
4. tous les singes sont malicieux

Exercice

Modéliser les expressions suivantes :

1. tous les lions sont féroces
2. quelques lions ne boivent pas de café
3. aucun singe n'est soldat
4. tous les singes sont malicieux

Correction

1. $\forall x \quad l(x) \longrightarrow f(x)$
2. $\exists x \quad l(x) \wedge \neg c(x)$
3. $\forall x \quad s(x) \longrightarrow \neg st(x)$
4. $\forall x \quad s(x) \longrightarrow m(x)$

Problèmes de traduction

Expressions courantes

tous les A sont B	$\mapsto$	$\forall x, A(x) \rightarrow B(x)$
seuls les A sont B	$\mapsto$	$\forall x, B(x) \rightarrow A(x)$
aucun A n'est B	$\mapsto$	$\forall x, A(x) \rightarrow \neg(B(x))$
quelques A sont B	$\mapsto$	$\exists x, A(x) \wedge B(x)$

Définition (Occurrence d'une variable)

On appelle **occurrence** *de x dans F chaque endroit où la variable x apparaît dans la formule F non immédiatement précédée d'un symbole de quantificateur.*

Définition (Occurrence d'une variable)

On appelle **occurrence** *de x dans F chaque endroit où la variable x apparaît dans la formule F non immédiatement précédée d'un symbole de quantificateur.*

Définition (Occurrence libre de x dans F)

1. *si F est un atome, toutes les occur. de x dans F sont libres*
2. *si $F = \neg(G)$, les occurrences libres de F sont celles de G*
3. *si $F = (G)\Box(H)$, où $\Box$ est un symbole de connecteur binaire, les occurrences libres de x dans F sont la réunion de celles de G et de celles de H.*
4. *si $F = \forall y(G)$ ou $F = \exists y(G)$, avec y variable distincte de x, les occurrences libres de x dans F sont celles de G*
5. *si $F = \forall x(G)$ ou $F = \exists x(G)$, aucune occurrence de x dans F n'est libre.*

Caractérisation des variables

Définition (Variable libre)

Une **variable** *est* **libre** *(ou parlante) si elle a au moins une occurrence libre.*

Caractérisation des variables

Définition (Variable libre)

Une **variable** *est* **libre** *(ou parlante) si elle a au moins une occurrence libre.*

NB : une variable n'ayant aucune occurrence libre est dite liée (ou muette).

Caractérisation des variables

Définition (Variable libre)

*Une **variable** est **libre** (ou parlante) si elle a au moins une occurrence libre.*

NB : une variable n'ayant aucune occurrence libre est dite liée (ou muette).

Définition (Formule close)

*Une formule n'ayant pas de variable libre est dite **close**.*

Caractérisation des variables

Définition (Variable libre)

Une **variable** *est* **libre** *(ou parlante) si elle a au moins une occurrence libre.*

NB : une variable n'ayant aucune occurrence libre est dite liée (ou muette).

Définition (Formule close)

Une formule n'ayant pas de variable libre est dite **close***.*

NB : une formule dont les variables libres se trouvent parmi $x_1, \ldots, x_n$ est habituellement notée $F(x_1, \ldots, x_n)$.

Exercice

Donner la structure de chacune des formules suivantes. Puis, pour chaque variable apparaissant dans ces formules, signaler chacune des occurrences. S'agit-il de variables liées ou libres ? S'agit-il de formules closes ?

1. $\exists y(R(x, f(y), z) \rightarrow (v(b) \vee s(a, g(b))))$
2. $(\forall x p(x)) \vee (\exists y f(x) = y)$
3. $\forall x \forall y(x = y \rightarrow f(x) = f(y))$

Exercice

Donner la structure de chacune des formules suivantes. Puis, pour chaque variable apparaissant dans ces formules, signaler chacune des occurrences. S'agit-il de variables liées ou libres ? S'agit-il de formules closes ?

1. $\exists y(R(x, f(y), z) \to (v(b) \lor s(a, g(b))))$
2. $(\forall x p(x)) \lor (\exists y f(x) = y)$
3. $\forall x \forall y(x = y \to f(x) = f(y))$

Correction

$$\exists y(R\overbrace{(\underbrace{x}_{var}, \underbrace{f(y)}_{atome}, z)}^{terme} \to (v(\underbrace{b}_{cte}) \lor s\overbrace{(\underbrace{a}_{cte}, \underbrace{g(b)}_{atome})}^{terme}))$$

Notion de substitution

Définition (Substitution)

Soient F une formule bien formée, x une variable et t un terme. La **substitution** *de t à x, $F[t/x]$ est la formule obtenue en remplaçant toutes les occurrences libres de x dans F par t.*

Notion de substitution

Définition (Substitution)

Soient F une formule bien formée, x une variable et t un terme. La **substitution** *de t à x, $F[t/x]$ est la formule obtenue en remplaçant toutes les occurrences libres de x dans F par t.*

Exemple

Soit $F = \forall y(P(z) \rightarrow R(y))$. La substitution de $f(x)$ à z dans F donne :

$$F[f(x)/z] \quad = \quad \forall y(P(f(x)) \rightarrow R(y))$$

Définition (Substituabilité)

Soient F une formule bien formée, x une variable et t un terme. t est **substituable** *à x (libre pour x) si et seulement si aucune occurrence libre de x dans F ne devient une occurrence liée dans $F[t/x]$.*

Définition (Substituabilité)

Soient F une formule bien formée, x une variable et t un terme. t est **substituable** *à x (libre pour x) si et seulement si aucune occurrence libre de x dans F ne devient une occurrence liée dans $F[t/x]$.*

NB : dans le cas contraire, il faut renommer les variables liées de la proposition ou les variables du terme pour pouvoir effectuer la substitution.

Définition (Substituabilité)

Soient F une formule bien formée, x une variable et t un terme. t est **substituable** *à x (libre pour x) si et seulement si aucune occurrence libre de x dans F ne devient une occurrence liée dans $F[t/x]$.*

NB : dans le cas contraire, il faut renommer les variables liées de la proposition ou les variables du terme pour pouvoir effectuer la substitution.

Exemple

Soit $F = \forall x(\exists vP(x, v) \rightarrow \forall zQ((x, y, z) \wedge \forall u\exists tS(f(t), u)$. Alors, la substitution de y par $f(h(z), x)$ dans F donne

$$F[f(h(z), x)/y] = \forall w(\exists vP(w, v) \rightarrow \forall yQ((w, f(h(z), x), y)) \wedge \forall u\exists tS(f(t), u)$$

Définition (Substituabilité)

Soient F une formule bien formée, x une variable et t un terme. t est **substituable** *à x (libre pour x) si et seulement si aucune occurrence libre de x dans F ne devient une occurrence liée dans $F[t/x]$.*

NB : dans le cas contraire, il faut renommer les variables liées de la proposition ou les variables du terme pour pouvoir effectuer la substitution.

Exemple

Soit $F = \forall x(\exists v P(x, v) \rightarrow \forall z Q((x, y, z) \wedge \forall u \exists t S(f(t), u)$. Alors, la substitution de y par $f(h(z), x)$ dans F donne

$$F[f(h(z), x)/y] = \forall w(\exists v P(w, v) \rightarrow \forall y Q((w, f(h(z), x), y)) \wedge \forall u \exists t S(f(t), u)$$

NB : attention, ici le y de la deuxième formule n'a bien sûr rien à voir avec le y de la première.

Plan

Définition (Interprétation)

Une **interprétation** $\mathcal{I}$ *du langage* $\mathcal{L}$ *du calcul des prédicats est la donnée de :*

- *un* **domaine d'interprétation** $\mathcal{D}$ *: un ensemble de valeurs que peuvent prendre les variables.*
- *une* **interprétation des constantes** *: une application* $\mathcal{I}_c$ *de l'ensemble des constantes dans* $\mathcal{D}$ *qui, à toute constante* c*, associe une valeur dans* $\mathcal{D}$
- *une* **interprétation des fonctions** *: une application* $\mathcal{I}_f$ *qui, à toute fonction* f *d'arité* n *(strictement positive) et à tout* n*-uplet de valeurs de* $\mathcal{D}$*, associe une valeur de* $\mathcal{D}$
- *une* **interprétation des prédicats** *: une application* $\mathcal{I}_p$ *qui, à tout prédicat* P *d'arité* n *et à tout* n*-uplet de valeurs de* $\mathcal{D}$*, associe une valeur dans* $\{\square, \blacksquare\}$.

Considérons les formules suivantes

- $HG = \forall x \forall y \forall z \quad (P(x,y) \wedge P(y,z)) \rightarrow G(x,z)$
- $HP = \forall x \exists y \quad P(y,x)$
- $C = \forall x \exists y \quad G(y,x)$
- $D = \forall x \forall z \quad P(z,f(x)) \rightarrow G(z,x)$
- $F = HG \wedge HP \rightarrow C$

Considérons les formules suivantes

- $HG = \forall x \forall y \forall z \quad (P(x,y) \wedge P(y,z)) \rightarrow G(x,z)$
- $HP = \forall x \exists y \quad P(y,x)$
- $C = \forall x \exists y \quad G(y,x)$
- $D = \forall x \forall z \quad P(z, f(x)) \rightarrow G(z,x)$
- $F = HG \wedge HP \rightarrow C$

Exemple

$\mathcal{D}$ comme est l'ensemble des êtres humains. La relation $P(x,y)$ signifie que x est le père de y. La relation $G(x,y)$ signifie que x est un grand-père de y. La fonction $f_{/1}$ associe un individu à sa mère.

Considérons les formules suivantes

- $HG = \forall x \forall y \forall z \quad (P(x,y) \wedge P(y,z)) \rightarrow G(x,z)$
- $HP = \forall x \exists y \quad P(y,x)$
- $C = \forall x \exists y \quad G(y,x)$
- $D = \forall x \forall z \quad P(z, f(x)) \rightarrow G(z,x)$
- $F = HG \wedge HP \rightarrow C$

Exemple

$\mathcal{D}$ comme est l'ensemble des êtres humains. La relation $P(x,y)$ signifie que x est le père de y. La relation $G(x,y)$ signifie que x est un grand-père de y. La fonction $f_{/1}$ associe un individu à sa mère.

Exercice

Comment lire les formules ?

Considérons les mêmes formules

- $HG = \forall x \forall y \forall z \quad (P(x,y) \wedge P(y,z)) \rightarrow G(x,z)$
- $HP = \forall x \exists y \quad P(y,x)$
- $C = \forall x \exists y \quad G(y,x)$
- $D = \forall x \forall z \quad P(z, f(x)) \rightarrow G(z,x)$
- $F = HG \wedge HP \rightarrow C$

Exemple

$\mathcal{D}$ est maintenant réduit à trois sommets a, b et c dans graphe orienté.

- La relation P est vraie pour les couples (a,b), (b,c) et (c,a) et fausse pour les autres.
- La relation G est vraie pour les couples (b,a), (c,b) et (a,c) et fausse pour les autres.
- La fonction f est définie par $f(a) = a$, $f(b) = b$ et $f(c) = a$.

Considérons les mêmes formules

- $HG = \forall x \forall y \forall z \quad (P(x,y) \wedge P(y,z)) \rightarrow G(x,z)$
- $HP = \forall x \exists y \quad P(y,x)$
- $C = \forall x \exists y \quad G(y,x)$
- $D = \forall x \forall z \quad P(z, f(x)) \rightarrow G(z,x)$
- $F = HG \wedge HP \rightarrow C$

Exemple

$\mathcal{D}$ est maintenant réduit à trois sommets a, b et c dans graphe orienté.

- La relation P est vraie pour les couples (a,b), (b,c) et (c,a) et fausse pour les autres.
- La relation G est vraie pour les couples (b,a), (c,b) et (a,c) et fausse pour les autres.
- La fonction f est définie par $f(a) = a$, $f(b) = b$ et $f(c) = a$.

Exercice

Que signifient P et G ? Comment lire les formules ?

Définition (Valuation)

Pour une interprétation $\mathcal{I}$ donnée, on appelle **valuation** *v des variables relatives à $\mathcal{I}$, toute application de l'ensemble des variables dans $\mathcal{D}$.*

Définition (Valuation)

Pour une interprétation $\mathcal{I}$ donnée, on appelle **valuation** v *des variables relatives à $\mathcal{I}$, toute application de l'ensemble des variables dans $\mathcal{D}$.*

Procédure d'interprétation d'une formule

Soit une valuation v, l'**interprétation** (évaluation) d'une **formule non close** est obtenue en :

1. **substituant** aux variables libres leurs valeurs dans $\mathcal{D}$
2. **calculant** inductivement la valeur des termes (en commençant par les termes inclus)
3. **calculant** l'interprétation (la valeur de vérité) des prédicats
4. **calculant** la valeur de vérité de la formule

Valeur de vérité d'une formule

La valeur de vérité d'une formule est calculée à partir de celles des atomes la constituant :

- la valeur de vérité d'un atome est l'interprétation du prédicat
- la valeur de vérité d'une formule non atomique, construite à partir d'atomes valués, est calculée au moyen des tables de vérité des connecteurs du calcul propositionnel
- la valeur de vérité des formules contenant des variables quantifiées est calculée ainsi :
  - $\exists x(\varphi)$ a pour valeur $\blacksquare$ s'il existe une valuation v' qui coïncide avec v sauf en x et qui assigne $d \in \mathcal{D}$ à x, telle que l'interprétation de $\varphi[d/x]$ soit $\blacksquare$. Sinon, $\exists x(\varphi)$ est $\square$
  - $\forall x(\varphi)$ a pour valeur $\blacksquare$ si pour toute valuation v' qui coïncide avec v sauf en x et qui assigne $d \in \mathcal{D}$ à x, l'interprétation de $\varphi[d/x]$ est $\blacksquare$. Sinon, $\forall x(\varphi)$ a pour valeur $\square$

Considérons les formules suivantes

- $HG = \forall x \forall y \forall z \quad (P(x,y) \land P(y,z)) \rightarrow G(x,z)$
- $HP = \forall x \exists y \quad P(y,x)$
- $C = \forall x \exists y \quad G(y,x)$
- $D = \forall x \forall z \quad P(z, f(x)) \rightarrow G(z,x)$
- $F = HG \land HP \rightarrow C$

Exemple

$\mathcal{D}$ comme est l'ensemble des êtres humains. La relation $P(x,y)$ signifie que x est le père de y. La relation $G(x,y)$ signifie que x est un grand-père de y. La fonction $f_{/1}$ associe un individu à sa mère.

Considérons les formules suivantes

- $HG = \forall x \forall y \forall z \quad (P(x,y) \land P(y,z)) \rightarrow G(x,z)$
- $HP = \forall x \exists y \quad P(y,x)$
- $C = \forall x \exists y \quad G(y,x)$
- $D = \forall x \forall z \quad P(z, f(x)) \rightarrow G(z,x)$
- $F = HG \land HP \rightarrow C$

Exemple

$\mathcal{D}$ comme est l'ensemble des êtres humains. La relation $P(x,y)$ signifie que x est le père de y. La relation $G(x,y)$ signifie que x est un grand-père de y. La fonction $f_{/1}$ associe un individu à sa mère.

Exercice

Quel est la valeur de vérité des formules considérées ?

Considérons les mêmes formules

- $HG = \forall x \forall y \forall z \quad (P(x,y) \wedge P(y,z)) \rightarrow G(x,z)$
- $HP = \forall x \exists y \quad P(y,x)$
- $C = \forall x \exists y \quad G(y,x)$
- $D = \forall x \forall z \quad P(z, f(x)) \rightarrow G(z,x)$
- $F = HG \wedge HP \rightarrow C$

Exemple

$\mathcal{D}$ est maintenant réduit à trois sommets a, b et c dans graphe orienté.

- La relation P est vraie pour les couples (a,b), (b,c) et (c,a) et fausse pour les autres.
- La relation G est vraie pour les couples (b,a), (c,b) et (a,c) et fausse pour les autres.
- La fonction f est définie par $f(a) = a$, $f(b) = b$ et $f(c) = a$.

Considérons les mêmes formules

- $HG = \forall x \forall y \forall z \quad (P(x,y) \wedge P(y,z)) \rightarrow G(x,z)$
- $HP = \forall x \exists y \quad P(y,x)$
- $C = \forall x \exists y \quad G(y,x)$
- $D = \forall x \forall z \quad P(z, f(x)) \rightarrow G(z,x)$
- $F = HG \wedge HP \rightarrow C$

Exemple

$\mathcal{D}$ est maintenant réduit à trois sommets a, b et c dans graphe orienté.

- La relation P est vraie pour les couples (a,b), (b,c) et (c,a) et fausse pour les autres.
- La relation G est vraie pour les couples (b,a), (c,b) et (a,c) et fausse pour les autres.
- La fonction f est définie par $f(a) = a$, $f(b) = b$ et $f(c) = a$.

Exercice

Quel est la valeur de vérité des formules considérées ?

Notion de modèle

Proposition

La valeur de vérité d'une formule ne dépend que de la valuation de ses variables libres.

Notion de modèle

Proposition

La valeur de vérité d'une formule ne dépend que de la valuation de ses variables libres.

NB : la valeur de vérité d'une formule close, pour une interprétation donnée, ne dépend pas de la valuation.

Notion de modèle

Proposition

La valeur de vérité d'une formule ne dépend que de la valuation de ses variables libres.

Définition (Modèle)

Étant donnée une formule close F de $\mathcal{L}$, on dit que l'interprétation $\mathcal{I}$ **satisfait** *la formule F si et seulement si la valeur de vérité prise par F dans $\mathcal{I}$ est* [redacted].
On note $\mathcal{I} \models F$
On dit encore dans ce cas que $\mathcal{I}$ est un **modèle** *de F.*

Étendue de valeur de vérité

Définition (Formules universellement valides)

Une formule F de $\mathcal{L}$ est dite **universellement valide** *si et seulement si pour toute interprétation et pour toute valuation, F est vraie. On note :* $\vdash F$.

Étendue de valeur de vérité

Définition (Formules universellement valides)

Une formule F de $\mathcal{L}$ est dite **universellement valide** *si et seulement si pour toute interprétation et pour toute valuation, F est vraie. On note :* $\vdash F$.

NB : on dit aussi que F est une tautologie.

Étendue de valeur de vérité

Définition (Formules universellement valides)

Une formule F de $\mathcal{L}$ est dite **universellement valide** *si et seulement si pour toute interprétation et pour toute valuation, F est vraie. On note : $\vdash F$.*

NB : on peut se passer des valuations en ne considérant que des formules closes ou leur clôture. La clôture de $F(x_1, \ldots, x_n)$ est la formule $\forall x_1, \ldots \forall x_n F(x_1, \ldots, x_n)$.

Étendue de valeur de vérité

Définition (Formules universellement valides)

Une formule F de $\mathcal{L}$ est dite **universellement valide** *si et seulement si pour toute interprétation et pour toute valuation, F est vraie. On note :* $\vdash F$.

Définition (Formules valides)

Une formule F est dite **valide** *si et seulement si il existe une interprétation $\mathcal{I}$ telle que pour toute valuation, F soit vraie.*

Étendue de valeur de vérité

Définition (Formules universellement valides)

Une formule F de $\mathcal{L}$ est dite **universellement valide** *si et seulement si pour toute interprétation et pour toute valuation, F est vraie. On note :* $\vdash F$.

Définition (Formules valides)

Une formule F est dite **valide** *si et seulement si il existe une interprétation $\mathcal{I}$ telle que pour toute valuation, F soit vraie.*

NB : $\mathcal{I}$ est un modèle de F.

Théorème (Löwenheim-Skolem – non démontré)

Toute formule close valide sur un domaine infini dénombrable est universellement valide.

Théorème (Löwenheim-Skolem – non démontré)

Toute formule close valide sur un domaine infini dénombrable est universellement valide.

Définition (Formules satisfiables)

Une formule F est dite **satisfiable** *si et seulement si il existe une interprétation $\mathcal{I}$ et une valuation, telles que F soit vraie.*

Théorème (Löwenheim-Skolem – non démontré)

Toute formule close valide sur un domaine infini dénombrable est universellement valide.

Définition (Formules satisfiables)

Une formule F est dite **satisfiable** *si et seulement si il existe une interprétation $\mathcal{I}$ et une valuation, telles que F soit vraie.*

Définition (Formules contradictoires)

Une formule F est dite **contradictoire** *ou* **insatisfiable** *ou* **inconsistante** *si et seulement si pour toute interprétation $\mathcal{I}$ et pour toute valuation, F est fausse.*

Exercice

On considère un ensemble E non vide et une relation binaire sur E. Dans les énoncés suivants, les variables quantifiées sont astreintes à E.

1. $\forall x \forall y \forall z((R(x,y) \wedge R(y,z)) \longrightarrow R(x,z))$
2. $\forall x \forall y(\neg R(x,y) \leftrightarrow (x = y \vee R(y,x)))$
3. $\forall x \neg R(x,x)$
4. $\forall x \exists y R(x,y)$
5. $\forall x \exists y R(y,x)$
6. $\forall x \forall y((\exists z(R(x,z) \wedge R(z,y))) \leftrightarrow R(x,y))$

Pour chacun des cas suivants, caractériser les énoncés précédents.

Exercice

On considère un ensemble E non vide et une relation binaire sur E. Dans les énoncés suivants, les variables quantifiées sont astreintes à E.

1. $\forall x \forall y \forall z((R(x, y) \wedge R(y, z)) \longrightarrow R(x, z))$
2. $\forall x \forall y(\neg R(x, y) \leftrightarrow (x = y \vee R(y, x)))$
3. $\forall x \neg R(x, x)$
4. $\forall x \exists y R(x, y)$
5. $\forall x \exists y R(y, x)$
6. $\forall x \forall y((\exists z(R(x, z) \wedge R(z, y))) \leftrightarrow R(x, y))$

Pour chacun des cas suivants, caractériser les énoncés précédents.

1. $E = \mathbb{N}$ et $R(x, y)$ signifie $x < y$

Exercice

On considère un ensemble E non vide et une relation binaire sur E. Dans les énoncés suivants, les variables quantifiées sont astreintes à E.

1. $\forall x \forall y \forall z ((R(x,y) \wedge R(y,z)) \rightarrow R(x,z))$
2. $\forall x \forall y (\neg R(x,y) \leftrightarrow (x = y \vee R(y,x)))$
3. $\forall x \neg R(x,x)$
4. $\forall x \exists y R(x,y)$
5. $\forall x \exists y R(y,x)$
6. $\forall x \forall y ((\exists z (R(x,z) \wedge R(z,y))) \leftrightarrow R(x,y))$

Pour chacun des cas suivants, caractériser les énoncés précédents.

1. $E = \mathbb{N}$ et $R(x,y)$ signifie $x < y$
2. $E = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ et $R(x,y)$ signifie $x \subsetneq y$

Exercice

On considère un ensemble E non vide et une relation binaire sur E. Dans les énoncés suivants, les variables quantifiées sont astreintes à E.

1. $\forall x \forall y \forall z ((R(x,y) \wedge R(y,z)) \longrightarrow R(x,z))$
2. $\forall x \forall y (\neg R(x,y) \leftrightarrow (x = y \vee R(y,x)))$
3. $\forall x \neg R(x,x)$
4. $\forall x \exists y R(x,y)$
5. $\forall x \exists y R(y,x)$
6. $\forall x \forall y ((\exists z (R(x,z) \wedge R(z,y))) \leftrightarrow R(x,y))$

Pour chacun des cas suivants, caractériser les énoncés précédents.

1. $E = \mathbb{N}$ et $R(x,y)$ signifie $x < y$
2. $E = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ et $R(x,y)$ signifie $x \subsetneq y$
3. $E = \mathbb{Q}$ et $R(x,y)$ signifie $x < y$.

Exercice

On considère un ensemble E non vide et une relation binaire sur E. Dans les énoncés suivants, les variables quantifiées sont astreintes à E.

1. $\forall x \forall y \forall z ((R(x,y) \wedge R(y,z)) \rightarrow R(x,z))$
2. $\forall x \forall y (\neg R(x,y) \leftrightarrow (x = y \vee R(y,x)))$
3. $\forall x \neg R(x,x)$
4. $\forall x \exists y R(x,y)$
5. $\forall x \exists y R(y,x)$
6. $\forall x \forall y ((\exists z (R(x,z) \wedge R(z,y))) \leftrightarrow R(x,y))$

Pour chacun des cas suivants, caractériser les énoncés précédents.

1. $E = \mathbb{N}$ et $R(x,y)$ signifie $x < y$
2. $E = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ et $R(x,y)$ signifie $x \subsetneq y$
3. $E = \mathbb{Q}$ et $R(x,y)$ signifie $x < y$.
4. $E = \mathbb{R}$ et $R(x,y)$ signifie $x < y$.

Exercice

On considère un ensemble E non vide et une relation binaire sur E. Dans les énoncés suivants, les variables quantifiées sont astreintes à E.

1. $\forall x \forall y \forall z((R(x,y) \wedge R(y,z)) \longrightarrow R(x,z))$
2. $\forall x \forall y(\neg R(x,y) \leftrightarrow (x = y \vee R(y,x)))$
3. $\forall x \neg R(x,x)$
4. $\forall x \exists y R(x,y)$
5. $\forall x \exists y R(y,x)$
6. $\forall x \forall y((\exists z(R(x,z) \wedge R(z,y))) \leftrightarrow R(x,y))$

Pour chacun des cas suivants, caractériser les énoncés précédents.

1. $E = \mathbb{N}$ et $R(x,y)$ signifie $x < y$
2. $E = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ et $R(x,y)$ signifie $x \subsetneq y$
3. $E = \mathbb{Q}$ et $R(x,y)$ signifie $x < y$.
4. $E = \mathbb{R}$ et $R(x,y)$ signifie $x < y$.
5. $E = \mathbb{R}^+$ et $R(x,y)$ signifie $x < y$.

Exercice

On considère un ensemble E non vide et une relation binaire sur E. Dans les énoncés suivants, les variables quantifiées sont astreintes à E.

1. $\forall x \forall y \forall z((R(x,y) \wedge R(y,z)) \longrightarrow R(x,z))$
2. $\forall x \forall y(\neg R(x,y) \leftrightarrow (x = y \vee R(y,x)))$
3. $\forall x \neg R(x,x)$
4. $\forall x \exists y R(x,y)$
5. $\forall x \exists y R(y,x)$
6. $\forall x \forall y((\exists z(R(x,z) \wedge R(z,y))) \leftrightarrow R(x,y))$

Pour chacun des cas suivants, caractériser les énoncés précédents.

1. $E = \mathbb{N}$ et $R(x,y)$ signifie $x < y$
2. $E = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ et $R(x,y)$ signifie $x \subsetneq y$
3. $E = \mathbb{Q}$ et $R(x,y)$ signifie $x < y$.
4. $E = \mathbb{R}$ et $R(x,y)$ signifie $x < y$.
5. $E = \mathbb{R}^+$ et $R(x,y)$ signifie $x < y$.
6. $E = \mathbb{R}$ et $R(x,y)$ signifie $x \geq y$.

Exercice

On considère un ensemble E non vide et une relation binaire sur E. Dans les énoncés suivants, les variables quantifiées sont astreintes à E.

1. $\forall x \forall y \forall z((R(x,y) \wedge R(y,z)) \rightarrow R(x,z))$
2. $\forall x \forall y(\neg R(x,y) \leftrightarrow (x = y \vee R(y,x)))$
3. $\forall x \neg R(x,x)$
4. $\forall x \exists y R(x,y)$
5. $\forall x \exists y R(y,x)$
6. $\forall x \forall y((\exists z(R(x,z) \wedge R(z,y))) \leftrightarrow R(x,y))$

Pour chacun des cas suivants, caractériser les énoncés précédents.

1. $E = \mathbb{N}$ et $R(x,y)$ signifie $x < y$
2. $E = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ et $R(x,y)$ signifie $x \subsetneq y$
3. $E = \mathbb{Q}$ et $R(x,y)$ signifie $x < y$.
4. $E = \mathbb{R}$ et $R(x,y)$ signifie $x < y$.
5. $E = \mathbb{R}^{+}$ et $R(x,y)$ signifie $x < y$.
6. $E = \mathbb{R}$ et $R(x,y)$ signifie $x \geq y$.
7. $E = \mathbb{R}^{+*}$ et $R(x,y)$ signifie $x < y$.

Formes normales pour le calcul des prédicats

Définition (Forme normale prénexe)

Une formule du calcul des prédicats est dite sous **forme normale prénexe** *si et seulement si elle s'écrit :*

$$\Box_1 x_1 \ldots \Box_n x_n \quad F$$

où $\Box_i$ *est* $\forall$ *ou* $\exists$ *et* F *est une formule sans quantificateurs.*

Formes normales pour le calcul des prédicats

Définition (Forme normale prénexe)

Une formule du calcul des prédicats est dite sous **forme normale prénexe** *si et seulement si elle s'écrit :*

$$\Box_1 x_1 \ldots \Box_n x_n \quad F$$

où $\Box_i$ est $\forall$ ou $\exists$ et F est une formule sans quantificateurs.

Théorème

Toute formule du calcul des prédicats est équivalente à une formule sous forme prénexe.

Propriétés des quantificateurs

Quantificateur = signe mutificateur

Les quantificateurs $\forall$ et $\exists$ sont des signes **mutificateurs**. Si y est une variable n'ayant aucune occurrence dans $F(x, x_1, \ldots, x_n)$, on a

$$\vdash \forall x F(x, x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \forall y F(y, x_1, \ldots, x_n)$$

Propriétés des quantificateurs

Quantificateur = signe mutificateur

Les quantificateurs $\forall$ et $\exists$ sont des signes **mutificateurs**. Si y est une variable n'ayant aucune occurrence dans $F(x, x_1, \ldots, x_n)$, on a

$$\vdash \forall x F(x, x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \forall y F(y, x_1, \ldots, x_n)$$

Exemple

Dans le corps $\mathbb{R}$ des réels, $\forall x(x \times y = y)$ équivaut $\forall z(z \times y) = y$ mais pas à $\forall y(y \times y = y)$.

Propriétés des quantificateurs

Quantificateur = signe mutificateur

Les quantificateurs $\forall$ et $\exists$ sont des signes **mutificateurs**. Si y est une variable n'ayant aucune occurrence dans $F(x, x_1, \ldots, x_n)$, on a

$$\vdash \forall x F(x, x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \forall y F(y, x_1, \ldots, x_n)$$

Exemple

Dans le corps $\mathbb{R}$ des réels, $\forall x(x \times y = y)$ équivaut $\forall z(z \times y) = y$ mais pas à $\forall y(y \times y = y)$.

NB : il existe d'autres signes mutificateurs :

$$f : \square \mapsto f(x) \qquad \bigcap_{\square \in I} \qquad \sum_{\square \in I} \qquad \int_a^b \ldots d\square \qquad \{\square \in I | \ldots\}$$

Propriétés des quantificateurs

Définition (Dualité)

Les quantificateurs $\forall$ *et* $\exists$ *sont* **duaux** *l'un de l'autre. Ainsi, pour toute formule* F*, on a :*

$$\vdash \forall x F \leftrightarrow \neg\exists x \neg F \quad \text{ou encore} \quad \neg\forall x F \leftrightarrow \exists x \neg F$$

$$\vdash \exists x F \leftrightarrow \neg\forall x \neg F \quad \text{ou encore} \quad \neg\exists x F \leftrightarrow \forall x \neg F$$

Propriétés des quantificateurs

Définition (Dualité)

Les quantificateurs $\forall$ et $\exists$ sont **duaux** *l'un de l'autre. Ainsi, pour toute formule F, on a :*

$$\vdash \forall x F \leftrightarrow \neg \exists x \neg F \quad \text{ou encore} \quad \neg \forall x F \leftrightarrow \exists x \neg F$$

$$\vdash \exists x F \leftrightarrow \neg \forall x \neg F \quad \text{ou encore} \quad \neg \exists x F \leftrightarrow \forall x \neg F$$

Exemple

- Considérons l'énoncé $\forall x \forall y, f(x) = f(y) \rightarrow x = y$.
- La négation de cet énoncé est : $\exists x \exists y \neg (f(x) = f(y) \rightarrow x = y)$
- Ce qui donne (propriété de l'implication) :
  $\exists x \exists y (f(x) = f(y) \wedge x \neq y)$

Propriétés des quantificateurs

Commutativité

$$\vdash \quad \forall x \forall y F \quad \leftrightarrow \quad \forall y \forall x F$$

$$\vdash \quad \exists x \exists y F \quad \leftrightarrow \quad \exists y \exists x F$$

Propriétés des quantificateurs

Commutativité

$$\vdash \quad \forall x \forall y F \quad \leftrightarrow \quad \forall y \forall x F$$

$$\vdash \quad \exists x \exists y F \quad \leftrightarrow \quad \exists y \exists x F$$

NB : attention à la différence entre $\forall x \exists y$ et $\exists y \forall x$

Propriétés des quantificateurs

Commutativité

$$\vdash \quad \forall x \forall y F \quad \leftrightarrow \quad \forall y \forall x F$$

$$\vdash \quad \exists x \exists y F \quad \leftrightarrow \quad \exists y \exists x F$$

Distributivité

$$\vdash \quad (\forall x F) \wedge (\forall x H) \quad \leftrightarrow \quad \forall x (F \wedge H)$$

$$\vdash \quad (\exists x F) \vee (\exists x H) \quad \leftrightarrow \quad \exists x (F \vee H)$$

Propriétés des quantificateurs

Exercice

Comparer $(\forall x F) \vee (\forall x H)$ et $\forall x (F \vee H)$. De même pour : $(\exists x F) \wedge (\exists x H)$ et $\exists x (F \wedge H)$.

Propriétés des quantificateurs

Exercice

Comparer $(\forall x F) \vee (\forall x H)$ et $\forall x(F \vee H)$. De même pour : $(\exists x F) \wedge (\exists x H)$ et $\exists x(F \wedge H)$.

Correction

$$(\forall x F) \vee (\forall x H) \quad \rightarrow \quad \forall x(F \vee H)$$

$$\exists x(F \wedge H) \quad \rightarrow \quad (\exists x F) \wedge (\exists x H)$$

Propriétés des quantificateurs

Propriétés à retenir

Si x ne possède aucune occurrence dans H, on a :

- $\vdash ((\forall x F) \vee H) \quad \leftrightarrow \quad \forall x(F \vee H)$
- $\vdash ((\exists x G) \wedge H) \quad \leftrightarrow \quad \exists x(F \wedge H)$
- $\vdash (\forall x H) \quad \leftrightarrow \quad H$
- $\vdash (\exists x H) \quad \leftrightarrow \quad H$

Mise sous forme prénexe

Les étapes d'une mise sous forme prénexe

1. Éliminer les connecteurs $\rightarrow$ et $\leftrightarrow$
2. Transporter les symboles de négation devant les formules atomiques
3. Renommer si nécessaire les variables pour pouvoir utiliser les propriétés de $\forall$ et $\exists$
4. Transporter les quantificateurs devant la formule de façon à obtenir la forme prénexe.

Exercice

Mettre la formule suivante sous forme prénexe :

$$(\forall x \exists y \forall t R(x, z, y)) \rightarrow (\exists x \forall y \exists t S(x, z, t))$$

Exercice

Mettre la formule suivante sous forme prénexe :

$$(\forall x \exists y \forall t R(x, z, y)) \rightarrow (\exists x \forall y \exists t S(x, z, t))$$

Correction

$\exists x \forall y \exists t (\neg R(x, z, y) \vee S(x, z, t))$

Exercice

Mettre la formule suivante sous forme prénexe :

$$(\forall x \exists y \forall t R(x, z, y)) \rightarrow (\exists x \forall y \exists t S(x, z, t))$$

Exercice

Mettre la formule suivante sous forme prénexe :

$$((\exists x A(x) \rightarrow \exists y B(y)) \rightarrow \exists z C(z)) \rightarrow \exists t D(t)$$

Exercice

Mettre la formule suivante sous forme prénexe :

$$(\forall x \exists y \forall t R(x, z, y)) \rightarrow (\exists x \forall y \exists t S(x, z, t))$$

Exercice

Mettre la formule suivante sous forme prénexe :

$$((\exists x A(x) \rightarrow \exists y B(y)) \rightarrow \exists z C(z)) \rightarrow \exists t D(t)$$

Correction

$\exists y \forall x (((\neg A(x) \vee B(y)) \wedge \neg C(x)) \vee D(y))$

Exercice

Mettre les formules suivantes sous forme prénexe :

$$(\forall x \exists y \forall t R(x, z, t)) \rightarrow (\exists x \forall y \exists t S(x, z, t))$$

$$(\forall x \exists z \forall t R(x, z, t)) \rightarrow (\exists x \forall z \exists t S(x, z, t))$$

Exercice

Mettre les formules suivantes sous forme prénexe :

$$(\forall x \exists y \forall t R(x,z,t)) \rightarrow (\exists x \forall y \exists t S(x,z,t))$$

$$(\forall x \exists z \forall t R(x,z,t)) \rightarrow (\exists x \forall z \exists t S(x,z,t))$$

Correction

On obtient $\exists x \exists t(\neg R(x,z,t) \vee S(x,z,t))$ **et** $\exists x \forall z \forall z' \exists t(\neg R(x,z,t) \vee S(x,z',t))$

Formes normales pour le calcul des prédicats

Définition

Forme de Skolem ➟ *Une formule F sous forme* **prénexe** *est dite sous* **forme de Skolem** *si et seulement si et seulement si F s'écrit sous la forme :*

$$\exists x_i \ldots \exists x_n \forall y_1 \ldots \forall y_m A(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_p)$$

où A est un énoncé sans quantificateur.

Formes normales pour le calcul des prédicats

Définition

Forme de Skolem Une formule F sous forme **prénexe** *est dite sous* **forme de Skolem** *si et seulement si et seulement si F s'écrit sous la forme :*

$$\exists x_i \ldots \exists x_n \forall y_1 \ldots \forall y_m A(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_p)$$

où A est un énoncé sans quantificateur.

NB : lorsque les quantificateurs universels précèdent les quantificateurs existentiels, on parle de forme de Herbrand.

Formes normales pour le calcul des prédicats

Définition

Forme de Skolem Une formule F sous forme **prénexe** est dite sous **forme de Skolem** si et seulement si et seulement si F s'écrit sous la forme :

$$\exists x_i \ldots \exists x_n \forall y_1 \ldots \forall y_m A(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_p)$$

où A est un énoncé sans quantificateur.

Théorème

Toute formule du calcul des prédicats est équivalente à une formule sous forme de Skolem.

Formes normales pour le calcul des prédicats

Fonctions de Skolem

Concrètement, lorsqu'on rencontre l'expression $\forall x \exists y A(x, y)$:

- on remplace y par une fonction $f : E \longrightarrow E$, $x \mapsto y$
- on obtient ainsi l'expression : $\exists f \forall x A(x, f(x))$.

f est appelée une **fonction de Skolem**.

Formes normales pour le calcul des prédicats

Fonctions de Skolem

Concrètement, lorsqu'on rencontre l'expression $\forall x \exists y A(x, y)$:

- on remplace y par une fonction $f : E \longrightarrow E,\ x \longmapsto y$
- on obtient ainsi l'expression : $\exists f \forall x A(x, f(x))$.

f est appelée une **fonction de Skolem**.

NB : on dit aussi qu'on « skolémise » la variable y.

Formes normales pour le calcul des prédicats

Fonctions de Skolem

Concrètement, lorsqu'on rencontre l'expression $\forall x \exists y A(x, y)$:

- on remplace y par une fonction $f : E \to E$, $x \mapsto y$
- on obtient ainsi l'expression : $\exists f \forall x A(x, f(x))$.

f est appelée une **fonction de Skolem**.

Exercice

Formaliser « f est continue » et mettre l'énoncé sous forme de Skolem.
Même question pour « f est uniformément continue ».

Formes normales pour le calcul des prédicats

Définition (Forme standard de Skolem)

Une formule sous forme de Skolem est dite sous **forme standard de Skolem** *si et seulement si la partie sans quantificateurs est sous forme normale conjonctive.*

Formes normales pour le calcul des prédicats

Définition (Forme standard de Skolem)

Une formule sous forme de Skolem est dite sous **forme standard de Skolem** *si et seulement si la partie sans quantificateurs est sous forme normale conjonctive.*

Théorème

Toute formule du calcul des prédicats est équivalente à une formule sous forme standard de Skolem.

Définitions

- les **littéraux** dans le calcul des prédicats sont les formules atomiques ou atomes (appelés littéraux **positifs**) ou leurs négations (appelées littéraux **négatifs**).
- une **clause** est une disjonction finie de littéraux.

Définition (Forme clausale)

La **forme clausale** *d'une formule F est constituée de l'ensemble des clauses de la forme standard de Skolem de cette formule où :*

1. *les variables quantifiées universellement sont conservées et les fonctions (y compris les fonctions de Skolem) ne sont pas modifiées*
2. *les variables quantifiées existentiellement sont remplacées par des constantes (toutes différentes)*
3. *les variables sont renommées d'une clause à l'autre*

Formes clausales

Exercice

Mettre sous forme clausale la formule suivante :

$$\forall x \exists y \exists z ((\neg P(x,y) \wedge Q(x,z)) \vee R(x,y,z))$$

Exercice

Mettre sous forme clausale la formule suivante :

$$\forall x \exists y p(x,y) \rightarrow \exists y \forall x p(x,y)$$

Les dragons

Exercice

Considérons les énoncés suivants :

1. Tous les enfants d'un dragon peuvent voler
2. Archie a au moins un parent vert ou rose
3. Un dragon est heureux si tous ses enfants peuvent voler
4. Les dragons verts peuvent voler
5. Un dragon est vert s'il a au moins un parent vert ou rose

Formaliser les énoncés ❶ à ❺ puis mettre sous forme clausale la conjonction des énoncés ❸ à ❺.

Plan

Conséquence logique et systèmes d'axiomes

Définition (Conséquence logique)

Soit $\mathcal{A}$ un ensemble de formules closes de $\mathcal{L}$, et F une formule close (ou sa clôture) de $\mathcal{L}$.
On dit que F est **conséquence logique** *de $\mathcal{A}$ si toute réalisation de F qui satisfait $\mathcal{A}$ satisfait aussi F.*
On note $\mathcal{A} \vdash F$

Conséquence logique et systèmes d'axiomes

Définition (Conséquence logique)

Soit $\mathcal{A}$ un ensemble de formules closes de $\mathcal{L}$, et F une formule close (ou sa clôture) de $\mathcal{L}$.
On dit que F est **conséquence logique** *de $\mathcal{A}$ si toute réalisation de F qui satisfait $\mathcal{A}$ satisfait aussi F.*
On note $\mathcal{A} \vdash F$

Définition (Système d'axiomes)

Un ensemble de formules closes est appelé **système d'axiomes**.

Systèmes d'axiomes

Exemple

Le système d'axiomes suivant définit les **entiers naturels**.

1. $\forall x \exists y (y = f(x) \wedge \forall z (z = f(x) \rightarrow y = z))$
2. $\neg(\exists x f(x) = 0)$
3. $\forall x (\neg(x = 0) \rightarrow (\exists y (y = g(x) \wedge \forall z (z = g(x) \rightarrow y = z))))$

Toute interprétation $\mathcal{I}$ validant ces axiomes sera appelée « entiers naturels ».

Systèmes d'axiomes

Exemple

Le système d'axiomes suivant définit les **entiers naturels**.

1. $\forall x \exists y (y = f(x) \wedge \forall z (z = f(x) \rightarrow y = z))$
2. $\neg(\exists x f(x) = 0)$
3. $\forall x (\neg(x = 0) \rightarrow (\exists y (y = g(x) \wedge \forall z (z = g(x) \rightarrow y = z))))$

Toute interprétation $\mathcal{I}$ validant ces axiomes sera appelée « entiers naturels ».

NB : f représente la fonction successeur immédiat et g la fonction prédécesseur immédiat.

Exercice

Préciser un système d'axiomes pour la **structure de groupe**. On utilisera un symbole fonctionnel $f_{/2}$ et un symbole de constante e.

Exercice

Préciser un système d'axiomes pour la **structure de groupe**. On utilisera un symbole fonctionnel $f_{/2}$ et un symbole de constante e.

Correction

Pour avoir un groupe, il faut et il suffit que f soit associative, f possède un élément neutre (e) et que chaque élément possède un symétrique pour f. Ceci s'écrit :

1. associativité :
   $\forall x \forall y \forall z f(f(x,y),z) = f(x, f(y,z))$
2. élément neutre : $\forall x f(e,x) = x \wedge \forall x f(x,e) = x$
3. symétrique :
   $\forall x \exists y f(x,y) = f(y,x) \wedge \forall x \exists y f(x,y) = e$

Interlude : la théorie des ensembles

Exemple

Les axiomes de la théorie des ensembles

1. $\forall x \forall y (\forall z ((z \in x) \leftrightarrow (z \in y)) \rightarrow (z = y))$
2. $\forall x \forall y \exists z \forall t (t \in z \leftrightarrow (t = x \vee t = y))$
3. $\forall x \exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow \exists t (t \in x \wedge z \in t))$
4. $\forall x \exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow (\forall t \in z \rightarrow t \in x))$
5. $\exists x \forall y \neg (y \in x)$
6. $\exists x (\varnothing \in x \wedge \forall y (y \in x \rightarrow (y \cup \{y\}) \in x))$
7. $\forall x \exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow z \in x \wedge P(x))$
8. $\forall a \exists x \forall y (y \in a \rightarrow (\exists z A(y, z) \rightarrow \exists z \in x A(y, z)))$
9. $\forall x \exists y (y \in x \rightarrow y \cap x = \varnothing)$
10. $\forall x \in a \exists z A(x, z) \rightarrow \exists y \forall x \in a, A(x, y(x))$

Différentes axiomatiques

Définition (Axiomatiques)

- *Le système d'axiomes ❶–❾ est appelé théorie des ensembles de* **Zermelo-Fraenkel**, *on le note ZF.*
- *Le système ❶–❼ augmenté de l'axiome ❾ est la théorie des ensembles de* **Zermelo**, *on le note Z.*
- *Le système ZF augmenté de l'axiome ❿ est généralement noté ZFC.*
- *Le système d'axiomes ❶–❹ augmenté de l'axiome ❼ est l'***axiomatique de Schwartz**

Différentes axiomatiques

Définition (Axiomatiques)

- *Le système d'axiomes ❶–❾ est appelé théorie des ensembles de* **Zermelo-Fraenkel**, *on le note ZF.*
- *Le système ❶–❼ augmenté de l'axiome ❾ est la théorie des ensembles de* **Zermelo**, *on le note Z.*
- *Le système ZF augmenté de l'axiome ❿ est généralement noté ZFC.*
- *Le système d'axiomes ❶–❹ augmenté de l'axiome ❼ est l'***axiomatique de Schwartz**

NB : la théorie ZF n'est pas axiomatisée de façon finie. L'axiome ❽ représente une famille infinie d'axiomes.

Différentes axiomatiques

Définition (Axiomatiques)

- *Le système d'axiomes ❶–❾ est appelé théorie des ensembles de* **Zermelo-Fraenkel***, on le note ZF.*
- *Le système ❶–❼ augmenté de l'axiome ❾ est la théorie des ensembles de* **Zermelo***, on le note Z.*
- *Le système ZF augmenté de l'axiome ❿ est généralement noté ZFC.*
- *Le système d'axiomes ❶–❹ augmenté de l'axiome ❼ est l'***axiomatique de Schwartz**

NB : la théorie ZF n'est pas axiomatisée de façon finie. L'axiome ❽ représente une famille infinie d'axiomes.

NB : l'axiome ❿ est l'axiome du choix.

Les entiers : modèle de Schwartz

Définition (Développement dyadique)

Le développement ***dyadique*** *d'un entier naturel est son développement en puissance de 2.*

Les entiers : modèle de Schwartz

Définition (Développement dyadique)

Le développement **dyadique** *d'un entier naturel est son développement en puissance de 2.*

Exemple

$$7 = 2^2 + 2^1 + 2^0$$

7 est donc représenté par l'ensemble $\{0, 1, 2\}$.

Les entiers : modèle de Schwartz

Définition (Développement dyadique)

Le développement **dyadique** *d'un entier naturel est son développement en puissance de 2.*

Exemple

$$7 = 2^2 + 2^1 + 2^0$$

7 est donc représenté par l'ensemble $\{0, 1, 2\}$.

Exercice

Quel est l'ensemble noté 57 ?

Les entiers : modèle de Schwartz

Définition (Développement dyadique)

Le développement **dyadique** *d'un entier naturel est son développement en puissance de 2.*

Exemple

$$7 = 2^2 + 2^1 + 2^0$$

7 est donc représenté par l'ensemble $\{0, 1, 2\}$.

Exercice

Quel est l'ensemble noté 57 ?

Correction

$$57 = \{0, 3, 4, 5\}$$

Modèle de Schwartz

Définition (Paire)

On définit la **paire** (a, b) *par l'ensemble* $\{\{a\}, \{a, b\}\}$.

Modèle de Schwartz

Définition (Paire)

On définit la **paire** (a, b) *par l'ensemble* $\{\{a\}, \{a, b\}\}$.

Exemple

$$(1, 2) \quad = \quad \{\{1\}, \{1, 2\}\} \quad = \quad \{2, 6\} \quad = \quad 68$$

Modèle de Schwartz

Définition (Paire)

On définit la **paire** (a, b) *par l'ensemble* $\{\{a\}, \{a, b\}\}$.

Exemple

$$(1, 2) \quad = \quad \{\{1\}, \{1, 2\}\} \quad = \quad \{2, 6\} \quad = \quad 68$$

Exercice

À quoi correspond la paire $(2, 1)$?

Modèle de Schwartz

Définition (Paire)

On définit la **paire** (a,b) *par l'ensemble* $\{\{a\},\{a,b\}\}$.

Exemple

$$(1,2) \quad = \quad \{\{1\},\{1,2\}\} \quad = \quad \{2,6\} \quad = \quad 68$$

Exercice

À quoi correspond la paire $(2,1)$?

Correction

$$(2,1) \quad = \quad \{\{2\},\{2,1\}\} \quad = \quad \{4,6\} \quad = \quad 80$$

Modèle de Schwartz

Convention

L'ensemble vide est noté 0

Modèle de Schwartz

Convention

L'ensemble vide est noté 0

Exercice

Que vaut $25 \cap 57$?

Modèle de Schwartz

Convention

L'ensemble vide est noté 0

Exercice

Que vaut $25 \cap 57$?

Correction

$$25 \cap 57 = \{0,3,4\} \cap \{0,3,4,5\} = \{0,3,4\} = 25$$

Modèle de Schwartz

Convention

L'ensemble vide est noté 0

Exercice

Que vaut $25 \cap 57$?

Exercice

Que vaut $\mathcal{P}(5)$?

Modèle de Schwartz

Convention

L'ensemble vide est noté 0

Exercice

Que vaut $25 \cap 57$?

Exercice

Que vaut $\mathcal{P}(5)$?

Correction

$\mathcal{P}(5) = \mathcal{P}(\{0, 2\}) = \{\emptyset, \{0\}, \{2\}, \{0, 2\}\}$
$\mathcal{P}(5) = \{0, 1, 4, 5\} = 51$

Modèle de Schwartz

Définition (Opérateur $\mathbb{U}$)

On note $\mathbb{U}x$ l'union des éléments de x

Modèle de Schwartz

Définition (Opérateur $\mathbb{U}$)

On note $\mathbb{U}x$ l'union des éléments de x

Exercice

Que valent $\mathbb{U}11$? et $\mathbb{U}8$?

Modèle de Schwartz

Définition (Opérateur $\mathbb{U}$)

On note $\mathbb{U}x$ l'union des éléments de x

Exercice

Que valent $\mathbb{U}11$? et $\mathbb{U}8$?

Exercice

Que vaut $\mathbb{U}\mathcal{P}(x)$?

Modèle de Schwartz

Définition (Produit cartésien)

La notion de paire permet de définir la notion de **produit cartésien**

Modèle de Schwartz

Définition (Produit cartésien)

La notion de paire permet de définir la notion de **produit cartésien**

Exemple

$$\begin{aligned} 2 \times 3 &= \{1\} \times \{0, 1\} \\ &= \{(1,0),(1,1)\} \\ &= \{\{\{1\},\{0,1\}\},\{\{1\}\}\} \\ &= \{\{2,3\},\{2\}\} \\ &= \{12, 4\} \\ &= 4112 \end{aligned}$$

Modèle de Schwartz

Définition (Triplets et applications)

- *on définit un* **triplet** (a, b, f) *par la paire* $(a, (b, f))$
- *un triplet peut être considéré comme une* **application** *:*
  - a *est l'ensemble de départ*
  - b *est l'ensemble d'arrivée*
  - f *représente les associations de valeurs pour l'application sous forme de paires*

Modèle de Schwartz

Définition (Triplets et applications)

- *on définit un* **triplet** (a, b, f) *par la paire* $(a, (b, f))$
- *un triplet peut être considéré comme une* **application** *:*
  - a *est l'ensemble de départ*
  - b *est l'ensemble d'arrivée*
  - f *représente les associations de valeurs pour l'application sous forme de paires*

Exemple

L'injection canonique de $2 = \{1\}$ dans $3 = \{0, 1\}$ est définie par le triplet $(2, 3, 16)$ car $f = \{(1, 1)\} = \{4\} = 16$.

Modèle de Schwartz

Définition (Triplets et applications)

- *on définit un* **triplet** (a, b, f) *par la paire* $(a, (b, f))$
- *un triplet peut être considéré comme une* **application** *:*
  - a *est l'ensemble de départ*
  - b *est l'ensemble d'arrivée*
  - f *représente les associations de valeurs pour l'application sous forme de paires*

Exemple

L'injection canonique de $2 = \{1\}$ dans $3 = \{0, 1\}$ est définie par le triplet $(2, 3, 16)$ car $f = \{(1, 1)\} = \{4\} = 16$.

Exercice

34 est une application, laquelle ?

Retour au calcul des prédicats

Définition (Univers de Herbrand)

Soit $\mathcal{C}$ un ensemble de clauses. Considérons H_0 ensemble des symboles de constantes ayant au moins une occurrence dans $\mathcal{C}$. On définit H_i ensemble de termes clos de $\mathcal{C}$ de niveau i par :

$$H_i = H_{i-1} \cup \bigcup_{f_{/n}, t_j \in H_{i-1}} \{f(t_1, \ldots, t_n)\}$$

$H_\infty = \lim_{i \to \infty} H_i$ *est appelé* **univers de Herbrand** *de* $\mathcal{C}$.

Retour au calcul des prédicats

Définition (Univers de Herbrand)

Soit $\mathcal{C}$ un ensemble de clauses. Considérons H_0 ensemble des symboles de constantes ayant au moins une occurrence dans $\mathcal{C}$. On définit H_i ensemble de termes clos de $\mathcal{C}$ de niveau i par :

$$H_i = H_{i-1} \cup \bigcup_{f_{/n}, t_j \in H_{i-1}} \{f(t_1, \ldots, t_n)\}$$

$H_\infty = \lim_{i \to \infty} H_i$ *est appelé* **univers de Herbrand** *de $\mathcal{C}$.*

NB : si aucune constante n'apparaît dans $\mathcal{C}$, on pose $H_0 = \{a\}$.

Univers de Herbrand

Exemple

Soit $\mathcal{C} = \{P(a), \neg P(x) \vee P(f(x))\}$. On a :

$$
\begin{array}{lcl}
H_0 & = & \{a\} \\
H_1 & = & H_0 \cup \{f(a)\} = \{a, f(a)\} \\
\vdots & & \\
H_i & = & \{a, \ldots, f^{i-1}(a)\} \cup \{f(a), f(f(a)), \ldots, f^i(a)\} = \{f^j(a) | j \in [i]\}
\end{array}
$$

$H_\infty = \lim_{i \to \infty} H_i$ est l'univers de Herbrand.
$H_\infty = \{f^k(a) | k \in \mathbb{N}\}$.

Univers de Herbrand

Exercice

Quel est l'univers de Herbrand de l'ensemble de clauses suivant : $\mathcal{C} = \{P(f(x)), R(a, g(y), b)\}$

Univers de Herbrand

Exercice

Quel est l'univers de Herbrand de l'ensemble de clauses suivant : $\mathcal{C} = \{P(f(x)), R(a, g(y), b)\}$

Correction

$$
\begin{array}{rcl}
H_0 & = & \{a, b\} \\
H_1 & = & \{a, b\} \cup \{f(a), f(b), g(a), g(b)\} \\
H_2 & = & H_1 \cup \{f^2(a), f^2(b), g^2(a), g^2(b), f(g(a)), \\
 & & \quad f(g(b)), g(f(a)), g(f(b))\} \\
\vdots & & \\
H_i & = & \{f^n(g^p(b)), f^k(g^\ell(a)) \mid \forall x \in \{n, p, k, \ell\}, x \leq i\}
\end{array}
$$

$$H_\infty = \{f^n(g^p(b)), f^k(g^\ell(a)) \mid \forall (n, p, k, \ell) \in \mathbb{N}^4\}.$$

Vocabulaire

Définition (Atome de Herbrand)

On appelle **atomes de Herbrand** *associés à un ensemble de clauses $\mathcal{C}$ les atomes obtenus en remplaçant dans les atomes de $\mathcal{C}$ les variables par des éléments de H_∞.*

Vocabulaire

Définition (Atome de Herbrand)

On appelle **atomes de Herbrand** *associés à un ensemble de clauses $\mathcal{C}$ les atomes obtenus en remplaçant dans les atomes de $\mathcal{C}$ les variables par des éléments de H_∞.*

Définition (Base de Herbrand)

L'ensemble des atomes de Herbrand est appelé **base de Herbrand** *ou « atom set ».*

Vocabulaire

Définition (Atome de Herbrand)

On appelle **atomes de Herbrand** *associés à un ensemble de clauses $\mathcal{C}$ les atomes obtenus en remplaçant dans les atomes de $\mathcal{C}$ les variables par des éléments de H_∞.*

Définition (Base de Herbrand)

L'ensemble des atomes de Herbrand est appelé **base de Herbrand** *ou « atom set ».*

Définition (Réalisation de base)

On appelle **réalisation** *(ou* **interprétation** *ou* **instance***)* **de base** *d'une clause C, une clause obtenue en remplaçant les variables de C par des éléments de H_∞.*

Exemple

Soit $\mathcal{C} = \{P(a, f(x)), Q(b) \vee \neg R(g(y))\}$.

Exemple

Soit $\mathcal{C} = \{P(a, f(x)), Q(b) \vee \neg R(g(y))\}$.

- $H_\infty = \{a, b, f(a), f(b), g(a), g(b), f(g(a)), \ldots\}$

Exemple

Soit $\mathcal{C} = \{P(a, f(x)), Q(b) \vee \neg R(g(y))\}$.

- $H_\infty = \{a, b, f(a), f(b),\ g(a), g(b), f(g(a)), \ldots\}$
- atomes de Herbrand : $P(a, f(a))$, $P(a, f(g(b)))$, $Q(b)$, $R(g(a))$

Exemple

Soit $\mathcal{C} = \{P(a, f(x)), Q(b) \vee \neg R(g(y))\}$.

- $H_\infty = \{a, b, f(a), f(b), g(a), g(b), f(g(a)), \ldots\}$
- atomes de Herbrand : $P(a, f(a))$, $P(a, f(g(b)))$, $Q(b)$, $R(g(a))$
- interprétations de base : $P(a, f(a))$, $Q(b) \vee \neg R(g(a))$, $Q(b) \vee \neg R(g(b))$.

Exemple

Soit $\mathcal{C} = \{P(a, f(x)), Q(b) \vee \neg R(g(y))\}$.

- $H_\infty = \{a, b, f(a), f(b), g(a), g(b), f(g(a)), \ldots\}$
- atomes de Herbrand : $P(a, f(a))$, $P(a, f(g(b)))$, $Q(b)$, $R(g(a))$
- interprétations de base : $P(a, f(a))$, $Q(b) \vee \neg R(g(a))$, $Q(b) \vee \neg R(g(b))$.

Définition (Système de Herbrand)

On appelle **système de Herbrand** *associé à un ensemble de clauses $\mathcal{C}$, l'ensemble des interprétations de base des clauses de $\mathcal{C}$.*

Théorème de Herbrand

Théorème (Théorème de Herbrand – non démontré)

Un ensemble $\mathcal{C}$ de clauses est insatisfiable si et seulement si il existe un ensemble fini $\mathcal{C}'$ de réalisations de base insatisfiable.

Théorème de Herbrand

Théorème (Théorème de Herbrand – non démontré)

Un ensemble $\mathcal{C}$ de clauses est insatisfiable si et seulement si il existe un ensemble fini $\mathcal{C}'$ de réalisations de base insatisfiable.

Exemple

Soit $\mathcal{C} = \{P(x), \neg P(f(a))\}$.
$\mathcal{C}' = \{P(f(a)), \neg P(f(a))\}$ est un ensemble de réalisations de base insatisfiable.

Théorème de Herbrand

Théorème (Théorème de Herbrand – non démontré)

Un ensemble $\mathcal{C}$ de clauses est insatisfiable si et seulement si il existe un ensemble fini $\mathcal{C}'$ de réalisations de base insatisfiable.

Corollaire

Un ensemble $\mathcal{C}$ de clauses est satisfiable si et seulement si tout ensemble fini de réalisations de base est satisfiable.

Principales applications du théorème de Herbrand

1. Preuve qu'une formule est universellement valide

Principales applications du théorème de Herbrand

1. Preuve qu'une formule est universellement valide
   $\longrightarrow$ *on montre que sa négation est insatisfiable*

Principales applications du théorème de Herbrand

1. Preuve qu'une formule est universellement valide
   $\longrightarrow$ *on montre que sa négation est insatisfiable*
2. Validation de raisonnement

Principales applications du théorème de Herbrand

1. Preuve qu'une formule est universellement valide
   $\longrightarrow$ *on montre que sa négation est insatisfiable*
2. Validation de raisonnement
   $\longrightarrow$ *on montre que les prémisses et la négation de la conclusion forment un ensemble de clauses insatisfiable*

Exemple – preuve de validité

Montrons que la formule suivante est universellement valide :

$$F = \forall x \exists y \forall z (R(x, z) \rightarrow R(x, y))$$

Exemple – preuve de validité

Montrons que la formule suivante est universellement valide :

$$F = \forall x \exists y \forall z (R(x,z) \rightarrow R(x,y))$$

Supposons qu'elle ne le soit pas. Il existe alors une interprétation $\mathcal{I}$ et une valuation telle que la négation soit vraie.

Exemple – preuve de validité

Montrons que la formule suivante est universellement valide :

$$F = \forall x \exists y \forall z (R(x,z) \rightarrow R(x,y))$$

Supposons qu'elle ne le soit pas. Il existe alors une interprétation $\mathcal{I}$ et une valuation telle que la négation soit vraie.

- On a : $\neg F = \exists x \forall y \exists z (R(x,z) \land \neg R(x,y))$

Exemple – preuve de validité

Montrons que la formule suivante est universellement valide :

$$F = \forall x \exists y \forall z (R(x,z) \rightarrow R(x,y))$$

Supposons qu'elle ne le soit pas. Il existe alors une interprétation $\mathcal{I}$ et une valuation telle que la négation soit vraie.

- On a : $\neg F = \exists x \forall y \exists z (R(x,z) \wedge \neg R(x,y))$
- La mise sous forme standard de Skolem de $\neg F$ donne :

$$\exists x \exists f \forall y (R(x, f(y)) \wedge \neg R(x,y))$$

Exemple – preuve de validité

Montrons que la formule suivante est universellement valide :

$$F = \forall x \exists y \forall z (R(x,z) \rightarrow R(x,y))$$

Supposons qu'elle ne le soit pas. Il existe alors une interprétation $\mathcal{I}$ et une valuation telle que la négation soit vraie.

- On a : $\neg F = \exists x \forall y \exists z (R(x,z) \wedge \neg R(x,y))$
- La mise sous forme standard de Skolem de $\neg F$ donne :
  $$\exists x \exists f \forall y (R(x, f(y)) \wedge \neg R(x,y))$$
- La forme clausale de $\neg F$ est : $\mathcal{C}_{\neg F} = \{R(a, f(y_1)), \neg R(a, y_2)\}$

Exemple – preuve de validité

Montrons que la formule suivante est universellement valide :

$$F = \forall x \exists y \forall z (R(x,z) \rightarrow R(x,y))$$

Supposons qu'elle ne le soit pas. Il existe alors une interprétation $\mathcal{I}$ et une valuation telle que la négation soit vraie.

- On a : $\neg F = \exists x \forall y \exists z (R(x,z) \wedge \neg R(x,y))$
- La mise sous forme standard de Skolem de $\neg F$ donne :
  $$\exists x \exists f \forall y (R(x, f(y)) \wedge \neg R(x,y))$$
- La forme clausale de $\neg F$ est : $\mathcal{C}_{\neg F} = \{R(a, f(y_1)), \neg R(a, y_2)\}$

L'ensemble de réalisations de base $\mathcal{C}' = \{R(a, f(a)), \neg R(a, f(a))\}$ est insatisfiable. La négation de F ne peut donc être vraie, la formule est donc universellement valide.

Exemple – validation de raisonnement

On appliquera la méthode suivante :

Exemple – validation de raisonnement

On appliquera la méthode suivante :

1. formaliser prémisses et **négation(s)** de conclusion(s)

Exemple – validation de raisonnement

On appliquera la méthode suivante :

1. formaliser prémisses et **négation(s)** de conclusion(s)
2. déterminer l'ensemble des clauses associées c'est-à-dire mettre la conjonction des prémisses et conclusion(s) sous forme clausale

Exemple – validation de raisonnement

On appliquera la méthode suivante :

1. formaliser prémisses et **négation(s)** de conclusion(s)
2. déterminer l'ensemble des clauses associées c'est-à-dire mettre la conjonction des prémisses et conclusion(s) sous forme clausale
3. expliciter un ensemble de réalisations de base insatisfiable pour valider le raisonnement

Exemple – validation de raisonnement

On appliquera la méthode suivante :

1. formaliser prémisses et **négation(s)** de conclusion(s)
2. déterminer l'ensemble des clauses associées c'est-à-dire mettre la conjonction des prémisses et conclusion(s) sous forme clausale
3. **ou**, a contrario, montrer que la conjonction en question est universellement valide pour invalider le raisonnement

Exemple

Montrons que le raisonnement suivant est valide :

1. $\exists x p(x) \rightarrow \forall y p(y)$
2. $\forall x (p(x) \vee q(x))$
3. donc : $\exists x \neg q(x) \rightarrow \forall y p(y)$

Exemple

Montrons que le raisonnement suivant est valide :

1. $\exists x p(x) \rightarrow \forall y p(y)$
2. $\forall x(p(x) \vee q(x))$
3. donc : $\exists x \neg q(x) \rightarrow \forall y p(y)$

La mise sous forme standard de Skolem des prémisses et de la négation de la conclusion donne :

1. $\forall x \forall y(\neg p(x) \vee p(y))$
2. $\forall x(p(x) \vee q(x))$
3. $\exists x \exists y(\neg q(x) \wedge \neg p(y))$

Exemple

Montrons que le raisonnement suivant est valide :

1. $\exists x p(x) \rightarrow \forall y p(y)$
2. $\forall x (p(x) \vee q(x))$
3. donc : $\exists x \neg q(x) \rightarrow \forall y p(y)$

La mise sous forme standard de Skolem des prémisses et de la négation de la conclusion donne :

1. $\forall x \forall y (\neg p(x) \vee p(y))$
2. $\forall x (p(x) \vee q(x))$
3. $\exists x \exists y (\neg q(x) \wedge \neg p(y))$

Ce qui nous donne la forme clausale de la conjonction des expressions précédentes : $\mathcal{C} = \{\neg p(x_1) \vee p(y), p(x_2) \vee q(x_2), \neg q(a), \neg p(b)\}$

Exemple

Montrons que le raisonnement suivant est valide :

1. $\exists x p(x) \rightarrow \forall y p(y)$
2. $\forall x(p(x) \vee q(x))$
3. donc : $\exists x \neg q(x) \rightarrow \forall y p(y)$

La mise sous forme standard de Skolem des prémisses et de la négation de la conclusion donne :

1. $\forall x \forall y(\neg p(x) \vee p(y))$
2. $\forall x(p(x) \vee q(x))$
3. $\exists x \exists y(\neg q(x) \wedge \neg p(y))$

Ce qui nous donne la forme clausale de la conjonction des expressions précédentes : $\mathcal{C} = \{\neg p(x_1) \vee p(y), p(x_2) \vee q(x_2), \neg q(a), \neg p(b)\}$
L'ensemble $\mathcal{C}' = \{\neg p(a) \vee p(b), p(a) \vee q(a), \neg q(a), \neg p(b)\}$ est insatisfiable, validant ainsi le raisonnement.

Exemple

Montrons que le raisonnement suivant est valide :

1. $\exists x p(x) \rightarrow \forall y p(y)$
2. $\forall x (p(x) \vee q(x))$
3. donc : $\exists x \neg q(x) \rightarrow \forall y p(y)$

La mise sous forme standard de Skolem des prémisses et de la négation de la conclusion donne :

1. $\forall x \forall y (\neg p(x) \vee p(y))$
2. $\forall x (p(x) \vee q(x))$
3. $\exists x \exists y (\neg q(x) \wedge \neg p(y))$

Ce qui nous donne la forme clausale de la conjonction des expressions précédentes : $\mathcal{C} = \{\neg p(x_1) \vee p(y), p(x_2) \vee q(x_2), \neg q(a), \neg p(b)\}$
L'ensemble $\mathcal{C}' = \{\neg p(a) \vee p(b), p(a) \vee q(a), \neg q(a), \neg p(b)\}$ est insatisfiable, validant ainsi le raisonnement. $\rightarrow$ **on a pris** $x_1 = x_2 = a, y = b$

Principe de résolution pour le calcul des prédicats

Remarque

Soit deux clauses : $C_1 = P(x_1) \vee Q(x_1)$ et $C_2 = \neg P(f(x_2)) \vee R(x_2)$

Principe de résolution pour le calcul des prédicats

Remarque

Soit deux clauses : $C_1 = P(x_1) \vee Q(x_1)$ et $C_2 = \neg P(f(x_2)) \vee R(x_2)$

- on ne peut pas appliquer le principe de résolution

Principe de résolution pour le calcul des prédicats

Remarque

Soit deux clauses : $C_1 = P(x_1) \vee Q(x_1)$ et $C_2 = \neg P(f(x_2)) \vee R(x_2)$

- on ne peut pas appliquer le principe de résolution
- en substituant $f(a)$ à x_1 dans C_1 et a à x_2 dans C_2, on obtient les instances de bases $C_1' = P(f(a)) \vee Q(f(a))$ et $C_2' = \neg P(f(a)) \vee R(a)$ qui permettent la résolution

Principe de résolution pour le calcul des prédicats

Remarque

Soit deux clauses : $C_1 = P(x_1) \vee Q(x_1)$ et $C_2 = \neg P(f(x_2)) \vee R(x_2)$

- on ne peut pas appliquer le principe de résolution
- en substituant $f(a)$ à x_1 dans C_1 et a à x_2 dans C_2, on obtient les instances de bases $C_1' = P(f(a)) \vee Q(f(a))$ et $C_2' = \neg P(f(a)) \vee R(a)$ qui permettent la résolution
- en substituant $f(x_1)$ à x_1 dans C_1 et x_1 à x_2 dans C_2, on obtient une résolvante plus générale

Principe de résolution pour le calcul des prédicats

Remarque

Soit deux clauses : $C_1 = P(x_1) \vee Q(x_1)$ et $C_2 = \neg P(f(x_2)) \vee R(x_2)$

- on ne peut pas appliquer le principe de résolution
- en substituant $f(a)$ à x_1 dans C_1 et a à x_2 dans C_2, on obtient les instances de bases $C_1' = P(f(a)) \vee Q(f(a))$ et $C_2' = \neg P(f(a)) \vee R(a)$ qui permettent la résolution
- en substituant $f(x_1)$ à x_1 dans C_1 et x_1 à x_2 dans C_2, on obtient une résolvante plus générale

NB : c'est le théorème de Herbrand qui nous permet ces transformations

Vocabulaire

Définition (Substitution)

Une **substitution** *est un ensemble fini de la forme* $\{t_1/v_1, \ldots, t_n/v_n\}$ *où*

- *les v_i sont des variables*
- *chaque t_i est un terme différent de v_i*
- *les variables ont au plus une occurrence à droite des « / »*

Vocabulaire

Définition (Substitution)

Une **substitution** *est un ensemble fini de la forme* $\{t_1/v_1, \ldots, t_n/v_n\}$ *où*

- *les* v_i *sont des variables*
- *chaque* t_i *est un terme différent de* v_i
- *les variables ont au plus une occurrence à droite des « / »*

Exemple

$$\{a/x, f(a)/y, g(f(b))/z\}$$

On dit : « a remplace x, $f(a)$ remplace y et $g(f(b))$ remplace z ».

Définition (Instance)

À partir d'une expression logique E et d'une substitution $\theta = \{t_1/v_1, \ldots, t_n/v_n\}$ on obtient une **instance** *de E notée $E\theta$ en remplaçant dans E chaque occurrence de v_i par le terme t_i.*

Définition (Instance)

À partir d'une expression logique E et d'une substitution $\theta = \{t_1/v_1, \ldots, t_n/v_n\}$ on obtient une **instance** *de E notée $E\theta$ en remplaçant dans E chaque occurrence de v_i par le terme t_i.*

Exemple

Pour :

- $\theta = \{a/x, f(a)/y, g(f(b))/z\}$
- $E = P(x, y, z)$

on obtient : $E\theta = P(a, f(a), g(f(b)))$.

Définition (Composition)

La **composition** *de deux substitutions*

- $\theta = \{t_1/v_1, \ldots, t_n/v_n\}$
- *et* $\lambda = \{u_1/y_1, \ldots, u_m/y_m\}$

est obtenue à partir de l'ensemble
$\{t_1\lambda/v_1, \ldots t_n\lambda/v_n, u_1/y_1, \ldots, u_m/y_m\}$ *en éliminant :*

- *tout élément* $t_j\lambda/v_j$ *tel que* $t_j\lambda = v_j$
- *tout* u_i/y_i *tel que* $y_i \in \{v_1, \ldots, v_n\}$

Définition (Composition)

La **composition** *de deux substitutions* $\rightarrow$ **on note** $\theta \circ \lambda$

- $\theta = \{t_1/v_1, \ldots, t_n/v_n\}$
- *et* $\lambda = \{u_1/y_1, \ldots, u_m/y_m\}$

est obtenue à partir de l'ensemble $\{t_1\lambda/v_1, \ldots t_n\lambda/v_n, u_1/y_1, \ldots, u_m/y_m\}$ *en éliminant :*

- *tout élément* $t_j\lambda/v_j$ *tel que* $t_j\lambda = v_j$
- *tout* u_i/y_i *tel que* $y_i \in \{v_1, \ldots, v_n\}$

Définition (Composition)

La **composition** *de deux substitutions* $\rightarrow$ **on note** $\theta \circ \lambda$

- $\theta = \{t_1/v_1, \ldots, t_n/v_n\}$
- *et* $\lambda = \{u_1/y_1, \ldots, u_m/y_m\}$

est obtenue à partir de l'ensemble
$\{t_1\lambda/v_1, \ldots t_n\lambda/v_n, u_1/y_1, \ldots, u_m/y_m\}$ *en éliminant :*

- *tout élément* $t_j\lambda/v_j$ *tel que* $t_j\lambda = v_j$
- *tout* u_i/y_i *tel que* $y_i \in \{v_1, \ldots, v_n\}$

Exemple

$\theta = \{f(y)/x, z/y\}$ et $\lambda = \{a/x, b/y, y/z\}$ donnent

$\{f(b)/x, y/y, a/x, b/y, y/z\}$

$\theta \circ \lambda$ est donc $\{f(b)/x, y/z\}$

Définition (Unificateur)

Une substitution θ est appelée **unificateur** *d'un ensemble $\{E_1, \ldots, E_k\}$ si et seulement si $E_1\theta = \ldots = E_k\theta$.*
L'ensemble $\{E_1, \ldots, E_k\}$ est alors dit **unifiable**.

Définition (Unificateur)

Une substitution θ est appelée **unificateur** *d'un ensemble $\{E_1, \ldots, E_k\}$ si et seulement si $E_1\theta = \ldots = E_k\theta$.*
L'ensemble $\{E_1, \ldots, E_k\}$ est alors dit **unifiable**.

Exemple

$\{f(a)/x, a/y\}$ est un unificateur de $\{P(a, x), P(a, f(y))\}$.

Définition (Unificateur minimal – mgu)

*Un unificateur σ de $\{E_1, \ldots, E_k\}$ est l'***unificateur minimal** *(most general unifier) si et seulement si pour tout unificateur θ, il existe λ tel que $\theta = \sigma \circ \lambda$.*

Définition (Unificateur minimal – mgu)

*Un unificateur σ de $\{E_1, \ldots, E_k\}$ est l'***unificateur minimal** *(most general unifier) si et seulement si pour tout unificateur θ, il existe λ tel que $\theta = \sigma \circ \lambda$.*

Exemple

L'unificateur minimal de $\{P(a, x), P(a, f(y))\}$ est ainsi $\sigma = \{f(y)/x\}$.

Définition (Ensemble de discordance)

*L'***ensemble de discordance** *(disagreement set) d'un ensemble non vide d'expressions W est obtenu :*

- *en repérant la première position pour laquelle les expressions de W n'ont pas le même symbole*
- *puis en prenant dans chaque expression W l'expression qui commence avec le symbole occupant la position repérée*

Définition (Ensemble de discordance)

*L'***ensemble de discordance** *(disagreement set) d'un ensemble non vide d'expressions W est obtenu :*

- *en repérant la première position pour laquelle les expressions de W n'ont pas le même symbole*
- *puis en prenant dans chaque expression W l'expression qui commence avec le symbole occupant la position repérée*

Exemple

Pour $W = \{P(x, f(y, z)), P(x, g(x))\}$, l'ensemble de discordance est $\{f(y, z), g(x)\}$.

Définition (Ensemble de discordance)

*L'***ensemble de discordance** *(disagreement set) d'un ensemble non vide d'expressions W est obtenu :*

- *en repérant la première position pour laquelle les expressions de W n'ont pas le même symbole*
- *puis en prenant dans chaque expression W l'expression qui commence avec le symbole occupant la position repérée*

Exemple

Pour $W = \{P(x, f(y, z)), P(x, g(x))\}$, l'ensemble de discordance est $\{f(y, z), g(x)\}$.

Exercice

Quel est l'ensemble de discordance de l'ensemble d'expressions : $W = \{P(x, f(y, z)), P(x, a), P(x, g(x))\}$

Algorithme d'unification

Algorithme d'unification

unification (W: ensemble d'expressions) : σ_k unificateur minimal

1. On pose $k \leftarrow 0$, $W_k \leftarrow W$ et $\sigma_k \leftarrow \varnothing$
2. **si** W_k est un singleton, **fin** : σ_k est un unificateur minimal
   sinon chercher l'ensemble de discordance D_k pour W_k
3. **si** il existe v_k et t_k dans D_k tels que v_k est une variable qui n'a aucune occurrence dans t_k, **alors** passer à l'étape ❹
   sinon, **fin** : W n'est pas unifiable
4. $\sigma_{k+1} \leftarrow \sigma_k \circ \{t_k/v_k\}$ et $W_{k+1} \leftarrow W_k\{t_k/v_k\}$
5. $k \leftarrow k+1$ et retourner à l'étape ❷.

Exercice

Unifier (ou tenter d'unifier) les ensembles d'expressions suivants :

1. $\{P(x, f(y, z)), P(x, a)\}$
2. $\{Q(f(a), g(x)), Q(y, x)\}$
3. $\{Q(f(a), g(x)), Q(y, z)\}$

Principe de résolution

Une équipe gagnante

théorème de Herbrand $+$ algorithme d'unification

$=$

principe de résolution pour le calcul des prédicats

Principe de résolution

Une équipe gagnante

théorème de Herbrand + algorithme d'unification

=

principe de résolution pour le calcul des prédicats

Exemple

Valider le raisonnement suivant :

1. Aucun avare n'est altruiste
2. Les personnes qui conservent les coquilles d'œufs sont avares
3. **Donc** aucune personne altruiste ne conserve les coquilles d'œufs

Étape ❶ – formalisation

On considère les prédicats suivants :

- $av(x)$ pour « x est avare »
- $al(x)$ pour « x est altruiste »
- $coq(x)$ pour « x conserve les coquilles d'œufs »

On obtient :

1. $\forall x(av(x) \longrightarrow \neg al(x))$
2. $\forall x(coq(x) \longrightarrow av(x))$
3. $\forall x(al(x) \longrightarrow \neg coq(x))$

Étape ❷ – forme clausale

1. $\{\neg av(x_1) \vee \neg al(x_1)\}$
2. $\{\neg coq(x_2) \vee av(x_2)\}$
3. $\{\neg al(x_3) \vee \neg coq(x_3)\}$
4. $\{al(a), coq(a)\}$

Étape ❷ – forme clausale

1. $\{\neg av(x_1) \vee \neg al(x_1)\}$
2. $\{\neg coq(x_2) \vee av(x_2)\}$
3. $\{\neg al(x_3) \vee \neg coq(x_3)\}$
4. $\{al(a), coq(a)\}$ $\rightarrow$ **négation de l'expression ❸**

Étape ❸ – preuve par réfutation

$H_\infty = \{a\}$ aussi bien pour l'ensemble d'expressions ❶, ❷ et ❸ que pour l'ensemble ❶, ❷ et ❹.

On utilise ❶, ❷ et ❹. On part de la négation de la conclusion (expression ❹).

Étape ❸ – preuve par réfutation

$H_\infty = \{a\}$ aussi bien pour l'ensemble d'expressions ❶, ❷ et ❸ que pour l'ensemble ❶, ❷ et ❹.

On utilise ❶, ❷ et ❹. On part de la négation de la conclusion (expression ❹).

1: ❹ $al(a)$

2:

3:

4:

5:

6:

7:

8:

9:

Étape ❸ – preuve par réfutation

$H_\infty = \{a\}$ aussi bien pour l'ensemble d'expressions ❶, ❷ et ❸ que pour l'ensemble ❶, ❷ et ❹.

On utilise ❶, ❷ et ❹. On part de la négation de la conclusion (expression ❹).

1:	❹	$al(a)$
2:	❶	$\neg av(x_1) \vee \neg al(x_1)$
3:		
4:		
5:		
6:		
7:		
8:		
9:		

Étape ❸ – preuve par réfutation

$H_\infty = \{a\}$ aussi bien pour l'ensemble d'expressions ❶, ❷ et ❸ que pour l'ensemble ❶, ❷ et ❹.

On utilise ❶, ❷ et ❹. On part de la négation de la conclusion (expression ❹).

1:	❹	$al(a)$
2:	❶	$\neg av(x_1) \vee \neg al(x_1)$
3:	subst	$\neg av(a) \vee \neg al(a)$
4:		
5:		
6:		
7:		
8:		
9:		

Étape ❸ – preuve par réfutation

$H_\infty = \{a\}$ aussi bien pour l'ensemble d'expressions ❶, ❷ et ❸ que pour l'ensemble ❶, ❷ et ❹.
On utilise ❶, ❷ et ❹. On part de la négation de la conclusion (expression ❹).

1:	❹	$al(a)$
2:	❶	$\neg av(x_1) \vee \neg al(x_1)$
3:	subst	$\neg av(a) \vee \neg al(a)$ **unif** $\{al(x_1), al(a)\} = \{a/x_1\}$
4:		
5:		
6:		
7:		
8:		
9:		

Étape ❸ – preuve par réfutation

$H_\infty = \{a\}$ aussi bien pour l'ensemble d'expressions ❶, ❷ et ❸ que pour l'ensemble ❶, ❷ et ❹.

On utilise ❶, ❷ et ❹. On part de la négation de la conclusion (expression ❹).

1:	❹	$al(a)$
2:	❶	$\neg av(x_1) \vee \neg al(x_1)$
3:	subst	$\neg av(a) \vee \neg al(a)$ **unif** $\{al(x_1), al(a)\} = \{a/x_1\}$
4:	reso $1 \cdot 3$	$\neg av(a)$
5:		
6:		
7:		
8:		
9:		

Étape ❸ – preuve par réfutation

$H_\infty = \{a\}$ aussi bien pour l'ensemble d'expressions ❶, ❷ et ❸ que pour l'ensemble ❶, ❷ et ❹.

On utilise ❶, ❷ et ❹. On part de la négation de la conclusion (expression ❹).

1:	❹	$al(a)$
2:	❶	$\neg av(x_1) \vee \neg al(x_1)$
3:	subst	$\neg av(a) \vee \neg al(a)$ **unif** $\{al(x_1), al(a)\} = \{a/x_1\}$
4:	reso $1 \cdot 3$	$\neg av(a)$
5:	❷	$\neg coq(x_2) \vee av(x_2)$
6:		
7:		
8:		
9:		

Étape ❸ – preuve par réfutation

$H_\infty = \{a\}$ aussi bien pour l'ensemble d'expressions ❶, ❷ et ❸ que pour l'ensemble ❶, ❷ et ❹.

On utilise ❶, ❷ et ❹. On part de la négation de la conclusion (expression ❹).

1:	❹	$al(a)$
2:	❶	$\neg av(x_1) \vee \neg al(x_1)$
3:	subst	$\neg av(a) \vee \neg al(a)$ **unif** $\{al(x_1), al(a)\} = \{a/x_1\}$
4:	reso $1 \cdot 3$	$\neg av(a)$
5:	❷	$\neg coq(x_2) \vee av(x_2)$
6:	subst	$\neg coq(a) \vee av(a)$
7:		
8:		
9:		

Étape ❸ – preuve par réfutation

$H_\infty = \{a\}$ aussi bien pour l'ensemble d'expressions ❶, ❷ et ❸ que pour l'ensemble ❶, ❷ et ❹.

On utilise ❶, ❷ et ❹. On part de la négation de la conclusion (expression ❹).

1:	❹	$al(a)$
2:	❶	$\neg av(x_1) \vee \neg al(x_1)$
3:	subst	$\neg av(a) \vee \neg al(a)$ **unif** $\{al(x_1), al(a)\} = \{a/x_1\}$
4:	reso $1 \cdot 3$	$\neg av(a)$
5:	❷	$\neg coq(x_2) \vee av(x_2)$
6:	subst	$\neg coq(a) \vee av(a)$ **unif** $\{av(x_2), av(a)\} = \{a/x_2\}$
7:		
8:		
9:		

Étape ❸ – preuve par réfutation

$H_\infty = \{a\}$ aussi bien pour l'ensemble d'expressions ❶, ❷ et ❸ que pour l'ensemble ❶, ❷ et ❹.

On utilise ❶, ❷ et ❹. On part de la négation de la conclusion (expression ❹).

1:	❹	$al(a)$
2:	❶	$\neg av(x_1) \vee \neg al(x_1)$
3:	subst	$\neg av(a) \vee \neg al(a)$ **unif** $\{al(x_1), al(a)\} = \{a/x_1\}$
4:	reso $1 \cdot 3$	$\neg av(a)$
5:	❷	$\neg coq(x_2) \vee av(x_2)$
6:	subst	$\neg coq(a) \vee av(a)$ **unif** $\{av(x_2), av(a)\} = \{a/x_2\}$
7:	reso $4 \cdot 6$	$\neg coq(a)$
8:		
9:		

Étape ❸ – preuve par réfutation

$H_\infty = \{a\}$ aussi bien pour l'ensemble d'expressions ❶, ❷ et ❸ que pour l'ensemble ❶, ❷ et ❹.

On utilise ❶, ❷ et ❹. On part de la négation de la conclusion (expression ❹).

1:	❹	$al(a)$
2:	❶	$\neg av(x_1) \vee \neg al(x_1)$
3:	subst	$\neg av(a) \vee \neg al(a)$ **unif** $\{al(x_1), al(a)\} = \{a/x_1\}$
4:	reso $1 \cdot 3$	$\neg av(a)$
5:	❷	$\neg coq(x_2) \vee av(x_2)$
6:	subst	$\neg coq(a) \vee av(a)$ **unif** $\{av(x_2), av(a)\} = \{a/x_2\}$
7:	reso $4 \cdot 6$	$\neg coq(a)$
8:	❹	$coq(a)$
9:		

Étape ❸ – preuve par réfutation

$H_\infty = \{a\}$ aussi bien pour l'ensemble d'expressions ❶, ❷ et ❸ que pour l'ensemble ❶, ❷ et ❹.

On utilise ❶, ❷ et ❹. On part de la négation de la conclusion (expression ❹).

1:	❹	$al(a)$
2:	❶	$\neg av(x_1) \vee \neg al(x_1)$
3:	subst	$\neg av(a) \vee \neg al(a)$ **unif** $\{al(x_1), al(a)\} = \{a/x_1\}$
4:	reso $1 \cdot 3$	$\neg av(a)$
5:	❷	$\neg coq(x_2) \vee av(x_2)$
6:	subst	$\neg coq(a) \vee av(a)$ **unif** $\{av(x_2), av(a)\} = \{a/x_2\}$
7:	reso $4 \cdot 6$	$\neg coq(a)$
8:	❹	$coq(a)$
9:	reso $7 \cdot 8$	$\square$

Étape ❹ – conclusion

on a identifié un ensemble d'instances de base insatisfiable :

$$\{al(a), \neg av(a) \vee \neg al(a), \neg coq(a) \vee av(a), coq(a)\}$$

En appliquant le théorème de Herbrand, on montre que le raisonnement est valide.

Exercice

On considère l'ensemble de propositions suivant :

1. Un dragon est heureux si tous ses enfants peuvent voler
2. Les dragons verts peuvent voler
3. Un dragon est vert s'il a au moins un parent vert ou rose

Montrer par résolution avec réfutation que :

1. les dragons sans enfant sont heureux
2. les dragons verts sont heureux

Propriétés du calcul des prédicats

Théorème (Gödel) – non démontré)

Le calcul des prédicats muni de la résolution et de l'unification est **correct** *et* **complet**

Propriétés du calcul des prédicats

Théorème (Gödel) – non démontré)

Le calcul des prédicats muni de la résolution et de l'unification est **correct** *et* **complet**

Mais ...

Le calcul des prédicats est **indécidable**. Il n'existe pas d'algorithme permettant de décider à tout coup si une formule close est vraie ou fausse.

Programmer en logique ?

Propriétés de l'unification

$$\text{unification} \quad = \quad \text{calcul}$$

Programmer en logique ?

Propriétés de l'unification

unification = calcul

Prise de conscience

calcul = programmation

Programmer en logique ?

Propriétés de l'unification

$$\text{unification} \quad = \quad \text{calcul}$$

Prise de conscience

$$\text{calcul} \quad = \quad \text{programmation}$$

PROLOG

- un sous-ensemble **décidable** du calcul des prédicats : **clauses de Horn** $\longrightarrow$ au plus un littéral positif
- un langage : **PROLOG**

Plan

Limites de la logique classique

Propriétés de la logique classique

- la logique classique est **binaire**
- la logique classique est **monotone**

Limites de la logique classique

Propriétés de la logique classique

- la logique classique est **binaire**
- la logique classique est **monotone**

Deux classes de logiques non classiques

Limites de la logique classique

Propriétés de la logique classique

- la logique classique est **binaire**
- la logique classique est **monotone**

Deux classes de logiques non classiques

- **extensions** de la logique classique
  $\longrightarrow$ **logiques modales**

Limites de la logique classique

Propriétés de la logique classique

- la logique classique est **binaire**
- la logique classique est **monotone**

Deux classes de logiques non classiques

- **extensions** de la logique classique
  $\longrightarrow$ **logiques modales**
- logiques **rivales**
  $\longrightarrow$ **logiques multivalentes**
  $\longrightarrow$ **logique floue**

Plan

Logiques modales

- la logique classique s'intéresse à la véracité des propositions

Logiques modales

- la logique classique s'intéresse à la véracité des propositions
- la logique **modale** s'intéresse à « comment » les propositions sont vraies ou fausses

Logiques modales

- la logique classique s'intéresse à la véracité des propositions
- la logique **modale** s'intéresse à « comment » les propositions sont vraies ou fausses

Définition (Modalité)

modalités : *diverses possibilités d'adéquation (ou non) d'une proposition avec les faits du monde*

Une famille de logiques

- logique **modale** (pure)

  il est (possible, nécessaire) que

Une famille de logiques

- logique **modale** (pure)

  il est (possible, nécessaire) que

- logique **déontique**

  il est (obligatoire, permis, interdit) de

Une famille de logiques

- logique **modale** (pure)

  il est (possible, nécessaire) que

- logique **déontique**

  il est (obligatoire, permis, interdit) de

- logique **temporelle**

  il sera toujours le cas que

  à un moment donné il sera le cas que

  il a toujours été le cas que, il a été au moins une fois que

Logique modale (pure)

Définition (Modalités)

- **possible** : *peut être vrai* $\Diamond p$

Logique modale (pure)

Définition (Modalités)

- **possible** : *peut être vrai* $\Diamond p$
- **impossible** : *ne peut jamais être vrai* $\neg\Diamond p$

Logique modale (pure)

Définition (Modalités)

- **possible** : *peut être vrai* $\Diamond p$
- **impossible** : *ne peut jamais être vrai* $\neg\Diamond p$
- **nécessaire** : *toujours vrai* $\Box p$

NB : toute proposition nécessaire devra également être possible

Logique modale (pure)

Définition (Modalités)

- **possible** : *peut être vrai* $\Diamond p$
- **impossible** : *ne peut jamais être vrai* $\neg\Diamond p$
- **nécessaire** : *toujours vrai* $\Box p$
- **contingent** *(ou non nécessaire) : peut ne pas être vrai, mais pourrait éventuellement l'être* $\neg\Box p$

Logique modale (pure)

Définition (Modalités)

- **possible** : *peut être vrai* $\Diamond p$
- **impossible** : *ne peut jamais être vrai* $\neg\Diamond p$
- **nécessaire** : *toujours vrai* $\Box p$
- **contingent** *(ou non nécessaire) : peut ne pas être vrai, mais pourrait éventuellement l'être* $\neg\Box p$

NB : ces opérateurs ne sont pas vérifonctionnels !

Logique modale (pure)

Définition (Propriétés des opérateurs modaux)

$$\Box p \equiv \neg\Diamond\neg p \qquad \neg\Box p \equiv \Diamond\neg p$$

$$\Diamond p \equiv \neg\Box\neg p \qquad \neg\Diamond p \equiv \Box\neg p$$

Une famille de systèmes formels

Définition (Le système K – d'après Kripke)

- *les axiomes de la logique propositionelle*
  - *SA1* : $A \rightarrow (B \rightarrow A)$
  - *SA2* : $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$
  - *SA3* : $(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$
- $\Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B)$ *(***axiome de distribution***)*

*On ajoute en plus une règle (***de nécessitation***) :*

si *A est un théorème de K* **alors** *$\Box A$ aussi*

Une famille de systèmes formels

Définition (Le système K – d'après Kripke)

- *les axiomes de la logique propositionelle*
  - *SA1* : $A \rightarrow (B \rightarrow A)$
  - *SA2* : $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$
  - *SA3* : $(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$
- $\Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B)$ *(**axiome de distribution**)*

*On ajoute en plus une règle (**de nécessitation**) :*

si A *est un théorème de* K **alors** $\Box A$ *aussi*

NB : K est trop faible pour prendre en compte pleinement la notion de nécessité

Différents systèmes

Définition (Le système M)

on ajoute l'axiome suivant

$$(M) \quad \Box A \rightarrow A$$

Différents systèmes

Définition (Le système M)

on ajoute l'axiome suivant

$$(M) \quad \Box A \to A$$

NB : (M) ne peut être démontré dans K, mais peut être bien utile !

Différents systèmes

Définition (Le système M)

on ajoute l'axiome suivant

$$(M) \qquad \Box A \rightarrow A$$

NB : M semble trop faible encore. Comment prendre en compte l'itération ou la répétition des opérateurs modaux ?

Le système S4

Définition (S4)

on ajoute l'axiome suivant

$$(S4) \qquad \Box A \rightarrow \Box\Box A$$

Le système S4

Définition (S4)

on ajoute l'axiome suivant

$$(S4) \qquad \Box A \rightarrow \Box\Box A$$

Définition (Propriétés de S4)

- $\Box\Box A$ *est équivalente à* $\Box A$
- *répéter un même opérateur modal est toujours superflu*

Le système S5

Définition (S5)

on ajoute l'axiome suivant

$$(S5) \qquad \Diamond A \longrightarrow \Box\Diamond A$$

Le système S5

Définition (S5)

on ajoute l'axiome suivant

$$(S5) \qquad \Diamond A \rightarrow \Box\Diamond A$$

Propriété de S5

dans une séquence d'opérateurs modaux il suffit de ne tenir compte que du dernier

Le système S5

Définition (S5)

on ajoute l'axiome suivant

$$(S5) \quad \Diamond A \longrightarrow \Box \Diamond A$$

Propriété de S5

dans une séquence d'opérateurs modaux il suffit de ne tenir compte que du dernier

Exemple

$$\Diamond \Box A \equiv \Box A$$

Le système S5

Définition (S5)

on ajoute l'axiome suivant

$$(S5) \quad \Diamond A \longrightarrow \Box\Diamond A$$

Propriété de S5

dans une séquence d'opérateurs modaux il suffit de ne tenir compte que du dernier

Exemple

$$\Diamond\Box A \equiv \Box A$$

NB : on peut toujours contester l'interprétation proposée, c'est pour cela qu'il n'y a pas une unique logique modale

Théorie des mondes possibles

Définition (Cadre de Kripke)

Un **cadre de Kripke** *est un couple* (W, R)*, où :*

- W *est un ensemble non vide appelé* **univers**
- R *est une relation binaire sur* W *appelée* **relation d'accessibilité**

Les éléments de W *sont appelés* **mondes**

Théorie des mondes possibles

Définition (Cadre de Kripke)

Un **cadre de Kripke** *est un couple* (W, R)*, où :*

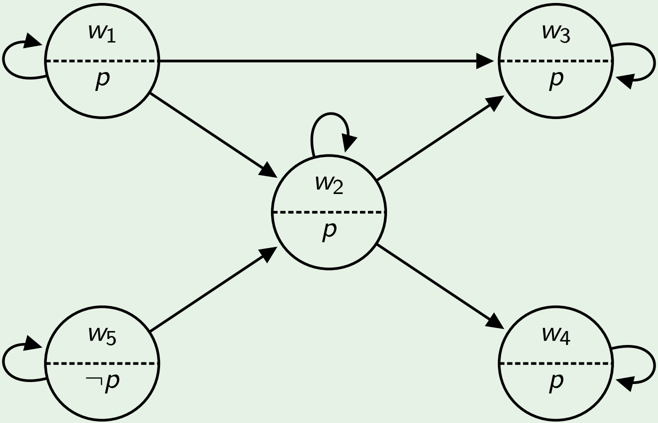
- W *est un ensemble non vide appelé* **univers**
- R *est une relation binaire sur* W *appelée* **relation d'accessibilité**

Les éléments de W *sont appelés* **mondes**

NB : un cadre de Kripke définit l'ensemble des mondes possibles auxquels renvoie une logique modale

Théorie des mondes possibles

Exemple



Théorie des mondes possibles

Définition (Caractérisation des cadres de Kripke)

Les propriétés de la relation d'accessibilité caractérisent les cadres de Kripke. Elle peut être :

- *réflexive*
- *symétrique*
- *transitive*
- *séquentielle* $\longrightarrow$ *depuis chaque monde, il existe un monde accessible*
- *convergente* $\longrightarrow$ *si* w_1 *et* w_2 *sont accessibles depuis* w*, alors il y a un monde accessible depuis* w_1 *et* w_2 *à la fois*

Théorie des mondes possibles

Cadre de Kripke et systèmes d'axiomes

L'adjonction d'axiomes au système K revient à caractériser plus précisément la relation d'accessibilité considérée.

- dans **M**, la relation est **réflexive**
- dans **S4**, la relation est **réflexive** et **transitive**
- dans **S5**, la relation est une relation d'**équivalence**

Aspects sémantiques

Valeur de vérité des opérateurs modaux

- $\Box P$ est **vrai** si P est vrai dans tous les mondes accessibles (directement)
- $\Diamond P$ est **vrai** si P est vrai dans un monde accessible
- $\Box P$ est **faux** si P est faux dans un monde accessible
- $\Diamond P$ est **faux** si P est faux dans tous les mondes accessibles

Aspects sémantiques

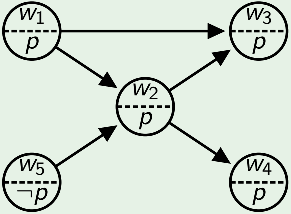
Valeur de vérité des opérateurs modaux

- $\Box P$ est **vrai** si P est vrai dans tous les mondes accessibles (directement)
- $\Diamond P$ est **vrai** si P est vrai dans un monde accessible
- $\Box P$ est **faux** si P est faux dans un monde accessible
- $\Diamond P$ est **faux** si P est faux dans tous les mondes accessibles

NB : le monde « réel » est un des mondes possibles

Aspects sémantiques

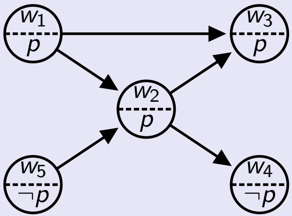
Exemple



- $\Box p$ est satisfiable en w_1
- $\Diamond\neg p$ n'est satisfiable dans aucun monde

Aspects sémantiques

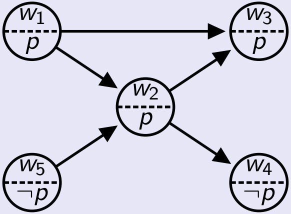
Exercice



Que peut-on dire en w_2 ?

Aspects sémantiques

Exercice



Que peut-on dire en w_2 ?

Correction

$\Diamond p$ $\Diamond\neg p$ et p mais pas $\Box p$.

Logique déontique

Définition (Logique déontique)

La logique **déontique** *traite le discours normatif qui exprime des permissions, des obligations*

Logique déontique

Définition (Logique déontique)

La logique **déontique** *traite le discours normatif qui exprime des permissions, des obligations*

Définition (Modalités de la logique déontique)

- *l'***obligation** *(O)* — *nécessité modale*
- *l'***interdiction** *(I)* — *impossibilité modale*
- *la* **permission** *(P)* — *possibilité modale*
- *le* **facultatif** *(F)* — *contingence modale*

Logique déontique

Définition (Axiomes de la logique déontique)

- *le principe de* **distribution déontique** : $P(A \vee B) \equiv (P(A) \vee P(B))$
- *le principe de* **permission** : $P(A) \vee P(\neg A)$

Logique déontique

Définition (Axiomes de la logique déontique)

- *le principe de* **distribution déontique** *:* $P(A \vee B) \equiv (P(A) \vee P(B))$
- *le principe de* **permission** *:* $P(A) \vee P(\neg A)$

Une logique non classique

En logique déontique, il est **faux** de dire que :

1. $\mathrm{O}(\neg p) \rightarrow \mathrm{O}(p \rightarrow q)$ paradoxe de l'obligation dérivée
2. $\mathrm{O}(p) \rightarrow \mathrm{O}(p \vee q)$ principe d'adjonction
3. $\mathrm{O}(p) \rightarrow p$

Logique déontique

Définition (Axiomes de la logique déontique)

- *le principe de* **distribution déontique** *:* $P(A \vee B) \equiv (P(A) \vee P(B))$
- *le principe de* **permission** *:* $P(A) \vee P(\neg A)$

Une logique non classique

En logique déontique, il est **faux** de dire que :

1. $O(\neg p) \rightarrow O(p \rightarrow q)$ — paradoxe de l'obligation dérivée
2. $O(p) \rightarrow O(p \vee q)$ — principe d'adjonction
3. $O(p) \rightarrow p$

NB : en logique déontique, le monde réel n'est pas admissible car aucune action immorale ne pourrait y avoir lieu !

Logique temporelle

Exemple

- Irma est veuve
- Max a épousé Irma
- donc, Max a épousé une veuve

mais Irma n'est plus veuve !

Logique temporelle

Exemple

- Irma est veuve
- Max a épousé Irma
- donc, Max a épousé une veuve

mais Irma n'est plus veuve !

Définition (Logique temporelle)

La logique temporelle est une logique **non monotone**
Une proposition peut avoir différentes valeurs de vérité à des instants différents

Logique temporelle

Définition (Modalités de la logique temporelle)

- **F**p : *p sera vrai au moins une fois dans le futur*
- **P**p : *p a été vrai au moins une fois dans le passé*
- **G**p : *p sera toujours vrai dans le futur (dorénavant), Gp est défini par :* $\neg F \neg p$
- **H**p : *p a toujours été vrai dans le passé (jusqu'à présent), Hp est défini par :* $\neg P \neg p$

Logique temporelle

Définition (Axiomatique de la logique temporelle – le système L_0)

- *les axiomes de la logique propositionelle*
  - *SA1* : $A \longrightarrow (B \longrightarrow A)$
  - *SA2* : $(A \longrightarrow (B \longrightarrow C)) \longrightarrow ((A \longrightarrow B) \longrightarrow (A \longrightarrow C))$
  - *SA3* : $(\neg A \longrightarrow \neg B) \longrightarrow (B \longrightarrow A)$
- $G(p \longrightarrow q) \longrightarrow (Gp \longrightarrow Gq)$
- $H(p \longrightarrow q) \longrightarrow (Hp \longrightarrow Hq)$
- $p \longrightarrow GPp$
- $p \longrightarrow HFp$

Les règles d'inférence utilisées sont :

- *le* **modus ponens**
- *la règle de* **généralisation temporelle**

  si P *est un théorème alors* GP *et* HP *le sont aussi*

Logique temporelle

Définition (Cadre temporel)

Un **cadre temporel** *est un graphe utilisé pour représenter le temps. Il représente une relation binaire R, la* **relation d'antériorité**

Logique temporelle

Définition (Cadre temporel)

Un **cadre temporel** *est un graphe utilisé pour représenter le temps. Il représente une relation binaire* R*, la* **relation d'antériorité**

NB : les propriétés attribuées à R définissent différents systèmes formels

Logique temporelle

Définition (Cadre temporel)

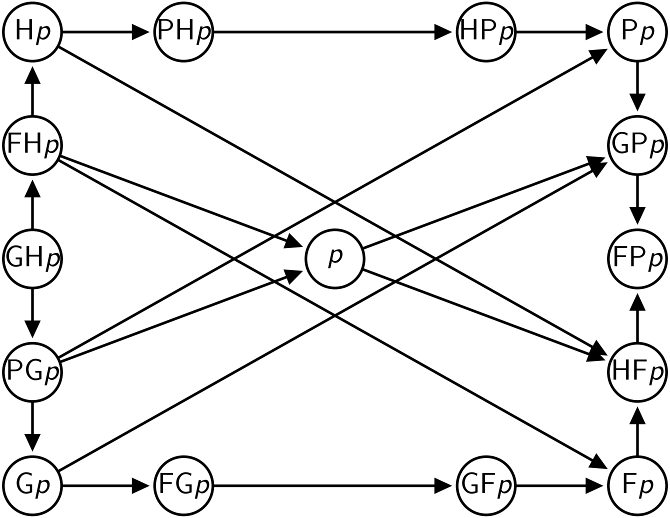
Un **cadre temporel** *est un graphe utilisé pour représenter le temps. Il représente une relation binaire R, la* **relation d'antériorité**

NB : les propriétés attribuées à R définissent différents systèmes formels

Quelques systèmes formels

- si R est une **relation d'ordre**, on obtient L_1
  $\rightarrow L_0$ augmenté de $\mathrm{G}p \rightarrow \mathrm{GG}p$
- si R est un **ordre total dense dénombrable**, on obtient $L_{\mathbb{Q}}$, isomorphe à l'ensemble des rationnels $\mathbb{Q}$
- si R est un **treillis**, on obtient L_9

Les temps de $L_{\mathbb{Q}}$



Un outil pour le raisonnement temporel

Définition (Algèbre d'Allen)

On représente un événement par un **intervalle** *(le représentant dans sa durée) On utilise les* **relations d'Allen** *:*

- *I précède J* : $I < J \Leftrightarrow \forall u \in I \forall v \in J, u < v$
- *I touche J* : $I m J \Leftrightarrow \max(I) = \min(J)$
- *I chevauche J* : $I o J \Leftrightarrow \min(I) < \min(J) < \max(I) < \max(J)$
- *I est dans J* : $I d J \Leftrightarrow I \subset J$
- *I débute J* : $I s J \Leftrightarrow \min(I) = \min(J) \wedge \max(I) < \max(J)$
- *I termine J* : $I e J \Leftrightarrow \min(I) > \min(J) \wedge \max(I) = \max(J)$

Un outil pour le raisonnement temporel

Définition (Algèbre d'Allen)

On représente un événement par un **intervalle** *(le représentant dans sa durée) On utilise les* **relations d'Allen** *:*

- *I précède J* : $I < J \Leftrightarrow \forall u \in I \forall v \in J, u < v$
- *I touche J* : $I m J \Leftrightarrow \max(I) = \min(J)$
- *I chevauche J* : $I o J \Leftrightarrow \min(I) < \min(J) < \max(I) < \max(J)$
- *I est dans J* : $I d J \Leftrightarrow I \subset J$
- *I débute J* : $I s J \Leftrightarrow \min(I) = \min(J) \wedge \max(I) < \max(J)$
- *I termine J* : $I e J \Leftrightarrow \min(I) > \min(J) \wedge \max(I) = \max(J)$

NB : on obtient 13 relations : l'égalité, les 6 relations antiréflexives présentées et leurs réciproques.

Algèbre d'Allen

Exemple

Considérons l'énoncé : « la porte est fermée et le soleil brille. Plus tard, Fred ouvre la porte . . . ».

On identifie ici quatre informations :

1. la porte est fermée
2. la porte est ouverte
3. Fred ouvre la porte
4. le soleil brille

Chacune de ces informations est vraie pendant une certaine durée.

- ❶ termine ❸
- ❸ débute ❷
- ❶ touche ❷
- ❶ chevauche ❹

Algèbre d'Allen

Exemple

Considérons l'énoncé : « la porte est fermée et le soleil brille. Plus tard, Fred ouvre la porte ... ».

On identifie ici quatre informations :

1. la porte est fermée
2. la porte est ouverte
3. Fred ouvre la porte
4. le soleil brille

Chacune de ces informations est vraie pendant une certaine durée.

- ❶ termine ❸
- ❸ débute ❷
- ❶ touche ❷
- ❶ chevauche ❹

Exercice

Représenter graphiquement la situation. Que peut-on dire sur les relations entre ❸ et ❹ et entre ❹ et ❷ ?

Plan

Une logique de l'indétermination

Principes des logiques multivalentes

- la logique classique est binaire (vrai ou faux)
- le monde réel n'est pas binaire (indéterminé, probable)

Une logique de l'indétermination

Principes des logiques multivalentes

- la logique classique est binaire (vrai ou faux)
- le monde réel n'est pas binaire (indéterminé, probable)

Définition (Sources d'indétermination)

- *intrinsèque (énoncés sur le futur)*
- *due à une connaissance limitée du monde*
- *due à une formulation paradoxale ou absurde*

Une logique de l'indétermination

Principes des logiques multivalentes

- la logique classique est binaire (vrai ou faux)
- le monde réel n'est pas binaire (indéterminé, probable)

Définition (Sources d'indétermination)

- *intrinsèque (énoncés sur le futur)* $\longrightarrow$ **Łukasiewicz**
- *due à une connaissance limitée du monde*
- *due à une formulation paradoxale ou absurde*

Une logique de l'indétermination

Principes des logiques multivalentes

- la logique classique est binaire (vrai ou faux)
- le monde réel n'est pas binaire (indéterminé, probable)

Définition (Sources d'indétermination)

- *intrinsèque (énoncés sur le futur)*
- *due à une connaissance limitée du monde* $\longrightarrow$ **Kleene**
- *due à une formulation paradoxale ou absurde*

Une logique de l'indétermination

Principes des logiques multivalentes

- la logique classique est binaire (vrai ou faux)
- le monde réel n'est pas binaire (indéterminé, probable)

Définition (Sources d'indétermination)

- *intrinsèque (énoncés sur le futur)*
- *due à une connaissance limitée du monde*
- *due à une formulation paradoxale ou absurde* $\longrightarrow$ **Bochvar**

Logique trivalente de Łukasiewicz

Définition (Logique de Łukasiewicz – 1920)

- *Les propositions portant sur le* **passé** *ou le* **présent** *sont* **décidables** *(vraies ou fausses)*
- *Les propositions portant sur le* **futur** *sont :*
  1. *nécessaires*
  2. *impossibles*
  3. *contingentes*

Logique trivalente de Łukasiewicz

Définition (Logique de Łukasiewicz – 1920)

- *Les propositions portant sur le* **passé** *ou le* **présent** *sont* **décidables** *(vraies ou fausses)*
- *Les propositions portant sur le* **futur** *sont :*
  1. *nécessaires* **vraies**
  2. *impossibles*
  3. *contingentes*

Logique trivalente de Łukasiewicz

Définition (Logique de Łukasiewicz – 1920)

- *Les propositions portant sur le* **passé** *ou le* **présent** *sont* **décidables** *(vraies ou fausses)*
- *Les propositions portant sur le* **futur** *sont :*
  1. *nécessaires*
  2. *impossibles* **fausses**
  3. *contingentes*

Logique trivalente de Łukasiewicz

Définition (Logique de Łukasiewicz – 1920)

- *Les propositions portant sur le* **passé** *ou le* **présent** *sont* **décidables** *(vraies ou fausses)*
- *Les propositions portant sur le* **futur** *sont :*
  1. *nécessaires*
  2. *impossibles*
  3. *contingentes* **indéterminées**

Logique trivalente de Łukasiewicz – Ł3

Définition

Valeurs de vérité dans Ł3

- *le vrai* ■
- *le faux* □
- *l'***indéterminé** ❍

Logique trivalente de Łukasiewicz – Ł3

Définition

Valeurs de vérité dans Ł3

- *le vrai* ■
- *le faux* □
- *l'***indéterminé** ❍

NB : Ł3 est une amplification sémantique de la logique classique

Tables de vérités dans Ł3

négation

A	$\neg A$
□	■
❍	❍
■	□

conjonction

$\wedge$	□	❍	■
□	□	□	□
❍	□	❍	❍
■	□	❍	■

implication

$\rightarrow$	□	❍	■
□	■	■	■
❍	❍	■	■
■	□	❍	■

disjonction

$\vee$	□	❍	■
□	□	❍	■
❍	❍	❍	■
■	■	■	■

équivalence

$\leftrightarrow$	□	❍	■
□	■	❍	□
❍	❍	■	❍
■	□	❍	■

Tables de vérités dans Ł3

négation

A	$\neg A$
□	■
◑	◑
■	□

conjonction

$\wedge$	□	◑	■
□	□	□	□
◑	□	◑	◑
■	□	◑	■

implication

$\rightarrow$	□	◑	■
□	■	■	■
◑	◑	■	■
■	□	◑	■

disjonction

$\vee$	□	◑	■
□	□	◑	■
◑	◑	◑	■
■	■	■	■

équivalence

$\leftrightarrow$	□	◑	■
□	■	◑	□
◑	◑	■	◑
■	□	◑	■

Tables de vérités dans Ł3

négation

A	$\neg A$
□	■
☽	☽
■	□

conjonction

$\wedge$	□	☽	■
□	□	□	□
☽	□	☽	☽
■	□	☽	■

implication

$\rightarrow$	□	☽	■
□	■	■	■
☽	☽	■	■
■	□	☽	■

disjonction

$\vee$	□	☽	■
□	□	☽	■
☽	☽	☽	■
■	■	■	■

équivalence

$\leftrightarrow$	□	☽	■
□	■	☽	□
☽	☽	■	☽
■	□	☽	■

Tables de vérités dans Ł3

négation

A	$\neg A$
□	■
❍	❍
■	□

conjonction

$\wedge$	□	❍	■
□	□	□	□
❍	□	❍	❍
■	□	❍	■

implication

$\rightarrow$	□	❍	■
□	■	■	■
❍	❍	■	■
■	□	❍	■

disjonction

$\vee$	□	❍	■
□	□	❍	■
❍	❍	❍	■
■	■	■	■

équivalence

$\leftrightarrow$	□	❍	■
□	■	❍	□
❍	❍	■	❍
■	□	❍	■

Tables de vérités dans Ł3

négation

A	$\neg A$
□	■
❍	❍
■	□

conjonction

$\wedge$	□	❍	■
□	□	□	□
❍	□	❍	❍
■	□	❍	■

implication

$\rightarrow$	□	❍	■
□	■	■	■
❍	❍	■	■
■	□	❍	■

disjonction

$\vee$	□	❍	■
□	□	❍	■
❍	❍	❍	■
■	■	■	■

équivalence

$\leftrightarrow$	□	❍	■
□	■	❍	□
❍	❍	■	❍
■	□	❍	■

Tables de vérités dans Ł3

négation

A	$\neg A$
□	■
☽	☽
■	□

conjonction

$\wedge$	□	☽	■
□	□	□	□
☽	□	☽	☽
■	□	☽	■

implication

$\rightarrow$	□	☽	■
□	■	■	■
☽	☽	■	■
■	□	☽	■

disjonction

$\vee$	□	☽	■
□	□	☽	■
☽	☽	☽	■
■	■	■	■

équivalence

$\leftrightarrow$	□	☽	■
□	■	☽	□
☽	☽	■	☽
■	□	☽	■

Axiomatique pour Ł3

Définition (Axiomatique de Wajsberg)

- $SA1 : p \rightarrow (q \rightarrow p)$
- $SA2 : ((p \rightarrow \neg p) \rightarrow p) \rightarrow p$
- $SA3 : (\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow (q \rightarrow p)$
- $SA4 : (p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))$

Axiomatique pour Ł3

Définition (Axiomatique de Wajsberg)

- $SA1 : p \rightarrow (q \rightarrow p)$
- $SA2 : ((p \rightarrow \neg p) \rightarrow p) \rightarrow p$
- $SA3 : (\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow (q \rightarrow p)$
- $SA4 : (p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))$

Propriétés de Ł3

Ł3 **vérifie** :

- l'équivalence entre une proposition et sa double négation
- la dualité entre conjonction et disjonction

Ł3 **ne vérifie pas** :

- le raisonnement par l'absurde
- les principes de tiers-exclu et non-contradiction
- toute loi utilisant les opérateurs de conjonction et de disjonction

Logique trivalente de Kleene – K3

Définition (Logique de Kleene – 1938)

Les énoncés indécidables ne sont ni démontrables, ni réfutables. Leur valeur n'est pas accessible à la connaissance.

Logique trivalente de Kleene – K3

Définition (Logique de Kleene – 1938)

Les énoncés indécidables ne sont ni démontrables, ni réfutables. Leur valeur n'est pas accessible à la connaissance.

Propriété de K3

Aucune loi logique n'est possible

Tables de vérités dans K3

négation

A	$\neg A$
□	■
❍	❍
■	□

conjonction

$\wedge$	□	❍	■
□	□	□	□
❍	□	❍	❍
■	□	❍	■

implication

$\rightarrow$	□	❍	■
□	■	■	■
❍	❍	❍	■
■	□	❍	■

disjonction

$\vee$	□	❍	■
□	□	❍	■
❍	❍	❍	■
■	■	■	■

équivalence

$\leftrightarrow$	□	❍	■
□	■	❍	□
❍	❍	❍	❍
■	□	❍	■

Tables de vérités dans K3

négation

A	$\neg A$
□	■
◐	◐
■	□

conjonction

$\wedge$	□	◐	■
□	□	□	□
◐	□	◐	◐
■	□	◐	■

implication

$\rightarrow$	□	◐	■
□	■	■	■
◐	◐	◐	■
■	□	◐	■

disjonction

$\vee$	□	◐	■
□	□	◐	■
◐	◐	◐	■
■	■	■	■

équivalence

$\leftrightarrow$	□	◐	■
□	■	◐	□
◐	◐	◐	◐
■	□	◐	■

Tables de vérités dans K3

négation

A	$\neg A$
□	■
❍	❍
■	□

conjonction

$\wedge$	□	❍	■
□	□	□	□
❍	□	❍	❍
■	□	❍	■

implication

$\rightarrow$	□	❍	■
□	■	■	■
❍	❍	❍	■
■	□	❍	■

disjonction

$\vee$	□	❍	■
□	□	❍	■
❍	❍	❍	■
■	■	■	■

équivalence

$\leftrightarrow$	□	❍	■
□	■	❍	□
❍	❍	❍	❍
■	□	❍	■

Logique trivalente de Bochvar – B3

Définition (Logique de Bochvar – 1939)

Les énoncés sont indécidables car paradoxaux ou absurdes

Logique trivalente de Bochvar – B3

Définition (Logique de Bochvar – 1939)

Les énoncés sont indécidables car paradoxaux ou absurdes

Propriété de B3

Aucune loi logique n'est possible

Logique trivalente de Bochvar – B3

Définition (Logique de Bochvar – 1939)

Les énoncés sont indécidables car paradoxaux ou absurdes

Propriété de B3

Aucune loi logique n'est possible

NB : Bochvar a proposé une variante de B3 pour laquelle l'indéterminé est considéré comme faux. Il s'agit d'un équivalent syntaxique de la logique classique.

Tables de vérités dans B3

négation

A	$\neg A$
□	■
☽	☽
■	□

conjonction

$\wedge$	□	☽	■
□	□	□	□
☽	□	☽	☽
■	□	☽	■

implication

$\rightarrow$	□	☽	■
□	■	☽	■
☽	☽	☽	☽
■	□	☽	■

disjonction

$\vee$	□	☽	■
□	□	☽	■
☽	☽	☽	☽
■	■	☽	■

équivalence

$\leftrightarrow$	□	☽	■
□	■	☽	□
☽	☽	☽	☽
■	□	☽	■

Tables de vérités dans B3

négation

A	$\neg A$
□	■
☽	☽
■	□

conjonction

$\wedge$	□	☽	■
□	□	□	□
☽	□	☽	☽
■	□	☽	■

implication

$\rightarrow$	□	☽	■
□	■	☽	■
☽	☽	☽	☽
■	□	☽	■

disjonction

$\vee$	□	☽	■
□	□	☽	■
☽	☽	☽	☽
■	■	☽	■

équivalence

$\leftrightarrow$	□	☽	■
□	■	☽	□
☽	☽	☽	☽
■	□	☽	■

Tables de vérités dans B3

négation

A	$\neg A$
□	■
❍	❍
■	□

conjonction

$\wedge$	□	❍	■
□	□	□	□
❍	□	❍	❍
■	□	❍	■

implication

$\rightarrow$	□	❍	■
□	■	❍	■
❍	❍	❍	❍
■	□	❍	■

disjonction

$\vee$	□	❍	■
□	□	❍	■
❍	❍	❍	❍
■	■	❍	■

équivalence

$\leftrightarrow$	□	❍	■
□	■	❍	□
❍	❍	❍	❍
■	□	❍	■

Plan

Principe de la logique floue

Principe général

intégrer la capacité de l'être humain à accepter des **données imprécises** et à néanmoins être à même de **raisonner**

Principe de la logique floue

Principe général

intégrer la capacité de l'être humain à accepter des **données imprécises** et à néanmoins être à même de **raisonner**

Exemple

Même sans connaître la taille exacte de quelqu'un, chacun est capable de dire s'il/elle est grand(e) ou petit(e).

Principe de la logique floue

Principe général

intégrer la capacité de l'être humain à accepter des **données imprécises** et à néanmoins être à même de **raisonner**

Exemple

Même sans connaître la taille exacte de quelqu'un, chacun est capable de dire s'il/elle est grand(e) ou petit(e).

NB : la logique floue a été introduite par Zadeh en 1965

Notion de sous-ensemble flou

Principes des sous-ensembles flous

On se donne un ensemble de référence X

- un sous-ensemble de X est une classe de X telle que certains éléments de X en sont éléments et d'autres non
- si on peut indiquer avec quel **degré** chaque élément appartient à la classe, on parle de **sous-ensemble flou**

Notion de sous-ensemble flou

Principes des sous-ensembles flous

On se donne un ensemble de référence X

- un sous-ensemble de X est une classe de X telle que certains éléments de X en sont éléments et d'autres non
- si on peut indiquer avec quel **degré** chaque élément appartient à la classe, on parle de **sous-ensemble flou**

Définition (Sous-ensemble flou)

Un **sous-ensemble flou** *A de X est défini par une fonction d'appartenance qui associe à chaque élément x de X, le degré $f_A(x)$, compris entre 0 et 1, avec lequel x appartient à A.*

$$f_A(x) : X \to [0,1]$$

Sous-ensembles flous : notations

Notations

On utilise la notation suivante pour représenter le sous-ensemble flou A :

$$A = \begin{cases} \sum_{x \in X} f_A(x)/x & \text{si } X \text{ est fini} \\ \int_X f_A(x)/x & \text{si } X \text{ est infini} \end{cases}$$

Sous-ensembles flous : notations

Notations

On utilise la notation suivante pour représenter le sous-ensemble flou A :

$$A = \begin{cases} \sum_{x \in X} f_A(x)/x & \text{si } X \text{ est fini} \\ \int_X f_A(x)/x & \text{si } X \text{ est infini} \end{cases}$$

Quelques propriétés

- Lorsque f_A est à valeur dans $\{0, 1\}$, on obtient les sous-ensembles classiques
- Lorsque f_A prend la valeur 1 pour tous les éléments de X, le sous-ensemble flou est X lui-même
- Lorsque f_A est nulle sur tout X, on obtient l'ensemble vide $\emptyset$

Sous-ensembles flous : caractérisations

Caractérisation

Un sous-ensemble flou A de X est caractérisé par :

1. son **support**, noté $\mathrm{supp}(A)$, l'ensemble des éléments de X qui appartiennent au moins un peu, à A.
   $\mathrm{supp}(A) = \{x \in X \mid f_A(x) \neq 0\}$
2. sa **hauteur**, notée $h(a)$, le plus fort degré avec lequel un élément de X appartient à A. $h(a) = \sup_{x \in X} f_A(x)$
3. son **noyau**, noté $\mathrm{noy}(A)$, l'ensemble des éléments de X qui appartiennent de façon absolue (avec un degré 1) à A.
   $\mathrm{noy}(A) = \{x \in X \mid f_A(x) = 1\}$
4. sa **cardinalité**, noté $|A|$, le degré global avec lequel les éléments de X appartiennent à A. $|A| = \sum_{x \in X} f_A(x)$

Exemple

Soit $X = \{\mathrm{Paris}, \mathrm{Angers}, \mathrm{Nantes}\}$, l'ensemble des lieux proposés pour une habitation, notés P, A, N. On peut définir les sous-ensembles flous suivants correspondant à des choix :

- $F = 0.8/P + 0.6/A + 0.4/N$
- $F' = 0.2/P + 1/A + 0/N$
- $F'' = 0/P + 0/A + 1/N$

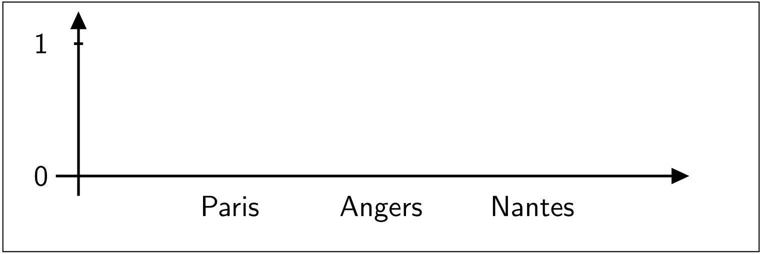
On a $h(F) = 0.8$, $\mathrm{supp}(F) = X$, $\mathrm{noy}(F) = \varnothing$, $|F| = 1.8$.
Pour F, tous les lieux sont acceptables, avec néanmoins un ordre de préférence.

Exemple

Soit $X = \{\text{Paris}, \text{Angers}, \text{Nantes}\}$, l'ensemble des lieux proposés pour une habitation, notés P, A, N. On peut définir les sous-ensembles flous suivants correspondant à des choix :

- $F = 0.8/P + 0.6/A + 0.4/N$
- $F' = 0.2/P + 1/A + 0/N$
- $F'' = 0/P + 0/A + 1/N$

On a $h(F) = 0.8$, $\text{supp}(F) = X$, $\text{noy}(F) = \varnothing$, $|F| = 1.8$.
Pour F, tous les lieux sont acceptables, avec néanmoins un ordre de préférence.

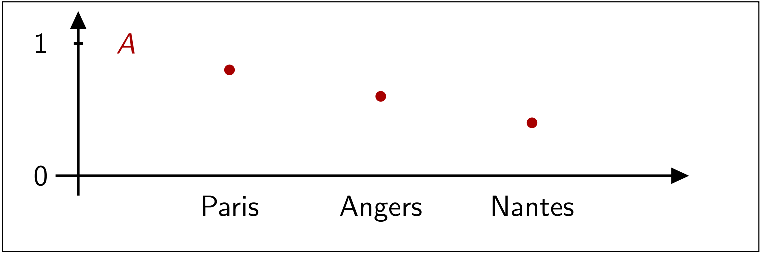


Exemple

Soit $X = \{\mathrm{Paris}, \mathrm{Angers}, \mathrm{Nantes}\}$, l'ensemble des lieux proposés pour une habitation, notés P, A, N. On peut définir les sous-ensembles flous suivants correspondant à des choix :

- $F = 0.8/P + 0.6/A + 0.4/N$
- $F' = 0.2/P + 1/A + 0/N$
- $F'' = 0/P + 0/A + 1/N$

On a $h(F) = 0.8$, $\mathrm{supp}(F) = X$, $\mathrm{noy}(F) = \varnothing$, $|F| = 1.8$.
Pour F, tous les lieux sont acceptables, avec néanmoins un ordre de préférence.

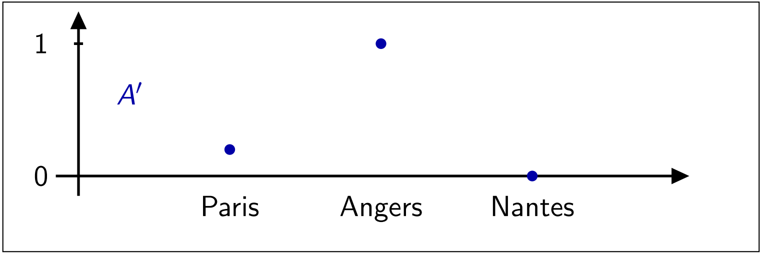


Exemple

Soit $X = \{\mathrm{Paris}, \mathrm{Angers}, \mathrm{Nantes}\}$, l'ensemble des lieux proposés pour une habitation, notés P, A, N. On peut définir les sous-ensembles flous suivants correspondant à des choix :

- $F = 0.8/P + 0.6/A + 0.4/N$
- $F' = 0.2/P + 1/A + 0/N$
- $F'' = 0/P + 0/A + 1/N$

On a $h(F) = 0.8$, $\mathrm{supp}(F) = X$, $\mathrm{noy}(F) = \varnothing$, $|F| = 1.8$.
Pour F, tous les lieux sont acceptables, avec néanmoins un ordre de préférence.

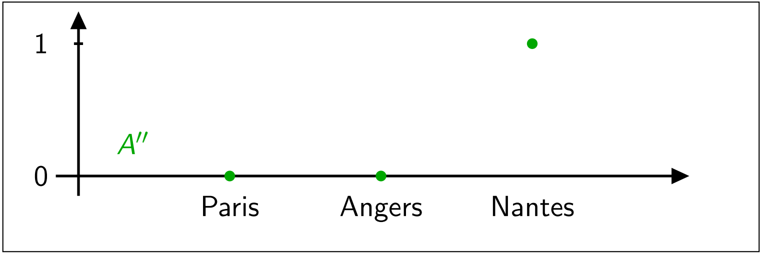


Exemple

Soit $X = \{\mathrm{Paris}, \mathrm{Angers}, \mathrm{Nantes}\}$, l'ensemble des lieux proposés pour une habitation, notés P, A, N. On peut définir les sous-ensembles flous suivants correspondant à des choix :

- $F = 0.8/P + 0.6/A + 0.4/N$
- $F' = 0.2/P + 1/A + 0/N$
- $F'' = 0/P + 0/A + 1/N$

On a $h(F) = 0.8$, $\mathrm{supp}(F) = X$, $\mathrm{noy}(F) = \varnothing$, $|F| = 1.8$.
Pour F, tous les lieux sont acceptables, avec néanmoins un ordre de préférence.



Exemple

On peut définir la notion de « trentaine » à l'aide d'un sous-ensemble flou normalisé A d'univers continu de support $[24, 42]$ et de noyau $[30, 38]$.

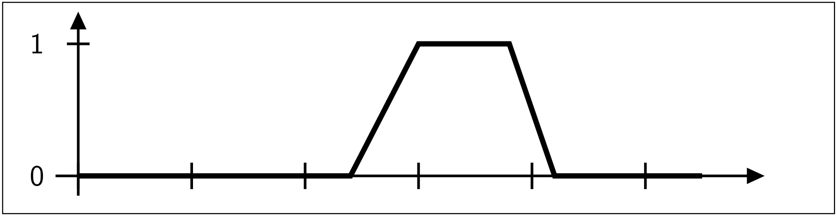
Exemple

On peut définir la notion de « trentaine » à l'aide d'un sous-ensemble flou normalisé A d'univers continu de support $[24, 42]$ et de noyau $[30, 38]$.

NB : un sous-ensemble flou est normalisé si sa hauteur est 1

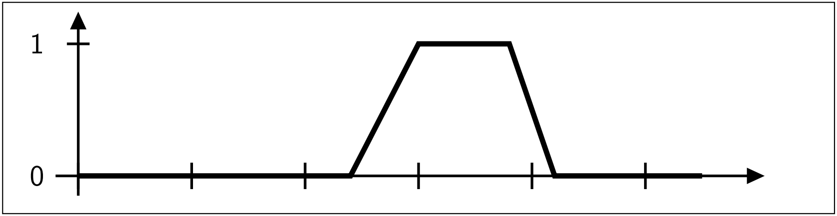
Exemple

On peut définir la notion de « trentaine » à l'aide d'un sous-ensemble flou normalisé A d'univers continu de support $[24, 42]$ et de noyau $[30, 38]$.



Exemple

On peut définir la notion de « trentaine » à l'aide d'un sous-ensemble flou normalisé A d'univers continu de support $[24, 42]$ et de noyau $[30, 38]$.



Exercice

Quel est la cardinalité de la « trentaine » ?

Sous-ensembles flous : propriétés

Propriétés

- un sous-ensemble classique est identique à son support et son noyau, il est normalisé et sa cardinalité correspond au nombre d'éléments
- un sous-ensemble flou A est dit plus **spécifique** que B ssi $\mathrm{noy}(A) \neq \varnothing \quad \mathrm{noy}(A) \subsetneq \mathrm{noy}(B) \quad \mathrm{supp}(A) \subseteq \mathrm{supp}(B)$
- un sous-ensemble flou A est dit plus **précis** que B de même noyau ssi

$$\mathrm{supp}(A) \subsetneq \mathrm{supp}(B)$$

Sous-ensembles flous : opérations

Opérations

- Deux sous-ensembles flous A et B sont **égaux** (on note $A = B$) ssi $\forall x \in X \quad f_A(x) = f_B(x)$

Sous-ensembles flous : opérations

Opérations

- Deux sous-ensembles flous A et B sont **égaux** (on note $A = B$) ssi $\forall x \in X \quad f_A(x) = f_B(x)$
- On dit que A est **inclus** dans B (on note $A \subseteq B$) ssi
$$\forall x \in X \quad f_A(x) \leq f_B(x)$$

Sous-ensembles flous : opérations

Opérations

- Deux sous-ensembles flous A et B sont **égaux** (on note $A = B$) ssi $\forall x \in X \quad f_A(x) = f_B(x)$
- On dit que A est **inclus** dans B (on note $A \subseteq B$) ssi
$$\forall x \in X \quad f_A(x) \leq f_B(x)$$
- L'**intersection** de deux sous-ensembles flous A et B de X est le sous-ensemble flou $C = A \cap B$ tel que :
$$\forall x \in X \quad f_C(x) = \min(f_A(x), f_B(x))$$

Sous-ensembles flous : opérations

Opérations

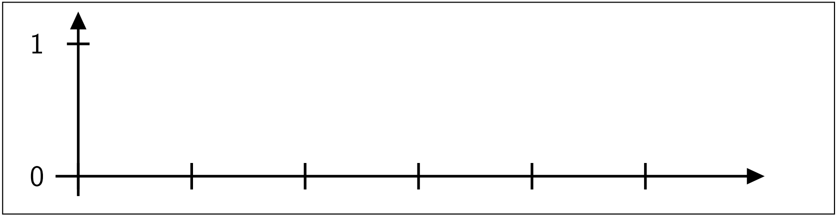
- Deux sous-ensembles flous A et B sont **égaux** (on note $A = B$) ssi $\forall x \in X \quad f_A(x) = f_B(x)$
- On dit que A est **inclus** dans B (on note $A \subseteq B$) ssi
$$\forall x \in X \quad f_A(x) \leq f_B(x)$$
- L'**intersection** de deux sous-ensembles flous A et B de X est le sous-ensemble flou $C = A \cap B$ tel que :
$$\forall x \in X \quad f_C(x) = \min(f_A(x), f_B(x))$$
- L'**union** de deux sous-ensembles flous A et B de X est le sous-ensemble flou $C = A \cup B$ **de** $\mathcal{F}(X)$ tel que :
$$\forall x \in X \quad f_C(x) = \max(f_A(x), f_B(x))$$

Exemple

- la « trentaine » : sous-ensemble flou normalisé A d'univers continu de support $[24, 42]$ et de noyau $[30, 38]$

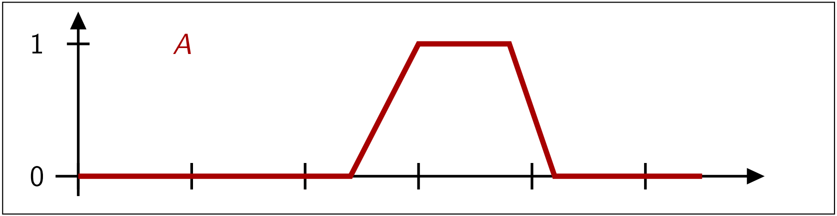
Exemple

- la « trentaine » : sous-ensemble flou normalisé A d'univers continu de support $[24, 42]$ et de noyau $[30, 38]$



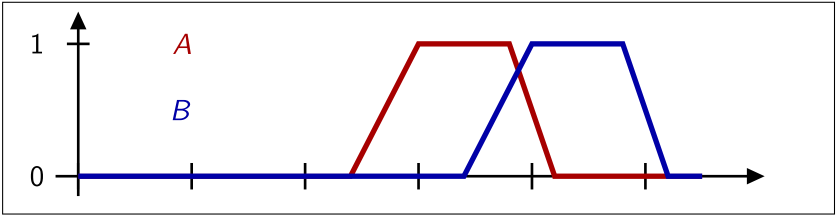
Exemple

- la « trentaine » : sous-ensemble flou normalisé A d'univers continu de support $[24, 42]$ et de noyau $[30, 38]$



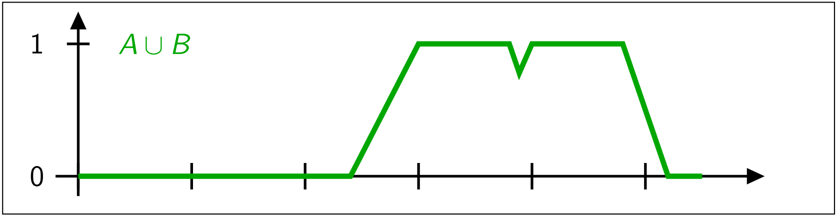
Exemple

- la « trentaine » : sous-ensemble flou normalisé A d'univers continu de support $[24, 42]$ et de noyau $[30, 38]$
- la « quarantaine » : sous-ensemble flou normalisé B d'univers continu de support $[34, 52]$ et de noyau $[40, 48]$



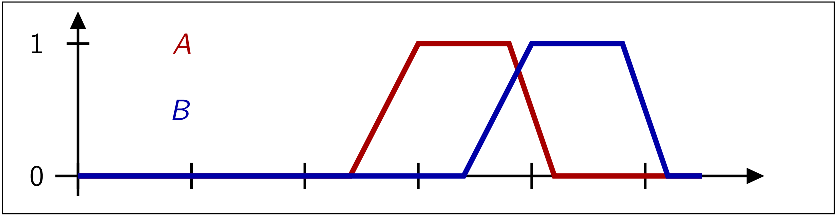
Exemple

- la « trentaine » : sous-ensemble flou normalisé A d'univers continu de support $[24, 42]$ et de noyau $[30, 38]$
- la « quarantaine » : sous-ensemble flou normalisé B d'univers continu de support $[34, 52]$ et de noyau $[40, 48]$



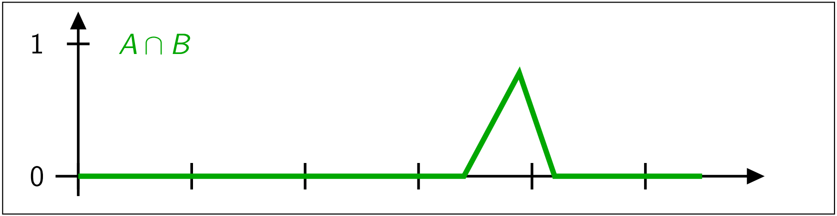
Exemple

- la « trentaine » : sous-ensemble flou normalisé A d'univers continu de support $[24, 42]$ et de noyau $[30, 38]$
- la « quarantaine » : sous-ensemble flou normalisé B d'univers continu de support $[34, 52]$ et de noyau $[40, 48]$



Exemple

- la « trentaine » : sous-ensemble flou normalisé A d'univers continu de support $[24, 42]$ et de noyau $[30, 38]$
- la « quarantaine » : sous-ensemble flou normalisé B d'univers continu de support $[34, 52]$ et de noyau $[40, 48]$



Sous-ensembles flous et propriétés classiques

Propriétés de l'intersection et de l'union

- associativité et commutativité de $\cap$ et $\cup$
- distributivité dans les deux sens de $\cap$ et $\cup$
- $A \cup \varnothing = A$, $A \cup X = X$
- $A \cap X = A$, $A \cap \varnothing = \varnothing$
- $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$

Sous-ensembles flous et propriétés classiques

Propriétés de l'intersection et de l'union

- associativité et commutativité de $\cap$ et $\cup$
- distributivité dans les deux sens de $\cap$ et $\cup$
- $A \cup \varnothing = A$, $A \cup X = X$
- $A \cap X = A$, $A \cap \varnothing = \varnothing$
- $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$

NB : on a aussi : $|A| + |B| = |A \cap B| + |A \cup B|$

Sous-ensembles flous : complémentation

Définition (Complémentation)

On définit le **complément** A^c *d'un élément* A *de* $\mathcal{F}(X)$ *en considérant qu'un élément appartient d'autant plus à* A^c *qu'il appartient peu à* A*. On a donc :*

$$\forall x \in X \quad f_{A^c}(x) = 1 - f_A(x)$$

Sous-ensembles flous : complémentation

Définition (Complémentation)

On définit le **complément** A^c *d'un élément* A *de* $\mathcal{F}(X)$ *en considérant qu'un élément appartient d'autant plus à* A^c *qu'il appartient peu à* A*. On a donc :*

$$\forall x \in X \quad f_{A^c}(x) = 1 - f_A(x)$$

Propriétés de la complémentation

- lois de de Morgan : $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ et $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
- $(A^c)^c = A$
- $|A| + |A^c| = |X|$

Sous-ensembles flous : complémentation

Définition (Complémentation)

On définit le **complément** A^c *d'un élément* A *de* $\mathcal{F}(X)$ *en considérant qu'un élément appartient d'autant plus à* A^c *qu'il appartient peu à* A*. On a donc :*

$$\forall x \in X \quad f_{A^c}(x) = 1 - f_A(x)$$

Propriétés de la complémentation

- lois de de Morgan : $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ et $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
- $(A^c)^c = A$
- $|A| + |A^c| = |X|$

NB : généralement, $A \cup A^c \neq X$ **et** $A \cap A^c \neq \varnothing$

Sous-ensembles flous : complémentation

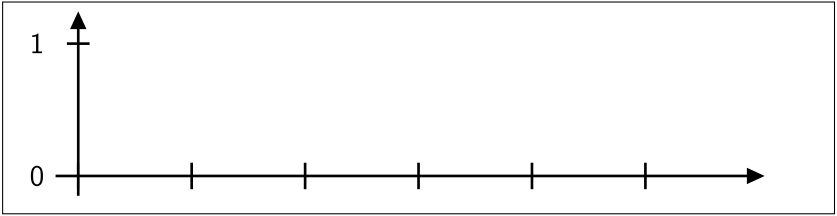
Exemple

la « trentaine » : sous-ensemble flou normalisé A d'univers continu de support $[24, 42]$ et de noyau $[30, 38]$

Sous-ensembles flous : complémentation

Exemple

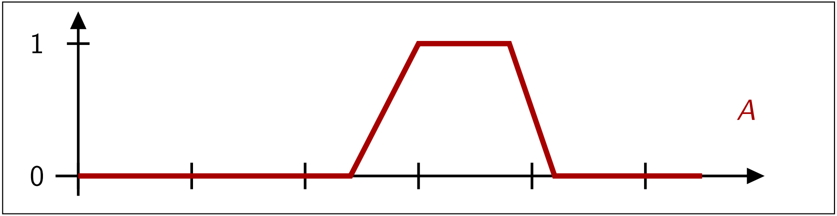
la « trentaine » : sous-ensemble flou normalisé A d'univers continu de support $[24, 42]$ et de noyau $[30, 38]$



Sous-ensembles flous : complémentation

Exemple

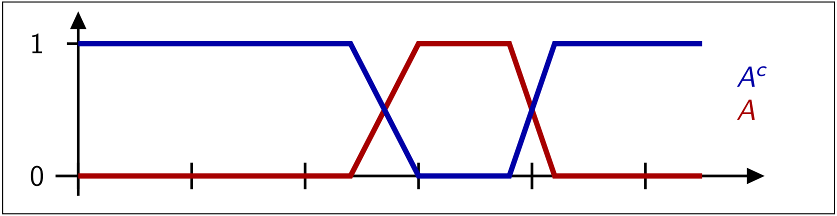
la « trentaine » : sous-ensemble flou normalisé A d'univers continu de support $[24, 42]$ et de noyau $[30, 38]$



Sous-ensembles flous : complémentation

Exemple

la « trentaine » : sous-ensemble flou normalisé A d'univers continu de support $[24, 42]$ et de noyau $[30, 38]$



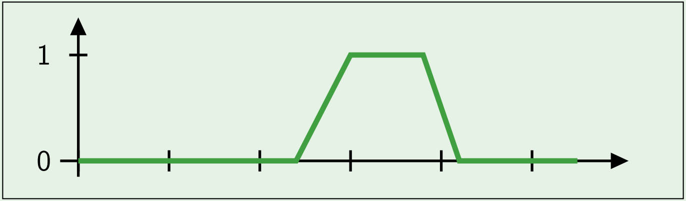
Sous-ensembles flous : α-coupes

Définition (α-coupe)

une **α-coupe** *A_α d'un sous-ensemble flou A de X est le sous-ensemble (classique) :* $A_\alpha = \{x \in X \mid f_A(x) \geq \alpha\}$

Exemple

On considère les personnes autour de la « trentaine »



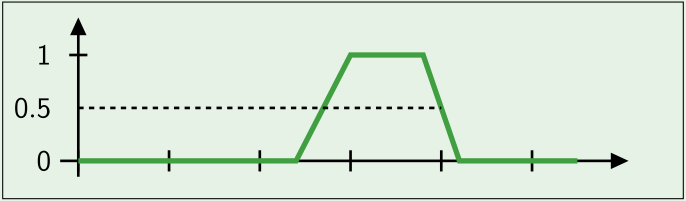
Sous-ensembles flous : α-coupes

Définition (α-coupe)

une **α-coupe** *A_α d'un sous-ensemble flou A de X est le sous-ensemble (classique) :* $A_\alpha = \{x \in X \mid f_A(x) \geq \alpha\}$

Exemple

On considère les personnes autour de la « trentaine »



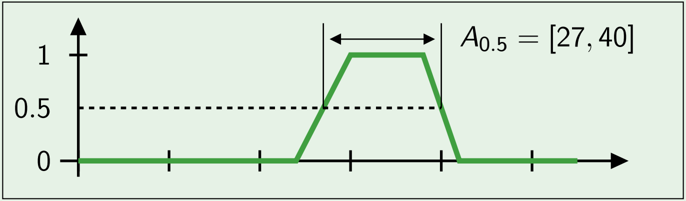
Sous-ensembles flous : α-coupes

Définition (α-coupe)

*une α-**coupe** A_α d'un sous-ensemble flou A de X est le sous-ensemble (classique) :* $A_\alpha = \{x \in X \mid f_A(x) \geq \alpha\}$

Exemple

On considère les personnes autour de la « trentaine »



Sous-ensembles flous : α-coupes

Propriétés des α-coupes

- $(A \cap B)_\alpha = A_\alpha \cap B_\alpha$
- $(A \cup B)_\alpha = A_\alpha \cup B_\alpha$
- $A \subseteq B \rightarrow A_\alpha \subseteq B_\alpha$

De plus, on peut reconstituer un sous-ensemble flou à partir de ses α-coupes :

$$\forall x \in X \quad f_A(x) = \sup_{\alpha \in]0,1]} \alpha \cdot \chi_{A_\alpha}(x)$$

NB : χ_{A_α} est la fonction caractéristique de A_α c'est-à-dire qui associe 1 à x si $x \in A_\alpha$ et 0 sinon

Sous-ensembles flous : produit cartésien

Définition (Produit cartésien de sous-ensembles flous)

- $X_1, \ldots, X_r$ *des ensembles de référence*
- $X = X_1 \times \cdots \times X_r$ *leur produit cartésien*

À partir des sous-ensembles flous $A_1, \ldots, A_r$ *respectivement définis sur* $X_1, \ldots, X_r$*, on construit un sous-ensemble flou* $A = A_1 \times \cdots \times A_r$ *de* X*, considéré comme leur* **produit cartésien***, de fonction d'appartenance :*

$$\forall x = (x_1, \ldots, x_r) \in X \quad f_A(x) = \min(f_{A_1}(x_1), \ldots, f_{A_r}(x_r))$$

NB : les éléments de X sont des r-uplets $(x_1, \ldots, x_r)$, avec $x_1 \in X_1, \ldots, x_r \in X_r$

Exemple

- $X_1 = \{P, A, N\}$: univers des lieux proposés pour une résidence
- $X_2 = \{M, A\}$: univers de choix entre une maison et un appartement

On se donne des préférences relatives aux deux univers :

- $A_1 = 0.8/P + 0.6/A + 0.4/N$
- $A_2 = 0.3/M + 0.7/A$

Une préférence relative aux deux univers de façon globale est représentée par leur produit cartésien, défini comme $A = 0.3/(P, M) + 0.3/(A, M) + 0.3/(N, M) + 0.7/(P, A) + 0.6/(A, A) + 0.4/(N, A)$.

Exemple

- $X_1 = \{P, A, N\}$: univers des lieux proposés pour une résidence
- $X_2 = \{M, A\}$: univers de choix entre une maison et un appartement

On se donne des préférences relatives aux deux univers :

- $A_1 = 0.8/P + 0.6/A + 0.4/N$
- $A_2 = 0.3/M + 0.7/A$

Une préférence relative aux deux univers de façon globale est représentée par leur produit cartésien, défini comme $A = 0.3/(P, M) + 0.3/(A, M) + 0.3/(N, M) + 0.7/(P, A) + 0.6/(A, A) + 0.4/(N, A)$.

NB : ceci correspond à une préférence pour un appartement à Paris, éventuellement à Angers ou Nantes, toutes les autres hypothèses étant acceptables mais très modérément.

Relations floues

Définition

Une **relation floue** R *entre* X *et* Y *est définie comme un sous-ensemble flou de* $X \times Y$.

Relations floues

Définition

Une **relation floue** R *entre* X *et* Y *est définie comme un sous-ensemble flou de* $X \times Y$.

NB : si X et Y sont finis, elle peut être décrite par la matrice $M(R)$ des valeurs de sa fonction d'appartenance

Relations floues

Définition

Une **relation floue** *R entre X et Y est définie comme un sous-ensemble flou de $X \times Y$.*

NB : si X et Y sont finis, elle peut être décrite par la matrice $M(R)$ des valeurs de sa fonction d'appartenance

Exemple

Soit $X = Y = \{x_1, x_2, x_3\}$, $f_R(x, y)$ est définie sous forme matricielle :

$x \backslash y$	x_1	x_2	x_3
x_1	0.2	1	0.5
x_2	0	0.6	0.3
x_3	0	0.9	0.4

Relations floues

Définition (Manipulation de relations floues)

- *l'***inverse** *de la relation R entre X et Y est la relation floue R^{-1} entre Y et X définie par :*

$$\forall x \in X \quad \forall y \in Y \quad f_{R^{-1}}(y,x) = f_R(x,y)$$

- *la* **composition** *de deux relations floues R_1 sur $X \times Y$ et R_2 sur $Y \times Z$ définit une relation floue $R = R_1 \circ R_2$ sur $X \times Z$ de fonction d'appartenance :*

$$\forall (x,z) \in X \times Z \quad f_R(x,z) = \sup_{y \in Y} \quad \min(f_{R_1}(x,y), f_{R_2}(y,z))$$

Relations floues : composition

Exemple

$$R : \begin{array}{c|ccc} {}_x{}^y & x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline x_1 & 0.2 & 1 & 0.5 \\ x_2 & 0 & 0.6 & 0.3 \\ x_3 & 0 & 0.9 & 0.4 \end{array} \quad \longrightarrow \quad R \circ R : \begin{array}{c|ccc} {}_x{}^y & x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline x_1 & 0.2 & 0.6 & 0.4 \\ x_2 & 0 & 0.6 & 0.3 \\ x_3 & 0 & 0.6 & 0.4 \end{array}$$

Relations floues : propriétés

Définition (Propriétés des relations floues)

- **symétrie** $\forall (x, y) \in X \times X \quad f_R(x, y) = f_R(y, x)$
- **réflexivité** $\forall x \in X \quad f_R(x, x) = 1$
- **transitivité** $R \circ R \subseteq R$
  $\forall (x, z) \in X \times X \quad f_R(x, z) \geq \sup_{y \in X} \quad \min(f_R(x, y), f_R(y, z))$
- **antisymétrie**
  $\forall (x, y) \in X \times X \quad f_R(x, y) > 0 \ et \ f_R(x, y) > 0 \rightarrow x = y$

Relations floues : propriétés

Exemple

La relation floue $R =$ « approximativement égal » définie par :

$$\forall x \in X \quad \forall y \in Y \quad f_R(x, y) = \frac{1}{1 + (x - y)^2}$$

est **symétrique** et **réflexive**.

Quantités floues

Définition (Quantité floue)

Un sous-ensemble flou normalisé de $\mathbb{R}$ est appelé **quantité floue**.

Quantités floues

Définition (Quantité floue)

Un sous-ensemble flou normalisé de $\mathbb{R}$ est appelé **quantité floue**.

Définition (Valeur modale)

Une **valeur modale** *d'une quantité floue Q est un élément m de $\mathbb{R}$ tel que $f_Q(m) = 1$.*

Quantités floues

Définition (Quantité floue)

Un sous-ensemble flou normalisé de $\mathbb{R}$ est appelé **quantité floue**.

Définition (Valeur modale)

Une **valeur modale** *d'une quantité floue Q est un élément m de $\mathbb{R}$ tel que $f_Q(m) = 1$.*

Définition (Sous-ensemble convexe)

Un sous-ensemble flou F de X est **convexe** *ssi toute α-coupe de F est une partie convexe de X.*

Quantités floues : intervalle flou

Définition (Intervalle flou)

Un **intervalle flou** *est une quantité floue convexe.*

Quantités floues : intervalle flou

Définition (Intervalle flou)

Un **intervalle flou** *est une quantité floue convexe.*

NB : il correspond à un intervalle de l'ensemble des réels dont les limites sont imprécises

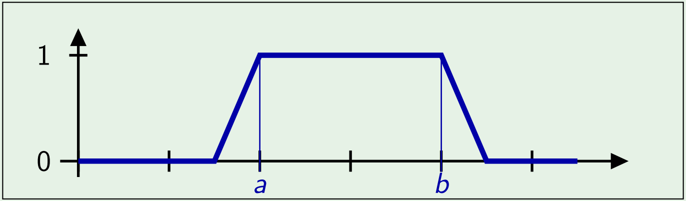
Quantités floues : intervalle flou

Définition (Intervalle flou)

Un **intervalle flou** *est une quantité floue convexe.*

NB : il correspond à un intervalle de l'ensemble des réels dont les limites sont imprécises

Exemple



Quantités floues : nombre flou

Définition (Nombre flou)

Un **nombre flou** *est un intervalle flou de fonction d'appartenance semi-continue supérieurement et de support compact, admettant une unique valeur modale.*

Quantités floues : nombre flou

Définition (Nombre flou)

Un **nombre flou** *est un intervalle flou de fonction d'appartenance semi-continue supérieurement et de support compact, admettant une unique valeur modale.*

NB : il correspond à un nombre réel connu imprécisément

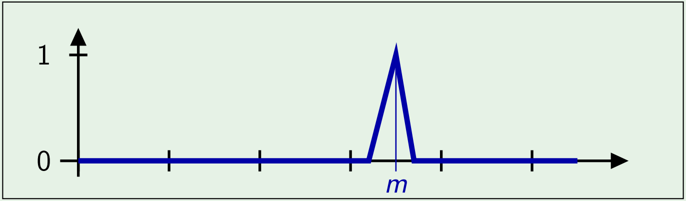
Quantités floues : nombre flou

Définition (Nombre flou)

Un **nombre flou** *est un intervalle flou de fonction d'appartenance semi-continue supérieurement et de support compact, admettant une unique valeur modale.*

NB : il correspond à un nombre réel connu imprécisément

Exemple



Quantités floues : intervalle flou $L - R$

Définition (Intervalle flou $L - R$)

Un intervalle flou I est de **type L-R** *si et seulement si sa fonction d'appartenance est construite à partir de :*

- *quatre paramètres (m, m', a, b), m et m' réels, a et b strictement positifs*
- *deux fonctions notées L et R définies sur l'ensemble des réels positifs, à valeurs dans $[0, 1]$, semi-continues supérieurement, non-croissantes, telles que :*
  - $L(0) = R(0) = 1$
  - $L(1) = 0$ *ou* $\forall x, L(x) > 0$ *avec* $\lim_{x \to \infty} L(x) = 0$
  - $R(1) = 0$ *ou* $\forall x, R(x) > 0$ *avec* $\lim_{x \to \infty} R(x) = 0$

f_I est alors définie par :

$$
\begin{array}{lcll}
f_I(x) & = & L((m-x)/a) & \text{si } x \leq m \\
f_I(x) & = & 1 & \text{si } m < x < m' \\
f_I(x) & = & R((x-m')/b) & \text{si } x \geq m'
\end{array}
$$

On note alors

- $I = (m, m', a, b)_{LR}$ *un intervalle flou de type L-R*
- $M = (m, a, b)_{LR}$ *un nombre flou de type L-R (cas particulier correspondant à $m = m'$)*

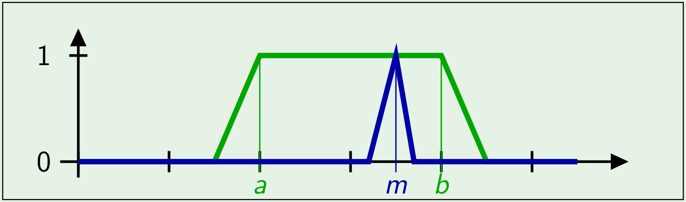
Quantités floues : intervalle flou $L - R$

NB : les quantités floues ont souvent des fonctions d'appartenance linéaires par morceaux (de type L-R avec $R(x) = L(x) = \max(0, 1 - x)$)

Quantités floues : intervalle flou $L - R$

NB : les quantités floues ont souvent des fonctions d'appartenance linéaires par morceaux (de type L-R avec $R(x) = L(x) = \max(0, 1 - x)$)

Exemple



$I = (2, 4, 0.5, 0.5)_{LR}$ $\quad$ $M = (3.5, 0.2, 0.2)_{LR}$

Quantités floues : opérations

Définition (Opérations sur les intervalles $L - R$)

Soient $I = (m, m', a, b)_{LR}$ *et* $J = (n, n', c, d)_{LR}$

- **opposition** : $-I = (-m', -m, b, a)_{RL}$
- **somme** : $I \oplus J = (m + n, m' + n', a + c, b + d)_{LR}$
- **différence** : $I \ominus J = (m - n', m' - n, a + d, b + c)_{LR}$ *si* $L = R$

Quantités floues : opérations

Définition (Opérations sur les intervalles $L - R$)

Soient $I = (m, m', a, b)_{LR}$ *et* $J = (n, n', c, d)_{LR}$

- **opposition** : $-I = (-m', -m, b, a)_{RL}$
- **somme** : $I \oplus J = (m + n, m' + n', a + c, b + d)_{LR}$
- **différence** : $I \ominus J = (m - n', m' - n, a + d, b + c)_{LR}$ *si* $L = R$

NB : le produit (noté $\otimes$) et le quotient (noté $\oslash$) ne peuvent se définir simplement car on n'obtient généralement pas un intervalle de type L-R lorsqu'on généralise les produit et quotient classiques

Exercice

On utilise des intervalles flous de fonction d'appartenance trapézoïdale.

- le prix d'achat d'un immeuble est **« approximativement entre 1.5 et 3 MEUR à 150 kEUR près »**
- le coût de remise en état est **« approximativement entre 4.5 et 6 MEUR à 300 kEUR près »**

Calculer le prix de revient de cet immeuble.

Exercice

On utilise des intervalles flous de fonction d'appartenance trapézoïdale.

- le prix d'achat d'un immeuble est **« approximativement entre 1.5 et 3 MEUR à 150 kEUR près »**
- le coût de remise en état est **« approximativement entre 4.5 et 6 MEUR à 300 kEUR près »**

Calculer le prix de revient de cet immeuble.

Correction

- prix d'achat : $p_a = (1.5, 3, 0.15, 0.15)_{LR}$
- coût de remise en état : $c_r = (4.5, 6, 0.3, 0.3)_{LR}$

prix de revient : $p_a \oplus c_r = (6, 9, 0.45, 0.45)_{LR}$.

Variables linguistiques

Définition (Variable linguistique)

Une **variable linguistique** *est représentée par un triplet* (V, X, T_V) *dans lequel*

- X *est un* **ensemble de référence** *(l'ensemble des nombres entiers, des réels, ...)*
- V *est une* **variable** *(l'âge, la température, ...), définie sur* X*, sa valeur pouvant être n'importe quel élément de* X
- T_V *est un* **ensemble***, fini ou infini,* **de sous-ensembles flous** *de* X*, qui sont utilisés pour caractériser* V*, définissant des restrictions des valeurs que prend* V *dans* X

Variables linguistiques

Définition (Variable linguistique)

Une **variable linguistique** *est représentée par un triplet* (V, X, T_V) *dans lequel*

- X *est un* **ensemble de référence** *(l'ensemble des nombres entiers, des réels, ...)*
- V *est une* **variable** *(l'âge, la température, ...), définie sur* X*, sa valeur pouvant être n'importe quel élément de* X
- T_V *est un* **ensemble***, fini ou infini,* **de sous-ensembles flous** *de* X*, qui sont utilisés pour caractériser* V*, définissant des restrictions des valeurs que prend* V *dans* X

NB : cette notion sert à modéliser les connaissances imprécises ou vagues sur une variable dont la valeur précise est inconnue

Variables linguistiques

Exemple

Considérons la taille comme une variable V, définie sur l'ensemble X des entiers positifs. Dans le cas des êtres humains, on peut définir T_V comme l'ensemble de qualificatifs : minuscule, petit, moyen, grand et immense.
(V, X, T_V) est alors une variable linguistique utilisée pour décrire la taille d'être humains.

Variables linguistiques

Exemple

Considérons la taille comme une variable V, définie sur l'ensemble X des entiers positifs. Dans le cas des êtres humains, on peut définir T_V comme l'ensemble de qualificatifs : minuscule, petit, moyen, grand et immense.
(V, X, T_V) est alors une variable linguistique utilisée pour décrire la taille d'être humains.

NB : si on voulait décrire également la taille d'un humain par sa valeur précise, il faudrait ajouter dans T_V tous les singletons de X

Modificateurs linguistiques

Définition (Modificateur linguistique)

Un **modificateur linguistique** *est un opérateur m qui permet, à partir de toute caractérisation floue A de V, de produire une nouvelle caractérisation $m(A)$.*
Si la fonction d'appartenance de A est f_A, celle de $m(A)$ est $f_{m(A)} = t_m(f_A)$, obtenue par l'intermédiaire d'une transformation mathématique t_m attachée à m.

Modificateurs linguistiques

Définition (Modificateur linguistique)

Un **modificateur linguistique** *est un opérateur m qui permet, à partir de toute caractérisation floue A de V, de produire une nouvelle caractérisation $m(A)$.*
Si la fonction d'appartenance de A est f_A, celle de $m(A)$ est $f_{m(A)} = t_m(f_A)$, obtenue par l'intermédiaire d'une transformation mathématique t_m attachée à m.

Exemple

- « **très** » est généralement associé à la transformation $t_m(f_A(x)) = f_A(x)^2$
- « **plus ou moins** » est généralement associé à la transformation $t_m(f_A(x)) = f_A(x)^{1/2}$

Modificateurs linguistiques

Caractérisation des modificateurs

On peut distinguer des modificateurs :

- de **renforcement** tels que « très », « fortement », « réellement », ...
- d'**affaiblissement** tels que « plus ou moins », « relativement », « plutôt », ...

Modificateurs linguistiques

Caractérisation des modificateurs

On peut distinguer des modificateurs :

- de **renforcement** tels que « très », « fortement », « réellement », ...
- d'**affaiblissement** tels que « plus ou moins », « relativement », « plutôt », ...

NB : une négation « non » peut être considérée comme un modificateur linguistique, pour une transformation $t_m(f_A(x)) = 1 - f_A(x)$.

Modificateurs linguistiques

Définition (Caractérisations engendrées par un modificateur)

Pour un ensemble M de modificateurs disponibles, on note $M(T_V)$ celui des **caractérisations floues engendrées par** *M à partir de T_V.*

Modificateurs linguistiques

Définition (Caractérisations engendrées par un modificateur)

Pour un ensemble M de modificateurs disponibles, on note $M(T_V)$ celui des **caractérisations floues engendrées par** *M à partir de T_V.*

Exemple

Avec $T_V = \{\text{petit, moyen, grand}\}$, $M = \{\text{plutôt, non}\}$, $M(T_V)$ contient « plutôt petit », « plutôt non grand », « non moyen », ...

Propositions floues

Définition (Proposition floue élémentaire)

On considère :

- *un ensemble L de variables linguistiques*
- *un ensemble M de modificateurs*
- *une variable linguistique (V, X, T_V) de L*
- *une caractérisation floue normalisée A de T_V ou $M(T_V)$*

Une **proposition floue élémentaire** *est alors définie par la qualification*
« V **est** A »

Propositions floues

Définition (Proposition floue élémentaire)

On considère :

- *un ensemble L de variables linguistiques*
- *un ensemble M de modificateurs*
- *une variable linguistique (V, X, T_V) de L*
- *une caractérisation floue normalisée A de T_V ou $M(T_V)$*

Une **proposition floue élémentaire** *est alors définie par la qualification*
« V **est** *A »*

Exemple

« La taille est moyenne », « la vitesse est plutôt rapide », « le prix n'est pas cher »

Propositions floues

Définition (Proposition floue élémentaire)

On considère :

- *un ensemble L de variables linguistiques*
- *un ensemble M de modificateurs*
- *une variable linguistique (V, X, T_V) de L*
- *une caractérisation floue normalisée A de T_V ou $M(T_V)$*

Une **proposition floue élémentaire** *est alors définie par la qualification « V* **est** *A »*

Exemple

« La taille est moyenne », « la vitesse est plutôt rapide », « le prix n'est pas cher »

Définition (Valeur de vérité)

La **valeur de vérité** *d'une proposition floue élémentaire « V est A » est définie par la fonction d'appartenance f_A de A.*

Propositions floues générales

Définition (Proposition floue générale)

Une **proposition floue générale** *est obtenue par la composition de propositions floues élémentaires « V est A », « W est B », ... pour des variables V, W, ... supposées non interactives.*

- **conjonction** : **« V est A et W est B »** *associée au produit cartésien $A \times B$ caractérisant (V, W) sur l'ensemble $X \times Y$. Valeur de vérité :* $\min(f_A(x), f_B(y))$ *en tout point (x, y) de $X \times Y$.*
- **disjonction** : **« V est A ou W est B »** *associée au produit cartésien $A \times B$ caractérisant (V, W) sur l'ensemble $X \times Y$. Valeur de vérité :* $\max(f_A(x), f_B(y))$ *en tout point (x, y) de $X \times Y$.*
- **généralisation aisée**

Quantificateur flou

Définition (Quantificateur flou)

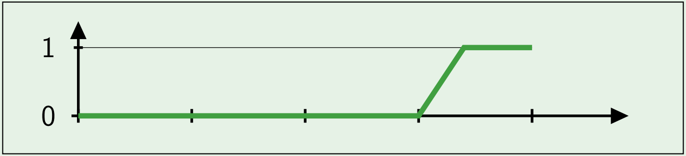
Un **quantificateur flou** *est un sous-ensemble flou de l'ensemble* $\mathbb{R}$ *des nombres réels (souvent* $[0,1]$*) qui décrit un nombre de cas ou une proportion approximative, tels que « dans la plupart des cas », « rarement », « dans quelques cas », « généralement », . . .*

Quantificateur flou

Définition (Quantificateur flou)

Un **quantificateur flou** *est un sous-ensemble flou de l'ensemble* $\mathbb{R}$ *des nombres réels (souvent* $[0, 1]$*) qui décrit un nombre de cas ou une proportion approximative, tels que « dans la plupart des cas », « rarement », « dans quelques cas », « généralement », ...*

Exemple



quantificateur flou **dans la plupart des cas**

Raisonnement flou

Définition (Règle floue)

Une **règle floue** *est une proposition floue utilisant une implication*

Raisonnement flou

Définition (Règle floue)

Une **règle floue** *est une proposition floue utilisant une implication*

Définition (Implication floue)

*La valeur de vérité de l'***implication floue** *associée à une règle du type* « **si** V **est** A **alors** W **est** B » *s'exprime en fonction des fonctions d'appartenances* $f_A(x)$ *et* $f_B(y)$ *:*

$$f_R(x, y) = \Phi(f_A(x), f_B(y))$$

Raisonnement flou

Définition (Règle floue)

Une **règle floue** *est une proposition floue utilisant une implication*

Définition (Implication floue)

*La valeur de vérité de l'***implication floue** *associée à une règle du type* **« si V est A alors W est B »** *s'exprime en fonction des fonctions d'appartenances $f_A(x)$ et $f_B(y)$:*

$$f_R(x, y) = \Phi(f_A(x), f_B(y))$$

NB : Φ doit être compatible avec l'implication classique

Raisonnement flou

Définition (Règle floue)

Une **règle floue** *est une proposition floue utilisant une implication*

Définition (Implication floue)

*La valeur de vérité de l'***implication floue** *associée à une règle du type* « **si** V **est** A **alors** W **est** B » *s'exprime en fonction des fonctions d'appartenances* $f_A(x)$ *et* $f_B(y)$ *:*

$$f_R(x, y) = \Phi(f_A(x), f_B(y))$$

NB : Φ doit être compatible avec l'implication classique

Exemple

$\Phi(x, y) = \min(1 - x + y, 1)$ Łukasiewicz

Raisonnement flou

Définition (Modus ponens généralisé)

- *règle : si V est A alors W est B*
- *observation : V est A'*
- *on veut conclure : W est B'*

On calcule :

$$\forall y \in Y \quad f_{B'}(y) = \sup_{x \in X} \top(f_{A'}(x), f_R(x, y))$$

Raisonnement flou

Définition (Modus ponens généralisé)

- *règle : si V est A alors W est B*
- *observation : V est A'*
- *on veut conclure : W est B'*

On calcule :

$$\forall y \in Y \quad f_{B'}(y) = \sup_{x \in X} \top(f_{A'}(x), f_R(x,y))$$

NB : $\top$ (opérateur de modus ponens généralisé) doit être compatible avec le modus ponens ordinaire

Raisonnement flou

Définition (Modus ponens généralisé)

- *règle : si V est A alors W est B*
- *observation : V est A'*
- *on veut conclure : W est B'*

On calcule :

$$\forall y \in Y \quad f_{B'}(y) = \sup_{x \in X} \top(f_{A'}(x), f_R(x,y))$$

NB : $\top$ (opérateur de modus ponens généralisé) doit être compatible avec le modus ponens ordinaire

Exemple

$$\top(x,y) = \max(x+y-1, 0) \qquad \text{Łukasiewicz}$$

Caractéristiques de la logique floue

Quand utiliser la logique floue ?

- manipuler des valeurs de vérités intermédiaires
- moduler la notation de quantificateur
- qualifier linguistiquement la probabilité, la possibilité ou la vérité d'une proposition
- utiliser des règles de déduction en présence de faits qui ne leur conviennent qu'imparfaitement

Caractéristiques de la logique floue

Évolution de la logique floue

- années 1970 en Europe : commande floue de processus industriels
- années 1980 au Japon : tout ce que vous avez entendu
- autres domaines d'application : économie, médecine, aide à la décision, décision de groupe, reconnaissance des formes, classification, systèmes experts, bases de données, conception industrielle, etc.

Module un – logique(s)

Ce qu'il faut retenir

Module un – logique(s)

Ce qu'il faut retenir

- logique des propositions

Module un – logique(s)

Ce qu'il faut retenir

- logique des propositions
  - intérêt des formes normales

Module un – logique(s)

Ce qu'il faut retenir

- logique des propositions
  - intérêt des formes normales
  - structure mathématique sous-jacente

Module un – logique(s)

Ce qu'il faut retenir

- logique des propositions
  - intérêt des formes normales
  - structure mathématique sous-jacente
  - liens entre conséquence logique et démonstration

Module un – logique(s)

Ce qu'il faut retenir

- logique des propositions
  - intérêt des formes normales
  - structure mathématique sous-jacente
  - liens entre conséquence logique et démonstration
  - principe de résolution et démonstration par réfutation

Module un – logique(s)

Ce qu'il faut retenir

- logique des propositions
  - intérêt des formes normales
  - structure mathématique sous-jacente
  - liens entre conséquence logique et démonstration
  - principe de résolution et démonstration par réfutation
- logique du premier ordre

Module un – logique(s)

Ce qu'il faut retenir

- logique des propositions
  - intérêt des formes normales
  - structure mathématique sous-jacente
  - liens entre conséquence logique et démonstration
  - principe de résolution et démonstration par réfutation
- logique du premier ordre
  - théorème de Herbrand et utilisations

Module un – logique(s)

Ce qu'il faut retenir

- logique des propositions
  - intérêt des formes normales
  - structure mathématique sous-jacente
  - liens entre conséquence logique et démonstration
  - principe de résolution et démonstration par réfutation
- logique du premier ordre
  - théorème de Herbrand et utilisations
  - notion d'unificateur et algorithme d'unification

Module un – logique(s)

Ce qu'il faut retenir

- logique des propositions
  - intérêt des formes normales
  - structure mathématique sous-jacente
  - liens entre conséquence logique et démonstration
  - principe de résolution et démonstration par réfutation
- logique du premier ordre
  - théorème de Herbrand et utilisations
  - notion d'unificateur et algorithme d'unification
  - lien entre logique et programmation

Module un – logique(s)

Ce qu'il faut retenir

- logique des propositions
  - intérêt des formes normales
  - structure mathématique sous-jacente
  - liens entre conséquence logique et démonstration
  - principe de résolution et démonstration par réfutation
- logique du premier ordre
  - théorème de Herbrand et utilisations
  - notion d'unificateur et algorithme d'unification
  - lien entre logique et programmation
- logiques non classiques

Module un – logique(s)

Ce qu'il faut retenir

- logique des propositions
  - intérêt des formes normales
  - structure mathématique sous-jacente
  - liens entre conséquence logique et démonstration
  - principe de résolution et démonstration par réfutation
- logique du premier ordre
  - théorème de Herbrand et utilisations
  - notion d'unificateur et algorithme d'unification
  - lien entre logique et programmation
- logiques non classiques
  - modulation des propositions

Module un – logique(s)

Ce qu'il faut retenir

- logique des propositions
  - intérêt des formes normales
  - structure mathématique sous-jacente
  - liens entre conséquence logique et démonstration
  - principe de résolution et démonstration par réfutation
- logique du premier ordre
  - théorème de Herbrand et utilisations
  - notion d'unificateur et algorithme d'unification
  - lien entre logique et programmation
- logiques non classiques
  - modulation des propositions
  - prise en compte de l'indétermination

Module un – logique(s)

Ce qu'il faut retenir

- logique des propositions
  - intérêt des formes normales
  - structure mathématique sous-jacente
  - liens entre conséquence logique et démonstration
  - principe de résolution et démonstration par réfutation
- logique du premier ordre
  - théorème de Herbrand et utilisations
  - notion d'unificateur et algorithme d'unification
  - lien entre logique et programmation
- logiques non classiques
  - modulation des propositions
  - prise en compte de l'indétermination
  - prise en compte de l'imprécis et de l'incertain