Introduction, premiers exemples et syntaxe

Objectif : Transformer une fbf sous la forme "ensemble de clauses" pour appliquer le principe de résolution.

1 - Forme normale prénexe

Mise sous forme Prénexe

une fbf en logique des prédicats est dite **en forme prénexe** (fnp) ssi elle est de la forme :
(Q1 X1) (Q2 X2) ... (Qn Xn) M(X1,X2,...,Xn)
Préfixe **Matrice**
où chaque (Qi Xi) est soit ∀Xi soit ∃Xi et où M est une fbf ne contenant aucun quantificateur.
∀X ∃Y (P(X,Y) → P(Y,X))
∀X ∃Y ∀ Z (P(X) ∧ ¬Q(Y,Z) ∧ P(f(Y))) sont en fnp
∀X P(X) ∧ ∃Y Q(Y,X)) n'est pas en fnp

Par application successives des théorèmes sur les paires (fbfs) équivalentes (lois d'équivalence) on peut trouver une fbf G' en fnp équivalente à une fbf G donnée.

Méthode de transformation d'une fbf en fnp

1. **Eliminer les connecteurs → et <->**
   (G <-> F) ≅ (G → F) ∧ (F → G)
   (G → F) ≅ (¬G ∨ F)
2. **Accoler les connecteurs ¬ aux atomes concernés**
   ¬(¬G) ≅ G
   ¬(F∨ G) ≅ ¬F ∧ ¬G
   ¬(F∧ G) ≅ ¬F ∨ ¬G
   ¬((∀X) P(X)) ≅ (∃X) ¬P(X)
   ¬((∃X) P(X)) ≅ (∀X) ¬P(X)

3. **Rebaptiser les variables liées si nécessaire** de sorte que chaque quantificateur gouverne une variable originale
   $(\forall X)\ P(X) \cong (\forall Y)\ P(Y)$
   $(\exists X)\ P(X) \cong (\exists Y)\ P(Y)$
4. **Déplacer tous les quantificateurs à gauche de la formule** (sans changer l'ordre relatif)
   $((Q1\ X)\ F(X)) \vee ((Q2\ Y)\ H(Y)) \cong (Q1\ X)\ (Q2\ Y)\ (F(X) \vee (H(Y))$
   $((Q1\ X)\ F(X)) \wedge ((Q2\ Y)\ H(Y)) \cong (Q1\ X)\ (Q2\ Y)\ (F(X) \wedge (H(Y))$

Au terme de ces 4 étapes on obtient une fnp de la fbf initiale qui lui est équivalente. On peut avoir diverses fnp pour une même fbf

Exemples

$(\forall X)\ P(X) \rightarrow (\exists X)\ Q(X)$
$\cong (\neg((\forall X)\ P(X))) \vee (\exists X)\ Q(X)$
$\cong (\exists X)\ \neg P(X)) \vee (\exists X)\ Q(X)$
$\cong (\exists X)\ (\neg P(X) \vee Q(X))$

$(\exists X\ (P(X) \rightarrow Q(X))) \rightarrow (\forall X\ P(X) \rightarrow \exists X\ Q(X))$
$\cong (\neg(\exists X\ (P(X) \rightarrow Q(X))) \vee ((\forall X)\ P(X) \rightarrow \exists X\ Q(X))$
$\cong (\neg(\exists X\ (\neg P(X) \vee Q(X))) \vee ((\neg(\forall X\ P(X)) \vee \exists X\ Q(X))$
$\cong (\forall X\ (P(X) \wedge \neg Q(X))) \vee (\exists X\ (\neg P(X)) \vee \exists X\ Q(X))$
$\cong (\forall X\ (P(X) \wedge \neg Q(X))) \vee (\exists X\ (\neg P(X) \vee Q(X)))$
$\cong (\forall X\ (P(X) \wedge \neg Q(X))) \vee (\exists Y\ (\neg P(Y) \vee Q(Y)))$
$\cong \forall X\ \exists Y\ ((P(X) \wedge \neg Q(X)) \vee (\neg P(Y) \vee Q(Y)))$

Exercice 1

Mettre sous forme normale prénexe les fbf suivantes :

a) $\forall X\ P(X) \rightarrow (\exists T\ Q(T) \vee \exists T\ C(T))$
b) $\forall X\ (\forall Y\ P(X,Y) \rightarrow \exists Z\ R(X,Z))$
c) $\forall X\ \forall Y\ \exists Z\ (P(X,Y,Z) \wedge (\exists U\ Q(X,U) \rightarrow \exists V\ Q(Y,V)))$
d) $((\exists X\ P(X) \rightarrow \exists X\ R(X) \vee \forall Y\ P(Y)) \wedge \forall X\ \exists Y\ (R(Y) \rightarrow P(X)))$

Les corrections sont uniquement accessibles sur Internet

2 - Méthode de Skolémisation

A partir d'une fnp G' d'une fbf G on peut produire une forme standard de Skolem par les transformations ci-après soit :
G' = (Q1 X1) (Q2 X2)... (Qn Xn) M(X1, X2,... Xn) fnp de G

1. **Eliminer les quantificateurs existentiels**
   Soit Qr un existentiel dans le préfixe de G'
   (On opère habituellement de la gauche vers la droite mais l'ordre importe peu)

   a) Si aucun quantificateur universel n'apparaît avant Qr c'est-à-dire dans (Q1 X1) ... (Qr-1 Xr-1)
   on choisit un symbole de constante c différent de toute constante apparaîssant dans la matrice M
   on supprime Qr Xr du préfixe
   on remplace Xr par c dans la matrice M
   $(\exists X)\ (\forall Y)\ (P(X) \vee Q(Y))$
   Choix de la constante a/X ce qui donne
   $(\forall Y)\ (P(a) \vee Q(Y))$ fss

   b) Si Qs1 Qs2... Qsm sont m quantificateurs universels apparaîssant avant Qr dans le préfixe
   on choisit un symbole de fonction f d'arité m différent de toute fonction apparaîssant dans la matrice M
   on supprime QrXr du préfixe
   on remplace tout Xr dans M par f(Xs1, Xs2,... Xsm)
2. **On itère le processus jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de quantificateur existentiel dans le préfixe**

Fonctions et constantes introduites sont appelées : **constantes et fonctions de Skolem.**

Nous obtenons une fbf dite : forme standard de Skolem

Exemple

$\exists X\ \exists Y\ \forall Z\ \forall T\ \exists V\ P(X,Y,Z,T,V)$

1. étape a/X

$\exists Y\ \forall Z\ \forall T\ \exists V\ P(a,Y,Z,T,V)$

2. étape b/Y
   $\forall Z\ \forall T\ \exists V\ P(a,b,Z,T,V)$
3. étape f(Z,T)/V
   $\forall Z\ \forall T\ P(a,b,Z,T,f(Z,T))$

Théorème

Soit Gs la forme standard de Skolem d'une fbf G
G inconsistant ssi Gs inconsistant

Exercice 2

Mettre sous forme standard de Skolem les fbf du I)

Les corrections sont uniquement accessibles sur Internet

3 - Passage sous forme de clause

Obtention d'un ensmble de clause

Soit Gs une forme standard de Skolem d'une fbf G

1. **Eliminer tous les quantificateurs**
   Il ne reste que des quantificateurs universels. On allège la notation en les supprimant.
   On suppose donc désormais que toutes les variables sont quantifiées universellement.
2. **Passer sous forme normale conjonctive**
3. **Eliminer les connecteurs** $\wedge$
   La conjonction de clauses obtenues au 2. est considérée comme un ensemble de clauses S
   S est dite insatisfiable ou insatisfaisable pour dire S inconsistante
4. **Distinguer les variables des clauses distinctes si c'est nécessaire**

Exemple

$(\forall X\ (P(X) \vee Q(X) \rightarrow H(X)))$
$\forall X\ P(X) \wedge \forall Y\ (Q(Y) \wedge \exists Z\ R(Y,Z))$

Exercice 3

Donner l'ensemble des clauses des fbf du I)

Les corrections sont uniquement accessibles sur Internet

4 - Conclusion

1. Il existe en général, plusieurs formes standards d'une même formule. On a intérêt à introduire des fonctions de Skolem aussi simples que possible
   ==> essayer de repousser le plus à gauche le quantificateur existentiel.
2. Si F peut s'écrire $F1 \wedge F2 \wedge \ldots \wedge Fn$ un ensemble de clauses pour F peut être obtenu comme union des ensembles de clauses Si de chaque Fi
   $F = F1 \wedge F2 \wedge \ldots \wedge Fn$
   $Fs = fs1 \wedge \ldots \wedge fsn$ SKOLEM
   $S = S1 \wedge \ldots \wedge Sn$ CLAUSES
   C'est-à-dire on fait clauses puis Skolem

Exemple

$\forall X\ P(X) \wedge \exists Y\ Q(Y)$

Skolem	$\rightarrow$	$\forall X\ (P(X) \wedge Q(f(X)))$
Clauses	$\rightarrow$	$\forall X\ (P(X) \wedge Q(f(X)))$
Ens. Clauses	$\rightarrow$	$S = \{P(X), Q(f(X))\}$
Clauses	$\rightarrow$	$\forall X\ P(X)\ \exists Y\ Q(Y)$
Skolem	$\rightarrow$	$\forall X\ P(X)\ Q(a)$
Ens. Clauses	$\rightarrow$	$S = \{P(X), Q(a)\}$

$(\neg[\forall X\ (R(X) \rightarrow M(X) \wedge \forall X\ (R(X) \rightarrow M(X)) \rightarrow \forall X\ \neg R(X)])$

Fbf G équivalente à G' fnp de G
Fbf G non équivalente (si G est consistante) à G'' (fss) ou forme clausale

On a uniquement si G est inconsistante alors G'' est forme clausale inconsistante.
Donc pour étudier la validité d'une fbf G on étudie l'inconsistance de ¬G et donc de la fss de ¬G.
On dit que l'on procède par **réfutation**

G valide	⇔	¬G inconsistant
	⇔	fnp (¬G) inconsistante
	⇔	fss (¬G) inconsistante
	⇔	S de (¬G) insatisfiable

Dans les applications de la logique des prédicats, en général on veut montrer qu'une fbf H est conséquence logique de fbf G1 ... Gn c'est-à-dire :

	$G1 \wedge \ldots \wedge Gn \rightarrow H$ valide
⇔	$\neg(G1 \wedge \ldots \wedge Gn \rightarrow H)$ inconsistant
⇔	$G1 \wedge \ldots \wedge Gn \rightarrow \neg H$ inconsistant
⇔	G1 ... Gn ¬H inconsistant