Méthode de Herbrand

La méthode de Herbrand qui permet de ramener la satisfaisabilité d'une formule à la satisfaisabilité d'un ensemble infini de formules propositionnelles. L'un des résultat de Herbrand peut s'énoncer ainsi : étant donné une formule quelconque F de la théorie de la quantification, il est possible d'engendrer de manière mécanique une suite de formules sans quantificateurs F0, F1...Fn telle que F est démontrable en théorie de la quantification si et seulement si il existe un nombre k tel que Fk est démontrable en logique propositionnelle.
On peut dire qu'il a ramené le calcul des prédicats au calcul propositionnel.

1 - Univers ou domaine de Herbrand

Définition : L'univers de Herbrand est stratifié en niveaux.
Au niveau 0, il comprend H0 constitué par

1. l'ensemble des constantes apparaissant dans l'ensemble de clauses S . Si aucune constante n'apparaît H0 = {a} où a est une constante choisie arbitrairement.
2. tous les symboles de fonctions figurant dans les clauses de S. On leur donne comme argument les constantes mentionnées en 1.

On obtient Hi+1à partir de Hi en formant l'union de Hi et de l'ensemble de tous les termes de la forme fn(t1 t2,..., tn) où les ti prennent leurs valeurs dans Hi
Hi est appelé l'ensemble des constantes de niveau i
H∞ est appelé univers de Herbrand ou domaine de Herbrand

Exemple 1 :

$S = \{P(a), \neg P(X) \vee P(f(X))\}$
$H0 = \{ a, f(a) \}$
$H1 = \{ a, f(a), f(f(a)) \}$
$H\infty = \{ a, f(a), f(f(a)), f(f(f(a))), \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \}$

Exemple 2 :

$S = \{P(X), R(X) \vee Q(Y, X), \neg Q(Y, Y)\}$
Pas de constante on en choisit une arbitrairement : a
$H0 = \{ a \}$
$H1 = \{ a \}$ car il n'y a pas de fonction
$H\infty = \{ a \}$

Exemple 3 :

$S = \{P(f(X)) \vee Q(a), Q(g(b)) \vee \neg P(Y) \}$
$H0 = \{ a, b, f(a), f(b), g(a), g(b) \}$
$H1 = \{ a, b, f(a), f(b), g(a), g(b)\ f(f(a)), f(f(b)), f(g(a)), f(g(b)), g(f(a)), g(f(b)), g(g(a)), g(g(b)) \}$
$H\infty$ = H1 È $\{f(f(f(a))), \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$

Exercez-vous en donnant les univers de Herbrand pour les ensembles S de clauses suivants :
$S1 = \{\neg P(X, Y) \vee Q(X, Y), \neg Q(Z, W), P(Z, T) \}$
$S2 = \{\neg P(X, g(X)) \vee Q(X, Y), Q(X, Y), P(a,X)\}$
$S3 = \{\neg P(X, g(X)) \vee Q(X, Y), Q(X, f(X)), P(a,X)\}$ Vérifions !

Définition : on dit qu'une expression est de base si aucune variable n'apparaît
Une expression est un atome ou un terme ou une conjonction d'atomes ou un ensemble de clauses...
Toutes les variables ont pris leur valeur dans l'univers de Herbrand

Exemple :

$P(X, f(X))$ $H\infty = \{ a, f(a) \ldots. \}$ n'est pas une expression de base
$P(f(a), f(f(a)))$ est une expression de base

2 - Base de Herbrand

Définition : Soit S un ensemble de clauses, l'ensemble des atomes de base de la forme Pn(t1 t2,..., tn) pour tout prédicat d'arité n apparaissant dans S où t1 t2,..., tn sont des éléments de l'univers de Herbrand est appelé la base de Herbrand.

<u>Exemple :</u>

A1 = {P(a), P(f(a)), P(f(f(a)))...} est la base de Herbrand de l'exemple 1
A2 = {P(a), R(a), Q(a,a)} est la base de Herbrand de l'exemple 2
A3 = {P(a), Q(a), P(b), Q(b), P(f(a)), Q(f(a)), ...} est la base de Herbrand de l'exemple 3

Définition : Une instance de base d'une clause C (appelée aussi clause fondamentale) d'un ensemble S est une clause obtenue en remplaçant les variables libres de C par des éléments de l'univers de Herbrand H∞.

<u>Exemple :</u>

C = R(X) ∨ Q(Y,X)
C1 = R(a) ∨ Q(a,a)

C = P(f(X)) ∨ Q(a)
C1 = P(f(g(b))) ∨ Q(a)

S = { P(X) ∨ Q(a), R(f(Y)) }
H∞ = { a, f(a), f((f(a)).... }
On va définir une interprétation I de S dans H∞

I[a] = f(f(a))

Définition de f
I[f(a)] = f(a)
I[f(f(a))] = a
I[f(f(f(a)))] = a
I[f(f(f(f(a))))] = f(a)

Définition de P
I[P(a)] = V
I[P(f(a))] = V
I [P(f(f(a))) = F

Définition de Q
I[Q(a)] = V
I[Q(f(a))] = F

Définition de R
I[P(a)] = V
I[P(f(a))] = V

3 - Interprétation de Herbrand

Définition : Soit S un ensemble de clauses, soit H l'univers de Herbrand, I une interprétation dans H est dite H-interprétation ou interprétation de Herbrand si elle satisfait aux conditions suivantes :

1. Elle applique toutes les constantes individuelles sur elle-même
2. Elle applique chaque symbole de fonction f d'arité n une fonction h qui fait correspondre à n termes h1 h2,...hn, éléments de l'univers de Herbrand H, le terme f(h1, h2,...,hn)

Remarque : Les H interprétations ne diffèrent que par l'affectation des symboles de prédicats.

Exemple 1 :
A = {P(a), Q(a), R(a), P(f(a)), Q(f(a)), R(f(a))....}
Une H interprétation I1 est
I1 = {V, V, V, F, F, F.....}
Ou I1 = {P(a), Q(a), R(a), ¬P(f(a)), ¬Q(f(a)), ¬R(f(a))....}

Exemple 2 :
S ={P(X) ∨ ¬Q(f(X))}
H∞ = { a, f(a), f((f(a)).... }
A = { P(a), Q(a), P(f(a)), Q(f(a)), ...}
I1 = { ¬P(a), ¬Q(a), P(f(a)), ¬Q(f(a)), P(f(f(a)).... }
I2 = { P(a), ¬Q(a), ¬P(f(a)), Q(f(a)), }

Exemple 3 :

S = { P(a) ∨ ¬Q(f(X), R(X, Y)}
D = {1, 2}

a	f(1)	f(2)	P(1)	P(2)	Q(1)	Q(2)	R(1,1)	R(1,2)	R(2,1)	R(2,2)
2	2	2	V	F	V	V	F	V	F	F

Une H interprétation correspond à I avec H = {a, f(a), f(f(a))....}
A = { P(a), Q(a), R(a, a), P(f(a)), Q(f(a)), R(f(a), a), R(a, f(a)) ....}
I[P(a)] = P(2) = F
I[Q(a)] = Q(2) = V
I[R(a, a)] = R(2, 2) = F
I[P(f(a))] = P(f(2)) = P(2) = F
IH = { ¬P(a), Q(a), ¬R(a, a), ¬P(f(a)), ...}

Définition : Etant donné une interprétation I sur un domaine D, une H interprétation I* correspondant à I est une H interprétation qui satisfait les conditions suivantes :

1. Soient h1, h2, ..., hn des éléments de H à chaque hi on affecte un di ∈ D,
2. Si P(d1, d2,...dn) est vrai (respectivement faux) dans I alors P(h1, h2,..., hn) est vrai (respectivement faux) dans I*.

Théorème : Si une interprétation I sur un domaine D satisfait un ensemble S de clauses alors n'importe quelle interprétation de Herbrand I* correspondant à I satisfait aussi S.

Théorème : Un ensemble de clauses S est insatisfiable si et seulement s'il est faux sous toutes les H interprétations

4 - Théorème de Herbrand

Définition : Un ensemble de clauses est sémantiquement inconsistant si et seulement si la conjonction de ces clauses est fausse dans tous les modèles c'est-à-dire pour toute interprétation et tout domaine. On peut se limiter à l'examen du modèle de Herbrand composé de l'univers de Herbarnd et de la H interprétation.
Ou dit autrement : Un ensemble de clauses est sémantiquement inconsistant si et seulement si la conjonction de ces clauses est fausse dans toutes les interprétations I* des S.

Propriétés :

1. Une clause C est satisfaite par une H interprétation si et seulement si toute instance de base est satisfaite par I
2. Une clause C est falsifiée pour une H interprétation I si et seulement si il y a au moins une instance de base qui soit fausse dans cette interprétation
3. Un ensemble de clauses est insatisfiable si et seulement si pour toute H interprétation il y a au moins une instance de base ou une clause qui soit fausse

Théorème d'Herbrand première formulation : Un ensemble S de clauses fondamentales est insatisfiable (sémantiquement inconsistant) si et seulement si il existe un ensemble fini S' d'instances de base de clauses de S sémantiquement inconsistant.

Les clause fondamentales (ou instances de base) sont des expressions du calcul des propositions. Comme le calcul des propositions est complet, tout ensemble fini de formules du calcul des propositions qui est sémantiquement inconsistant est syntaxiquement inconsistant.

Théorème d'Herbrand deuxième formulation : Un ensemble S de clauses fondamentales est insatisfiable (syntaxiquement inconsistant) si et seulement si il existe un ensemble fini S' d'instances de base de clauses de S syntaxiquement inconsistant.

Herbrand a aussi montré qu'il est possible de générer de manière automatique cet ensemble fini. Son théorème a donc un caractère constructif. Pour cela, il est nécessaire d'utiliser les arbres sémantiques.

5 - Les arbres sémantiques

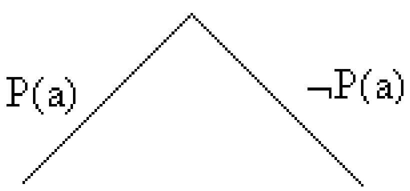
Les arbres sémantiques permettent l'examen de toutes les H interprétations
Définition : Si A est un atome les deux littéraux A et ¬A sont dits complémentaires et le couple (A, ¬A) est dit paire complémentaire

Définition : Un arc est un chemin entre deux nœuds entre lesquels il n'y a pas de neouds. Les arcs correspondent à des symboles de conjonctions.
On voit donc qu'une suite de branche de l'arbre falsifie une clause si la conjonction de littéraux qui correspond à une segment de la branche est la négation de la clause.

Définition : Soit S un ensemble de clauses, soit A la base de Herbrand de S, un arbre sémantique pour S est un arbre où chaque arc est lié à un ensemble fini d'atomes ou de négation d'atomes de la façon suivante :

1. Pour chaque nœud N il part un nombre fini d'arcs notés L1, L2,...Ln, soit Qi la conjonction de tous les littéraux attachés à Li alors Q1 ∨ Q2 ∨ Q3 ∨ ∨ Qn est valide.
2. Pour chaque nœud N soit I(N) l'union de tous les ensembles liés aux arcs du chemin T qui va de la racine à N. I(N) ne contient aucune paire complémentaire.

<u>Exemple :</u>
S ={ P(X), ¬P(a)}
H∞ = { a }
A = { P(a)}



5.1 - Propriétés des arbres sémantiques

Définition : Soit A ={A1, A2, ...} la base de Herbrand de S. Un arbre sémantique pour S est dit complet si et seulement si en plus des conditions exigées de l'arbre sémantique la condition :
Chaque branche de l'arbre sémantique contient pour tout atome de la base de Herbrand soit Ai soit ¬Ai

Remarque : I(N) correspond à la définition d'une H interprétation, un arbre sémantique complet correspond à l'examen de toutes les H interprétations

Définition : Un nœud N est dit nœud d'échec si I(N) falsifie une instance de base d'une clause de S et I(N') pour tout N' ancêtre de N ne falsifie aucune instance de base d'une clause de S
Un nœud N est appelé nœud d'échec si la portion de la branche depuis la racine jusqu'à ce nœud falsifie une clause fondamentale instanciée et si aucun segment plus court ne le faisait

Définition : Un arbre sémantique est clos ou fermé si et seulement si chacune de ses branches se termine par un nœud d'échec

Définition : Un nœud d'un arbre sémantique clos est dit nœud d'inférence si et seulement si tous les nœuds descendants immédiats de N sont des nœuds d'échec .

Théorème de Herbrand : Un ensemble S de clauses fondamentales est insatisfiable (sémantiquement inconsistant) si et seulement si à un arbre sémantique complet quelconque correspond un arbre sémantique clos

5.2 - Construction de l'arbre sémantique complet

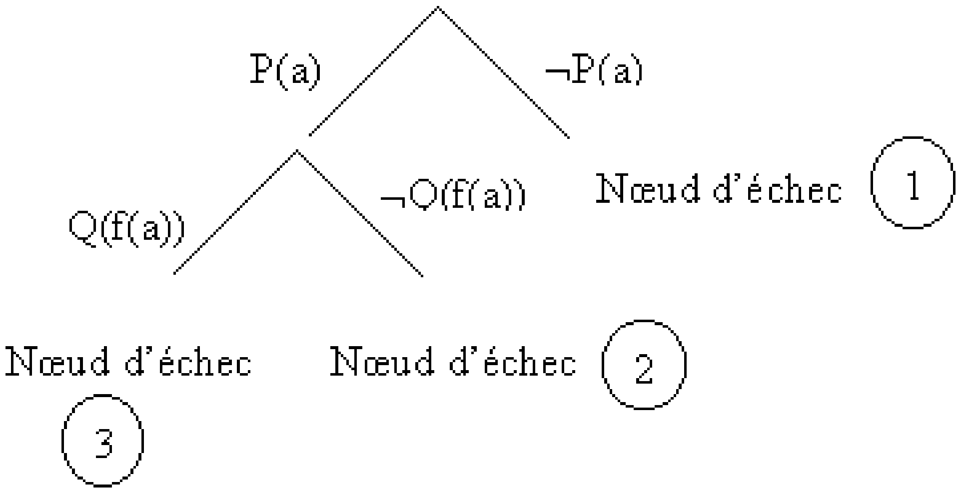
Pour construire l'arbre sémantique on étiquette les nœuds de l'arbre avec les atomes de la base de Herbrand. On élague l'arbre chaque fois qu'une branche falsifie une clause de S.

Exemple :

S= {P(X), ¬P(X) ∨ Q(f(X)), ¬Q(f(X))}

H∞ = { a, f(a), f((f(a)).... }

A = { P(a), Q(a), P(f(a)), Q(f(a)), ...}



Partie exercices

Exercer vous et démontrez en utilisant que les fbf suivantes sont valides en utilisant le théorème de Herbrand (arbre clos fini) !:

a) $\exists X \, \forall Y \, P(X, Y) \rightarrow \forall Y \, \exists X \, P(X, Y)$

b) $\forall X \, (P(X) \rightarrow Q(X)) \rightarrow (\exists X \, P(X) \rightarrow \exists X \, Q(X))$

c) $\exists X \, (\exists Y \, \forall Z \, P(X, Y, Z) \rightarrow \forall Z \, \exists Y \, P(X, Y, Z))$

d) $(\forall X \, \exists Y \, P(X, Y) \wedge \forall X \, \exists Y \, Q(X, Y)) \rightarrow \forall X \, \exists Y \, \exists Z \, (P(X, Y) \wedge Q(Y, Z))$

Les corrections sont uniquement accessibles sur Internet
