La logique des prédicats

1 - Sa syntaxe

Pour étudier la syntaxe d'un langage il faut donner un alphabet (un ensemble de symboles) et des règles de constructions syntaxiques d'expressions à partir de ces symboles.

1.1 - L'alphabet

L'alphabet est constitué :

- de **connecteurs** : $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ qui se lisent respectivement non, et, ou, implique et équivalent. (NB: on retrouve les opérateurs de l'algébre de Boole non . (et), +(ou))
- de **délimiteurs** : les parenthèses ( )
- des deux constantes propositionelles **V** (vrai) et **F** (faux)
- de **constantes** (minuscules de l'alphabet latin et les concaténations de telles lettres) C = {a, b, c,...z, aa,...}
- de **variables** (majuscules de l'alphabet latin, et les concaténations de telles lettres) V = {A, B, Z, AA..}
- de **prédicats** (majuscules P)

  L'**arité** d'un prédicat est le nombre d'argument du prédicat. C'est un nombre positif
  Si le **prédicat** est d'arité 0il correspond à la notion de **proposition** de la logique des propositions
- de **fonctions** (en minuscules: f, g sucesseur). Chaque symbole de fonction a une arité fixée.

  L'**arité** d'une fonction est le nombre d'argument de la fonction. C'est un nombre positif. Si la fonction est d'arité 0, elle correspond à la notion de constante .

- de **quantificateurs**

  ∃ prononcé "il existe" est le quantificateur existentiel
  ∀ prononcé "quel que soit" est le quantificateur universel

1.2 - Les termes

Par définition, tout terme est engendré par application des deux lois suivantes

- constantes et variables sont des termes
- si f est un symbole de fonction d'arité n (n>=1) et si t1..tn sont des termes alors f(t1..tn) est un terme

Exemple :

successeur(X) est un terme
poids(b) est un terme
successeur(poids(b)) est un terme
P(X, bleu) n'est pas un terme
poids(P(X)) n'est pas un terme

1.3 - Les atomes

Par définition, tout atome est engendré par application des deux lois suivantes

- propositions sont des atomes
- si P est un prédicat d'arité n (n >=1) et si t1..tn sont des termes alors P(t1..tn) est un atome

Exemple :

P(X, bleu) est un atome
VIDE est un atome
ENTRE(table,X, appui(fenetre)) est un atome
successeur(X) n'est pas un atome
appui(fenetre) n'est pas un atome

1.4 - Les formules bien formées

Le **langage** est constitué de l'ensemble des **Formules Bien Formées** (appelées aussi : FBFs ou Well Formed-Formula WFF) ou expressions bien formées défini comme suit :

- atomes sont des fbfs
- si F et G sont des fbfs alors $(\neg G)$, $(F \wedge G)$, $(F \vee G)$, $(F \rightarrow G)$ et $(F \leftrightarrow G)$ sont des fbfs
- si G est une fbf et X une variable alors $(\exists X)G$ et $(\forall X)G$ sont des fbfs.
- toutes les fbfs sont obtenues par application des 3 règles ci-dessus.

Exemples :

- $(\exists X)\ (\forall Y)\ (P(X, Y) \vee Q(X, Y) \rightarrow R(X))$
  et ((Ø,(P(a) → P(b))) → Ø,P(b)) **sont des fbfs**
- (Ø,(f(a)))
  et f(P(a)) **ne sont pas des fbfs**

Ordre de priorité des connecteurs

(Le plus prioritaire) $\neg, \exists, \forall, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$

Exercice 1

Soient A(X,Y), B(X), C(X,Y), D(X) des fbfs.
Essayez de déterminer si les formules suivantes appartiennent à la logique des prédicats :

a) $(\exists X\ \forall Y\ A(X, Y) \rightarrow \forall X\ \neg D(X))$
b) $(\forall X\ \exists Y\ (A(X,Y) \wedge D(B(X)))$

Les corrections sont uniquement accessibles sur Internet

1.5 - Variable libre et liée

Champ ou portée d'un quantificateur = la fbf sur laquelle il s'applique
$\forall X\ \exists Y\ (P(X, Y) \wedge \exists Z\ Q(X , Z))$
le champ de $\forall X$ est $\exists Y\ (P(X, Y) \wedge \exists Z\ Q(X, Z))$
le champ de $\exists Y$ est $(P(X, Y) \wedge \exists Z\ Q(X, Z))$
le champ de $\exists Z$ est $Q(X, Z)$

une occurrence de X est liée dans une fbf si elle est dans le champ d'un quantificateur ∀ ou ∃ qui l'utilise ou si elle le suit.
S sinon cette occurence est dite libre

Exemples :

A = ∀X (∃Y P(X, Y) ∧ Q(X, Z)) ∧ R(X)
liée liée liée liée liée libre libre
B = ∀X ((∃Y Q(X, Y)) ∧ P(X, Y, Z))
liée liée liée liée liée libre libre

Une variable est libre (resp. liée) si au moins une de ses occurences est libre (resp. liée)

Exemples :

Variables libres de A = {Z, X}
Variables liées de A = {X, Y}
Variables libres de B = {Z, Y}
Variables liées de B = {X, Y}

Unr fbf sans variable libre est dite close ou fermée

Exemple :

∀X ∃Y (P(X, Y) ∧ ∀Z R(X, Y, Z))
liée liée liée liée liée

Exercice 2

Donner les variables libres et liées des formules suivantes:

a) $(P(f(X, Y)) \vee \forall Z\ R(a, Z))$
b) $(\forall X\ P(X, Y, Z) \vee \forall Z\ (P(Z) \rightarrow R(Z)))$
c) $(\forall X\ A(X) \vee \exists X\ (B(X) \rightarrow \neg\exists T\ C(X, T)))$

Les corrections sont uniquement accessibles sur Internet

2 - Sa sémantique

La sémantique attribue une signification aux expressions. elle est **compositionnelle** : la signification d'une formule est fonction de celle de ses constituants.

2.1 - Interprétation

Une **interprétation** d'une fbf G est définie par les cinq étapes suivantes :

1. Choix d'un domaine d'interprétation non vide D
2. Assignation à chaque constante de G d'un élément de D
3. Assignation à chaque proposition de G d'un élément de {V, F}
4. Assignation à chaque prédicat d'arité n (n>=1) d'une application de Dn dans {V, F}
5. Assignation à chaque fonction d'arité (n>=1) d'une application de Dn dans D.

on dit alors qu'on a une interprétation de G sur D

Exemples :

Soient les fbfs :

- G1 : $(\forall X)\ P(X)$
- G2 : $(\forall X)\ (\exists Y)\ Q(X, Y)$
- G3 : $(\forall X)\ (R(X) \wedge T(f(X), a))$

Soit une interprétation i1 de G1
i1 : D1 = {1, 2} où

- i1[P(1)] = F
- i1[P(2)] = V

Soit une interprétation I2 de G2
i2 : D2 = {1, 3} où

- i2[Q(1, 1)] = F
- i2[Q(1, 3)] = V
- i2[Q(3, 1)] = F
- i2[Q(3, 3)] = F

Soit une interprétation i3 de G3
i3 : D1 = {4, 5} a = 4 f(4) = 5 f(5) = 4

- i3[R(4)] = V
- i3[R(5)] = F
- i3[T(4, 4)] = V
- i3[T(5, 4)] = V

2.2 - Valeur selon une interprétation

Soit une interprétation i de domaine D d'une fbf G :

1. **Si G est une proposition** alors la valeur qui lui est assignée par définition de i est appelée **valeur de G selon i** (ou dans i)
2. **Si G est un littéral non propositionnel** alors pour chaque choix de valeurs dans D pour les variables de G (s'il en existe) on obtiendra une

valeur V ou F en suivant la définition de i. Cette valeur est dite **valeur de G selon i pour le choix des valeurs de variables**.
pour G3
T(f(X), a) = V si X = 4 et a = 4

3. **Si G est de la forme (∀X)G'**, la valeur de G sera V, si la valeur de G' selon i pour toutes les valeurs de la variable (dans D) est V sinon la valeur de G sera F
G1 est F selon l'interprétation i1
4. **Si G est de la forme (∃X) G'**, la valeur de G sera V si la valeur de G' selon i pour au moins une valeur de X (dans D) est V sinon la valeur de G sera F
Valeur de Q(X, Y) dans I2 est V quand X = 1 et Y = 3 donc
∃Y Q(X, Y) est V selon I2 quand X=1
5. **Si G est de la forme (¬G') ou (G' ∧ G") ou (G' ∨ G") ou (G' → G") ou (G' ↔ G"),** les connecteurs gardent la même sémantique qu'en calcul propositionnel. On définira la valeur de G selon i (quand les valeurs G' et G" selon i seront définies) au moyen des tables de vérité.

Remarques :

1. **Il y a une infinité d'interprétations pour G**
G1 = ∀X ∃Y P(X, Y)
Si D = N
i1 : P(X, Y) est équivalent à X ≥ Y G1 est V dans i1
i2 : P(X, Y) est équivalent à X > Y G1 est F dans i2 si X=0 il n'existe pas Y<0 dans N
2. **On ne peut pas interpréter une fbf contenant des variables libres**
G4 : Q(Y) Y libre dans G4
Soit I : D où Q : D élément de {V, F}
Quel sens attribuer à la variable libre ?
soit constante ?
soit variable parcourant D ? ==> V
==> **On se limitera aux fbfs fermees**

Exercice 3

On considère un sous-ensemble du calcul des prédicats avec :
a et b comme symboles de constantes
f comme symbole de fonction unaire
P comme symbole de prédicat binaire
Soit i une interprétation de ce langage définie par son domaine D={1, 2} et par:
i[a] = 1; i[b] = 2; i[f(1)] = 2; i[f(2)] = 1; i[P(U, V)] = V si et seulement si U = 1

Etablir la valeur de vérité des formules suivantes:

a) $P(a, f(a))$
b) $P(b, f(b))$
c) $\forall X \; \forall Y \; P(X,Y)$
d) $\forall X \; \forall Y \; (P(X,Y) \rightarrow P(f(X), f(Y)))$
e) $\exists X \; \forall Y \; (P(X,Y) \rightarrow P(f(X), f(Y)))$

Les corrections sont uniquement accessibles sur Internet

2.3 - Théorèmes d'équivalence

Soient A, B et C des formules bien formées :

1. **Implication matérielle**
   $A \rightarrow B \cong \neg A \vee B$
2. **Equivalence matérielle**
   $A \leftrightarrow B \cong (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$
3. **Commutativité**
   a) $A \vee B \cong B \vee A$
   b) $A \wedge B \cong B \wedge A$
4. **Associativité**
   a) $(A \vee B) \vee C \cong A \vee (B \vee C)$
   b) $(A \wedge B) \wedge C \cong A \wedge (B \wedge C)$
5. **Distributivité**
   a) $A \vee (B \wedge C) \cong (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
   b) $A \wedge (B \vee C) \cong (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
6. a) $A \vee V \cong V$
   b) $A \wedge V \cong A$
7. a) $A \vee F \cong A$
   b) $A \wedge F \cong F$
8. **Complémentarité**
   a) $A \vee \neg A \cong V$
   b) $A \wedge \neg A \cong F$
9. **Involution**
   $(\neg(\neg A)) \cong A$
10. **Lois de de Morgan**
    a) $\neg(A \vee B) \cong (\neg A) \wedge (\neg B)$
    b) $\neg(A \wedge B) \cong (\neg A) \vee (\neg B)$

11. a) $A \vee ((\neg A) \wedge B) \cong A \vee B$
    b) $A \wedge ((\neg A) \vee B) \cong A \wedge B$
12. **Identité**
    a) $A \wedge A \cong A$
    b) $A \vee A \cong A$
13. $(\forall X)\ G(X) = (\forall Y)\ G(Y)$
    $(\exists X)\ G(X) = (\exists Y)\ G(Y)$
14. $(\neg((\exists X)\ G(X))) = (\forall X)\ (\neg G(X))$
    $(\neg((\forall X)\ G(X))) = (\exists X)\ (\neg G(X))$
15. $(\forall X)\ (G(X) \wedge H(X)) = (\forall X)\ G(X) \wedge (\forall X)\ H(X)$
    $(\exists X)\ (G(X) \vee H(X)) = (\exists X)\ G(X) \vee (\exists X)\ H(X)$
    ATTENTION :
    $(\forall X)\ (G(X) \vee H(X))$ **non équivalent à** $(\forall X)\ G(X) \vee (\forall X)\ H(X)$
    $(\exists X)\ (G(X) \wedge H(X))$ **non équivalent à** $(\exists X)\ G(X) \wedge (\exists X)\ H(X)$
16. $(\forall X)\ F(X) \vee (\forall X)\ H(X) = (\forall X)\ F(X) \vee (\forall Y)\ H(Y)$
    $(\exists X)\ F(X) \vee (\exists X)\ H(X) = (\exists X)\ F(X) \vee (\exists Y)\ H(Y)$
    $(\forall X)\ F(X) \wedge (\forall X)\ H(X) = (\forall X)\ F(X) \wedge (\forall Y)\ H(Y)$
    $(\exists X)\ F(X) \wedge (\exists X)\ H(X) = (\exists X)\ F(X) \wedge (\exists Y)\ H(Y)$

3 - Quelques notions classiques: validité, insatisfiabilité, conséquence, complétude

3.1 - Validité

Une fbf A est une **tautologie** **(valide)** si et seulement si elle est vraie dans toute interprétation ; **on écrit alors :** $\models A$

Exemple :

$\neg A \vee A$ est une formule valide

Une fbf est **invalide** si et seulement si **elle n'est pas valide**

Exemple :

$A \wedge B$ et $A \vee B$ sont deux formules invalides il suffit que A et B soient fausses

Exercice 4

Etablir la validité des formules suivantes:

a) $(\forall X\ \exists Y\ P(X, Y)) \rightarrow (\exists X\ \exists Y\ P(X, Y))$
b) $(\exists X\ \forall Y\ \neg P(X, Y) \rightarrow \exists X\ P(X,X))$

3.2 - Insatisfaisabilité

Une fbf est **inconsistante** ou insatisfiable si et seulement si **elle est fausse dans toute interprétation**

Exemple :

$\neg A \wedge A$ est une formule inconsistante

Une fbf A est **consistante** ou **satisfiable**

- si et seulement si **elle n'est pas inconsistante**
- si **il existe une interprétation i telle que i[A] = V**
- si **elle admet un modèle**

Exemple :

$A \wedge B$ et $A \vee B$ sont deux formules consistantes il suffit que A et B soient vraies

3.3 - Conséquence logique

A est une **conséquence logique** de E si et seulement si **toutes les interprétations qui rendent vraies toutes les formules de E rendent vraie la formule A**.
On écrit alors **E |= A**

On dit qu'une formule C est une conséquence logique de H1.. Hn

- si et seulement si **tout modèle de H1...Hn est un modèle de C**
- si et seulement si **H1 $\wedge$ H2 $\wedge$ ... $\wedge$ Hn $\rightarrow$ C est valide**

Dans ce contexte les formule H_i sont les hypothèses et C est la conclusion.

3.4 - Indécibilité et semi-décidabilité de la logique des prédicats

Lorsqu'une formule ne contient pas de variable, on peut, comme en calcul propositionnel, en utilisant les tables de vérité, déterminer en un nombre fini d'opérations si cette formule est valide ou non inconsistante ou non.
La situation est plus complexe en présence de variables et donc de quantificateurs car il y a une infinité d'interprétations. On montre qu'il est impossible de proposer un algorithme général capable de décider en un nombre fini d'opérations de la validité ou de la non validité de n'importe quelle formule de la logique des prédicats du premier ordre.On dit que la logique des prédicats est indécidable. (Théorème d'indécidabilité de Church)
Cependant, on peut proposer des algorithmes généraux pour décider de la validité de certaines familles de fbfs :

- si la fbf est valide ils s'arrêteront
- si la fbf est non valide ils risquent de ne pas s'arrêter

La logique des prédicats est semi-décidable

Les principales techniques proposées sont :

- le théorème d'Herbrant
- la méthode de Davis et Putman
- le principe de résolution

4 - Représentation des connaissances

4.1 - L'universelle affirmative

- Tous les F sont des G
- $\forall X\ (F(X) \rightarrow G(X))$
- Tout F est G
- Tout ce qui est F est G
- N'importe lequel F est G
- Les F sont tous G
- Si un être quelconque est F, il est G
- Chaque F est G
- Seuls les G sont F

4.2 - L'universelle négative

- Aucun F n'est G
- $\forall X\ (F(X) \rightarrow \neg G(X))$
- Il n'y a aucun F et G
- Rien n'est à la fois F et G
- Les F et G n'existent pas

4.3 - La particularité affirmative

- Quelques F sont G
- $\exists X\ (F(X) \wedge G(X))$
- Quelque F est G

- Il y a des F et G
- Quelque chose est à la fois F et G
- Il y a un F et G
- Des F et G existent

4.4 - La particularité négative

- Quelques F ne sont pas G
- $\exists X\ (F(X) \wedge \neg G(X))$
- Quelque F n'est pas G
- Il y a des F et non G
- Quelque chose est à la fois F et non G
- Il y a un F et non G
- Des F et non G existent

Exemple :

soit à traduire le groupes de phrases suivantes :

a) Marcus était un homme
b) Marcus était un pompéien
c) Tous les pompéiens étaient des romains
d) César était souverain
e) Tous les romains étaient fidèles à César, soit le haïssaient
f) Chacun est fidèle à quelqu'un
g) Les gens n'essayent d'assassiner que les souverains auxquels ils ne sont pas fidèles
h) Marcus a essayé d'assassiner César

D'abord je vais constituer l'univers du discours c'est-à-dire je vais d'abord rechercher dans le texte toutes les propositions dont j'ai besoin. Ce qui donne pour l'exemple l'univers du discours suivant :

D = ensemble des êtres humains

Prédicats :

- HOMME(X) : X est un homme
- POMPEIEN(X) : X est pompéien
- SOUVERAIN(X) : X est souverain

- ROMAIN(X) : X est romain
- PERSONNE(X) : X est une personne
- FIDELE(X, Y) : X est fidèle à Y
- HAIR(X, Y) : X hait Y
- ESSAYER_ASSASSINER(X, Y) : X essaye d'assassiner Y

Constantes :

- marcus
- cesar

Ensuite, pour chacune des phrases je vais écrire une formule bien formée à l'aide des propositions définies ci-dessus, des connecteurs et des parenthèses.

a) Marcus était un homme
HOMME(marcus)

b) Marcus était un pompéien
POMPEIEN(marcus)

c) Tous les pompéiens étaient des romains
$\forall \Xi$ (POMPEIEN(X) $\rightarrow$ ROMAIN(X))

d) César était souverain
SOUVERAIN(cesar)

e) Tous les romains étaient fidèles à César, soit le haïssaient
$\forall$X (ROMAIN(X) $\rightarrow$ FIDELE(X, cesar) $\vee$ HAIR(X, cesar))
ou
$\forall$X (ROMAIN(X) $\rightarrow$ (FIDELE(X, cesar) $\vee$ HAIR(X, cesar)) $\wedge$ $\neg$(FIDELE(X, cesar) $\wedge$ HAIR(X, cesar)))

f) Chacun est fidèle à quelqu'un
$\forall$X $\exists$Y FIDELE(X, Y)

g) Les gens n'essayent d'assassiner que les souverains auxquels ils ne sont pas fidèles
$\forall$X $\forall$Y (PERSONNE(X) $\wedge$ SOUVERAIN(Y) $\wedge$ ESSAYER_ASSASSINER(X, Y) $\rightarrow$ $\neg$FIDELE(X, Y))

h) Marcus a essayé d'assassiner César
ESSAYER_ASSASSINER(marcus, cesar)

Exercice 5

Voici des paquets de groupe de phrases à vous de vous exercer puis vérifier vos traductions en cliquant sur "Traduction"

1- a) Quiconque sait lire est instruit
b) Les dauphins ne sont pas instruits
c) Certains dauphins sont intelligents
d) Certains êtres intelligents ne savent pas lire
e) Flipper est un dauphin
f) Le frère de Flipper est intelligent

Les corrections sont uniquement accessibles sur Internet

2 -
a) Pierre se prend pour Napoléon
b) Seuls les fous se prennent pour Napoléon
c) Pierre est fou
d) Quelques fous sont courageux

Les corrections sont uniquement accessibles sur Internet

3 -
a) Tous les chiens à poils ras sont frileux
b) Un chien est frileux seulement s'il est à poils ras
c) Aucun chien à poils ras n'est frileux
d) Certains chiens à poils ras sont frileux

Les corrections sont uniquement accessibles sur Internet
