La logique des propositions

Aristote a défini ainsi le concept de proposition : "... tout discours n'est pas une proposition, mais seulement le discours dans lequel réside le vrai ou le faux, ce qui n'arrive pas dans tous les cas : ainsi la prière est un discours, mais elle n'est ni vraie ni fausse (Ibid, 17a5).

1 - Sa syntaxe

Pour étudier la syntaxe d'un langage il faut donner un alphabet (un ensemble de symboles) et des règles de constructions syntaxiques d'expressions à partir de ces symboles.

1.1 - L'alphabet

L'alphabet est constitué :

- de **connecteurs** : $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ qui se lisent respectivement non, et, ou, implique et équivalent. (NB: on retrouve les opérateurs de l'algébre de Boole non . (et), +(ou))
- de **délimiteurs** : les parenthèses ( )
- d'un ensemble infini dénombrable d'**atomes** appelés aussi propositions ou variables propositionnelles
- des deux constantes propositionelles **V** (vrai) et **F** (faux)

NB : Par convention pour ce cours on notera les atomes avec les majuscules de l'alphabet latin, et les concaténations de telles lettres){A, B, Z, Ai,...}

1.2 - Les formules bien formées

Le **langage** est constitué de l' ensemble des Formules Bien Formées (appelées aussi : FBFs ou Well Formed-Formula WFF) ou expressions bien formées défini comme suit:

- **Base :** tout atome est une fbf, de même les constantes propositionnelles sont des fbf
- **Induction :** si F et G sont des fbfs alors $(\neg G)$, $(F \wedge G)$, $(F \vee G)$, $(F \rightarrow G)$ et $(F \leftrightarrow G)$ sont des fbfs
- **Clôture :** toutes les fbfs sont obtenues par application des 2 règles ci-dessus.

_ Ordre de priorité des connecteurs : (Le plus prioritaire) $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$
$A \wedge \neg B \vee C \rightarrow D \wedge E$ doit se lire $(((A \wedge (\neg B)) \vee C) \rightarrow (D \wedge E))$

_ On omet par abus les parenthèses les plus externes
$(A \vee B)$ devient $A \vee B$

_ Quand il y a un seul connecteur, l'association se fait de gauche à droite.
$A \rightarrow B \rightarrow C$ correspond à $((A \rightarrow B) \rightarrow C)$

Exercice 1

Pour s'exercer essayez de déterminer si les formules suivantes appartiennent à la logique des propositions.
Soient A, B, C, D des fbfs
a) $((A \vee (\neg B)) \wedge (C \vee D))$
b) $(A \vee B)\ (\wedge \vee C)$

La correction est uniquement accessible sur Internet

1.3 - Définition du calcul propositionnel

On appelle calcul propositionnel le système formel défini par :

- L'alphabet défini à la section1.1
- L'ensemble des formules bien formées défini à la section 1.2
- Les schémas d'axiomes suivants :
  1) $(A \rightarrow (B \rightarrow A))$
  2) $((A \rightarrow (B \rightarrow C))\ ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)))$
  3) $(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$
- La règle d'inférence : le modus ponens
  $A, A \rightarrow B \vdash B$

Une règle d'inférence représentation d'un procédé pour, à partir d'une ou de plusieurs fbfs dériver d'autres fbfs Les axiomes sont des fbfs choisies initialement
Tout système reposant sur des axiomes peuvent s'interpréter "Si ces expressions que j'appelle axiome sont correctes alors voici le système."
donc on obtient différentes théories en changeant les axiomes.

Définitions :

On appelle **déduction à partir de H1,H2...Hn,** toute suite finie de formules F1, F2,...Fp telles que pour tout i élément de {1,2 ..,p}
a) Fi est un axiome
ou bien
b) Fi est l'une des formules H1, H2, ..., Hn
ou bien
c) Fi est obtenue par application d'une règle rk élément de RS à partir des formules Fi0, Fi1, ..., Fil placées avant Fi (dans la démonstration)

S étant le système formel, on appelle **théorème**, toute formule t pour laquelle il existe une déduction à partir de l'ensemble vide.
Noté : $\vdash_S t$

Une déduction à partir de l'ensemble vide est appelée **déduction ou démonstration** ; il s'agit d'une suite de formules F1 ... Fp telles que pour tout i élément de {1,2,...p}

a) Fi est un axiome ou
b) Fi0, Fi1,...Fip $\vdash_{\text{modus ponens}}$ Fi
Cette formule se lit Fi se déduit à partir des fbfs Fi0, Fi1,...Fip grâce à la règle d'inférence du modus ponens

Démontrer un théorème consiste à utiliser une procédure de démonstration qui elle-même utilisedes règles d'inférences. C'est une activité syntaxique indépendante du sens des expressions.

2 - Sa sémantique

La sémantique attribue une signification aux expressions. elle est **compositionnelle** : la signification d'une formule est fonction de celle de ses constituants.

2.1 - Interprétation

Une **interprétation** du calcul propositionnel consiste à donner :

1. Domaine sémantique non vide D
2. Valuation des atomes dans D
3. Définition des connecteurs par des applications de D dans D pour $\neg$ et de D*D dans D pour $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$.

Interprétation classique de la logique des propositions pour lequel D = {V, F}
Tout atome est vrai ou faux mais pas les deux à la fois

Définition des connecteurs par des tables de vérité :

A	B	$\neg$A	A $\wedge$ B	A $\vee$ B	A $\rightarrow$ B	A $\leftrightarrow$ B

V	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V	F
F	F	V	F	F	V	V

Pour une fbf G composée de différents atomes : A1...An, une interprétation de G est une assignation des valeurs de vérité à A1...An.
G comporte n atomes ==> 2^n interprétations possibles

Exemple :

G = (A ∨ B) ∧ C
==> 8 interprétations possibles

A	B	C	G
V	V	V	V
V	V	F	F
V	F	V	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	V	F	F
F	F	V	F
F	F	F	F

Définition :

Une fbf G est vraie (respectivement fausse) dans une interprétation i si la valeur de G est vraie (respectivement fausse)
On écrit i[G] = V (respectivement i[G]= F)
Une interprétation qui rend vraie une formule est un **modèle** de cette formule.
On dit qu'une interprétation i est un modèle d'une formule F si la valeur de F selon l'interprétation i est vraie : i[F] = V dans ce cas on note i |= F.
On dit que i est un modèle d'un ensemble de formules E si i est modèle de tout élément de E

Exemple :

G : $(P \rightarrow (Q \vee (\neg R)))$
Notation i1([P] peut s'écrire i1[P] et se lit valeur de P selon l'interprétation i1
Soit i1 telle que: i1[P] = i1[R] = V
i1[Q] = F
G est fausse dans i1

Soit I2 telle que: i2[P] = i2[R] = F
i2[Q] = V
G est vraie dans i2

2.2 - Théorèmes d'équivalence

Définition :

Deux fbfs F et G sont **équivalentes** si et seulement si les valeurs de vérité de F et de G sont les mêmes dans toute interprétation.
si $F \models G$ et $G \models F$, on écrit alors $F \cong G$, le symbole "≅" se lit "est équivalent à".

Soient A, B et C des formules bien formées.

1. **Implication matérielle**
   $A \rightarrow B \cong \neg A \vee B$
2. **Equivalence matérielle**
   $A \leftrightarrow B \cong (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$
3. **Commutativité**
   a) $A \vee B \cong B \vee A$
   b) $A \wedge B \cong B \wedge A$
4. **Associativité**
   a) $(A \vee B) \vee C \cong A \vee (B \vee C)$
   b) $(A \wedge B) \wedge C \cong A \wedge (B \wedge C)$
5. **Distributivité**
   a) $A \vee (B \wedge C) \cong (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
   b) $A \wedge (B \vee C) \cong (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
6. a) $A \vee V \cong V$
   b) $A \wedge V \cong A$
7. a) $A \vee F \cong A$
   b) $A \wedge F \cong F$
8. **Complémentarité**

a) $A \vee \neg A \cong V$
b) $A \wedge \neg A \cong F$

9. **Involution**
   $(\neg(\neg A)) \cong A$
10. **Lois de de Morgan**
    a) $\neg(A \vee B) \cong (\neg A) \wedge (\neg B)$
    b) $\neg(A \wedge B) \cong (\neg A) \vee (\neg B)$
11. a) $A \vee ((\neg A) \wedge B) \cong A \vee B$
    b) $A \wedge ((\neg A) \vee B) \cong A \wedge B$
12. **Identité**
    a) $A \wedge A \cong A$
    b) $A \vee A \cong A$

On peut démontrer que ces formules sont équivalentes en montrant qu'elles ont les mêmes valeurs dans toutes les interprétations. Un moyen est donc de construire leur table de vérité.

On peut utiliser ces théorèmes d'équivalence pour transformer une formule bien formée en une autre formule bien formée qui lui est équivalente.
Cela va permettre de simplifier l'écriture de formules bien formées.

Exercice 2

Entrainez-vous à développer la négation en appliquant les lois de de Morgan

a) $(\neg(A \wedge (B \vee C)))$
b) $(\neg[(\neg(A \wedge B) \vee (\neg D)) \wedge E \vee F]$
c) $(\neg((\neg A) \wedge B \wedge ((\neg C) \vee D) \vee (\neg E) \wedge F \wedge (\neg G)))$
d) $(\neg(A \vee (\neg B) \vee C) \wedge ([\neg(\neg D)] \vee (\neg E)) \vee (\neg F) \wedge G)$

La correction est uniquement accessible sur Internet

3 - Quelques notions classiques: validité, insatisfiabilité, conséquence, complétude

3.1 - Validité

Une fbf A est une **tautologie** (valide) si et seulement si elle est vraie dans toute interprétation; on écrit alors : $\models A$
$\neg A \vee A$ est une formule valide

Une fbf est **invalide** si et seulement si elle n'est pas valide
$A \wedge B$ et $A \vee B$ sont deux formules invalides il suffit que A et B soient fausses

3.2 - Insatisfaisabilité

Une fbf est **inconsistante** ou insatisfiable si et seulement si elle est fausse dans toute interprétation
$\neg A \wedge A$ est une formule inconsistante

Une fbf A est **consistante** ou satisfiable

- si et seulement si elle n'est pas inconsistante
- si il existe une interprétation i telle que $i[A] = V$
- si elle admet un modèle

$A \wedge B$ et $A \vee B$ sont deux formules consistantes il suffit que A et B soient vraies

3.3 - Conséquence logique

A est une **conséquence logique** de E si et seulement si toutes les interprétations qui rendent vraies toutes les formules de E rendent vraie la formule A.
On écrit alors E |= A

On dit qu'une formule C est une conséquence logique de H1.. Hn

- si et seulement si tout modèle de H1..Hn est un modèle de C
- si et seulement si H1 $\wedge$ H2 $\wedge$ ... $\wedge$ Hn $\rightarrow$ C est valide

Dans ce contexte les formule H_i sont les hypothèses et C est la conclusion.

3.4 - Complétude

Théorème de complétude du calcul propsitionnel :

Pour toute formule A si $\models$ A alors $\vdash$ A
Autrement dit : toutes les tautologies sont des théorèmes.

4 - Représentation des connaissances

La représentation des connaissances en Intelligence Artificielle consiste à faire une correspondance entre le monde extérieur et un système symbolique manipulable par un ordinateur.La représentation des connaissances comporte un aspect passif : il faut mémoriser.Par exemple, un livre ne connaît pas l'information qu'il contient. Mais aussi un côté actif : il faut inférer, manipuler ces connaissances, effectuer un raisonnement.

CONNAITRE = MEMORISER + INFERER
REPRESENTER = FORMALISER + RAISONNER

Le sens des connecteurs ne veulent pasdire exactement la même chose que ceux du langage naturel. La capacité d'expression dans la représentation de la connaissance en logique des propositions est beaucoup moins riche qu'en langage naturel. Mais toutefois les connecteurs logique ont des correspondances ou "équivalents" dans la langue naturelle.

4.1 - La conjonction

P $\wedge$ Q peut se traduire :

- P et Q
- Q et P
- à la fois P et Q
- P, Q
- P bien que Q
- P quoique Q
- P mais Q (sous-entendu mais aussi)
- Non seulement P mais Q
- P et pourtant Q
- P tandis que Q

4.2 - La disjonction

P $\vee$ Q peut se traduire :

- P ou Q
- ou P ou Q
- ou bien P ou bien Q
- soit P soit Q
- P à moins que Q
- P sauf si Q
- P ou Q ou les deux (OU inclusif)

4.3 - Le conditionnel

P $\rightarrow$ Q peut traduire :

- si P alors Q
- P condition suffisante de Q
- Q condition nécessaire de P
- P alors Q
- Q si P
- Q lorsque P
- P seulement si Q
- Q pourvu que P
- ...

4.4 - L'équivalence

P $\leftrightarrow$ Q peut se traduire :

- P si et seulement si Q
- P si Q et Q si P
- P condition nécessaire et suffisante de Q
- ...

4.5 - Conclusion

Les ressemblances entre les connceteurs logiques et ceux de la langue naturelle sont limitées.
Il mange ou il dort et il dort ou il mange semblent synonymes
Par contre, il a faim et il mange n'est pas semblable à il mange et il a faim car le "et" a une connotation de causalité et de temps.
La porte est ouverte ou la porte est fermée. Le "ou" du français est parfois exclusif
La traduction est en général liée au contexte. Il peut aussi exister plusieurs traductions possibles.

Par exemple soit à traduire le groupes de phrases suivantes :

Jean et Pierre prirent le café et Gustave fit de même.
Jean prit le café, et Pierre ou Gustave aussi
Jean et Pierre ont dîné tous les deux, ou bien Jean et Gustave prirent le café
Jean a dîné, ainsi que Gustave ou Pierre
Pierre étudie bien à moins qu'il ne soit fatigué, auquel cas non

D'abord je vais constituer l'univers du discours c'est-à-dire je vais d'abord rechercher dans le texte toutes les propositions dont j'ai besoin. Ce qui donne pour l'exemple l'univers du discours suivant :

J : Jean prend le café
P : Pierre prend le café
G : Gustave prend le café
D : Jean a dîné
E : Gustave a dîné
F : Pierre a dîné
ETUDIE : Pierre étudie bien
FATIGUE : Pierre est fatigué

Ensuite, pour chacune des phrases je vais écrire une formule bien formée à l'aide des propositions définies ci-dessus, des connecteurs et des parenthèses.

Jean et Pierre prirent le café et Gustave fit de même
$J \wedge P \wedge G$
Jean prit le café, et Pierre ou Gustave aussi
$J \wedge (P \vee G)$
Jean et Pierre ont dîné tous les deux, ou bien Jean et Gustave prirent le café
$(D \wedge F) \vee (J \wedge G)$
Jean a dîné, ainsi que Gustave ou Pierre
$D \wedge (E \vee F)$
Pierre étudie bien à moins qu'il ne soit fatigué, auquel cas non
$\neg ETUDIE \leftrightarrow FATIGUE$

Exercice 3

Voici des paquets de groupe de phrases à vous de vous exercer puis vérifier vos traductions en cliquant sur "TraductionN"

1°)

Je vous paierai votre installation de T.V. seulement si elle marche,
Or votre installation ne marche pas.
Donc je ne vous paierai pas.

La correction est uniquement accessible sur Internet

2°)

S'il ne lui a pas dit, elle ne trouvera jamais.
Si elle ne lui a pas posé la question, il ne le lui dira pas.
Or elle a trouvé.
Donc elle lui a posé la question.

La correction est uniquement accessible sur Internet

3°)

1. Réginald ne réussira pas le cours
2. Chantal n'échouera pas au cours
3. Chantal et Paul réussiront le cours
4. Paul réussira le cours seulement s'il n'est pas fatigué
5. Paul réussira le cours à moins qu'il ne soit fatigué
6. Paul ne réussira pas le cours ou bien Chantal le réussira
7. Paul ne réussira pas le cours mais Chantal le réussira
8. Ni Paul, ni Chantal ne réussiront le cours
9. Paul et Chantal ne réussiront pas tous les deux le cours
10. Ou Paul et Chantal réussiront tous les deux le cours ou c'est Réginald
11. Paul réussira le cours, ainsi que Chantal ou Réginald
12. Si Paul réussit le cours alors Chantal aussi, et Paul le réussira
13. Si Paul réussit le cours, alors Chantal et Paul le réussiront tous les deux
14. Paul réussira le cours si Chantal le réussit; autrement ni l'un ni l'autre ne le réussiront
15. Ou Chantal réussira le cours si et seulement si Réginald l'échoue, ou Paul le réussira s'il étudie avec méthode et n'est pas fatigué

La correction est uniquement accessible sur Internet