Master Recherche Informatique – Cognition et Connaissances

Théorie des Possibilités

Présenté par : **Imen KETATA**
Alejandro GARIBOTTI ARIAS

Proposé par : **Alain MILLE**

2006-2007

Plan

- INTRODUCTION

1. HISTORIQUE DE LA THEORIE DES POSSIBILITES
2. QUELQUES DEFINITIONS
3. THEORIE DES POSSIBILITES
4. COMPARAISON ENTRE POSSIBILITE ET PROBABILITE
5. MESURE DE POSSIBILITE ET FONCTION DE CROYANCE
6. DOMAINES D'APPLICATION

- CONCLUSION

Introduction

Besoins dans le domaine de la I.A. :

Modéliser des connaissances.

- ***Généraliser des modes de raisonnement naturels.***
- ***Automatiser la prise de décision.***
- ***Construire de systèmes artificiels effectuant les tâches habituellement prise en charge par les humains.***
- ***Difficulté :***
- ***Nos connaissances sont imparfaites :***
  - ***incertaines (il y a un doute sur leur validité).***
  - ***imprécises (il y a une difficulté à les exprimer clairement).***

Plan

Historique de la théorie des possibilités

- ***Antiquité : Logique classique.***
  - ***Principe de bivalence.***
  - ***Loi de non contradiction.***

- ***XVII^{ème} siècle : Notion de probabilité pour s'adresser sur la notion d'incertitude.***

… et la notion d'imprécision?

- ***XX^{ème} siècle : Principe de Valence.***

- ***1965 : L. A. Zadeh introduit la notion de sous-ensemble flou, «fuzzy set» (Imprécision).***

- ***1978 : L. A. Zadeh introduit la théorie des possibilités (Imprécision et Incertitude).***

Plan

Définitions

<u>Incertitude et Imprécision</u>

- ***Incertitude:** le fait de ne pas connaître ou prévoir un état de la réalité pour déterminer la valeur de vérité d'une proposition (probabilité).*

- ***Imprécision:** description d'un état de la réalité par une variable propositionnelle multi-valuée (sous-ensemble flou).*

- ***Example 1 :***

- ***Bouteille A : demi pleine.***

- ***Bouteille B : pleine avec une probabilité 0,5.***

- ***Example 2 :***

- ***Bouteille A : potable avec un degré 0,9.***

- ***Bouteille B : potable avec une probabilité 0,9.***

- ***Bouteille C : potable avec un degré 0,9, avec une probabilité 0,5?***

Définitions

<u>Degré de vérité</u> :

⌦ ***Degré de précision d'une proposition vis-à-vis la réalité, lié à la consistance entre la proposition et la réalité.***

« Il fait beau aujourd'hui »?
« J'ai cinq doigts dans la main gauche »?

…si p est vrai, alors ¬p est faux!

<u>Degré de croyance</u> :

⌦ ***Degré de précision d'une proposition vis-à-vis l'ensemble de connaissances d'un agent.***

«Il fait beau aujourd'hui»?

«Il fait beau aujourd'hui à Paris»?
…si un agent ne croit pas p, ça ne veut pas dire qu'il croit ¬p!

Définitions

Théorie des sous-ensembles flous :

- ***Extension de la théorie des ensembles classiques.***

- ***Fonction d'appartenance: degré d'appartenance d'un élément à un ensemble donné.***

- ***Réduction à la théorie classique quand les fonctions d'appartenance prennent des valeurs binaires ({0,1}).***

fonction d'appartenance μA, degré de validité (verité ou croyance) de la proposition «x appartient à A».

α-coupe d'un sous-ensemble flou A : sous-ensemble des éléments ayant un degré d'appartenance supérieur ou égal à α :

$$\alpha\text{-coupe}(A) = \{x \in B|, \mu A(x) \geq \alpha\}.$$

Définitions

La Logique Floue :

- ***Extension de la théorie de la logique classique.***

- ***Différents degrés dans la vérification d'une condition (Principe de Valence).***

- ***Connaissances imprécises → conclusions.***

- ***Réduction à la logique classique quand les entrées prennent des valeurs binaires ({0,1}).***

OU (OR) : A OR B = max(A, B);
ET (AND) : A AND B = min(A, B);
NON (NOT) : NOT A = 1 - A;
OU EXCLUSIF (XOR) : A XOR B = (A OR B) AND NOT (A AND B) = A + B - 2 × min(A, B);
NON-OU (NOR) : A NOR B = 1 - max(A, B);
NON-ET (NAND) : A NAND B = 1 - min(A, B);
NON-XOR (NXR) : A NXR B = 1 + 2 × min(A, B) - (A + B);
SUIVEUR (NOP) : NOP A = A;

combinaisons non binaires :

Le produit : A × B (équivalent en binaire à l'opération AND);
L'addition : A + B (équivalent en binaire à l'opération OR).

Plan

Théorie des possibilités

Prise en compte combinée de l'imprécision et de l'incertitude dans des connaissances.

- ***Permet le raisonnement sur des connaissances imprécises ou vagues.***

- ***Introduise un moyen de prendre en compte des incertitudes sur ces connaissances (formalisation des incertitudes de nature non probabiliste sur des évènements).***

- ***Exprime : dans quelle mesure la réalisation d'un évènement est possible et dans quelle mesure on en est certain, sans toutefois avoir à sa disposition l'évaluation de la probabilité de cette réalisation.***

- **Bouteille C : potable avec un degré de possibilité 1, avec une necessité 0,5?**

¿  **?**

Théorie des possibilités

Mesure de possibilité :

Soit un ensemble de référence fini X, on attribue à chaque sous-ensemble de X un coefficient entre 0 et 1 évaluant à quel point cet évènement est possible.

Mesure de possibilité Π : une fonction définie sur l'ensemble P(X) des parties de X, prenant ses valeurs dans [0,1];

1. $\Pi(\emptyset) = 0$,
2. $\Pi(X) = 1$,
3. $\Pi(\bigcup_{i = 1,2\ldots} A_i) = \sup_{i = 1,2\ldots}(\Pi(Ai))$,

- **Possibilité: consistance avec l'ensemble de croyances.**
- **Compositionnel avec l'opérateur d'union.**
- **Pas compositionnel avec l'operateur d'intersection!**

$$\Pi(\cap i = \mathrm{U}_{i = 1,2\ldots} Ai) \leq \min_{i = 1,2\ldots}(P(Ai)).$$

Théorie des possibilités

Mesure de nécessité :

Soit un ensemble de référence fini X, on attribue à chaque sous-ensemble de X un coefficient entre 0 et 1 évaluant à quel point cet évènement est nécessaire.

Mesure de possibilité N : une fonction définie sur l'ensemble P(X) des parties de X, prenant ses valeurs dans [0,1] ;

1. $N(\varnothing) = 0$,
2. $N(X) = 1$,
3. $N(\cap_{i=1,2\ldots} A_i) = \min_{i=1,2\ldots}(N(A_i))$

$$N(A) = 1 - \Pi(A^c)$$

$$\Rightarrow N(A) \leq \Pi(A),$$

- **Nécessité: degré auquel on attend l'occurrence d'un événement.**
- **Compositionnel avec l'opérateur d'intersection.**
- **Pas compositionnel avec l'opérateur d'union!**

Théorie des possibilités

Interprétation :

1. ***N(A) = 1 ➔ A est certainement vrai (nécessaire) ➔ P(A) =1.***

2. ***P(A) = 0 ➔ A est certainement faux (impossible) ➔ N(A) = 0.***

3. ***P(A) = 1 ➔ Je ne serais pas surpris si A arrive; N(A) indéterminé (Possible, on sait pas si necessaire ou non).***

4. ***N(A) = 0 ➔ Je ne serais pas surpris si A n'arrive pas; P(A) indéterminé (Pas nécessaire, on ne sait pas si possible ou non).***

⌦ **Intersection 3. et 4. : P(A) = 1, N(A) = 0 : Je ne sais rien du tout sur A (possible mais pas nécessaire).**

Théorie des possibilités

Distribution de possibilités

Fonction définie sur X, prenant ses valeurs dans [0,1], satisfaisant la condition de normalisation suivante :

$$\mathrm{Sup}_{x \in X} \ \pi(x) = 1,$$

Mesure et distribution de possibilités peuvent être associées. A partir d'une distribution π, qui attribue un coefficient de possibilité à chaque élément de X d'où la notation :

¥A Є P(X) $\quad \Pi(A) = \sup_{x \in A} \pi(x),$

Π : une mesure de possibilité, d'où à partir de π on construit donc Π.

Réciproquement, toute mesure de possibilité Π attribue un coefficient de possibilité à toutes les parties de X :

¥x Є X $\quad p(x) = \Pi(\{x\}).$

Plan

- INTRODUCTION

1. HISTORIQUE DE LA THEORIE DES POSSIBILITES
2. QUELQUES DEFINITIONS
3. THEORIE DES POSSIBILITES
4. COMPARAISON ENTRE POSSIBILITE ET PROBABILITE
5. MESURE DE POSSIBILITE ET FONCTION DE CROYANCE
6. DOMAINES D'APPLICATION

- CONCLUSION

Comparaison entre Possibilité et Probabilité

Si la proposition H est impossible : possibilité nulle = probabilité nulle.
Si la proposition H est certaine : nécessité unité = probabilité unité.

Pour que la probabilité soit strictement positive mais pas l'unité: trois sous-cas.

1. ***H n'est pas tout à fait possible, Necessité nule, alors $0 \leq P(H) \leq \Pi(H) < 1$.***

2. ***H est au moins un petit peu certain ($N(H)>0$), Possibilite unité, alors $0 < N(H) < P(H) \leq 1$.***

3. ***H n'est pas certain du tout et tout à fait possible, alors toute mesure de probabilité P est admissible car elle vérifie : $0 = N(H) \leq P(H) \leq \Pi(H) = 1$.***

- **Bouteille C : potable avec un degré de possibilité 1, avec une necessité 0,5.**

…on boit ou pas??

Comparaison entre Possibilité et Probabilité

La théorie des possibilités diffère de la théorie des probabilités, surtout par le fait qu'il est possible de distinguer incertitude d'imprécision, ce qui n'est pas le cas avec des probabilités.

Comparaison entre Possibilité et Probabilité

Par exemple; ***A cause de la logique floue, elle permet de modéliser l'imprécis avec des définitions vagues du genre "il fait plutôt chaud", "il est assez grand", etc., mais ces définitions approximatives sont certaines.***

Elle permet également de modéliser l'incertain avec une définition du genre "il fait 23 degrés", à laquelle on ajoute une grandeur appelée la 'possibilité'. Si cette possibilité n'est pas l'unité, alors d'autres évènements sont possibles et il y a une incertitude. Dans ce cas, il est également possible de gérer les conflits avec d'autres valeurs « possibles ».

Par contre, en probabilités, une distribution de probabilités sur la température évaluée (par exemple, une gaussienne autour de 23 degrés) représente l'imprécision sur la mesure, en même temps qu'elle peut coder notre incertitude. Cette confusion entre incertitude et imprécision pourrait être dommageable pour certaines applications.

Plan

Mesure de Possibilité et Fonctions de Croyance

D'après Bernadette Bouchon-Meunier; les mesures de possibilité peuvent être placées dans le cadre d'une théorie plus générale sur les fonctions de croyance, qui a l'intérêt de les situer par rapport aux probabilités.

Théorie des possibilité et théorie des probabilités apparaissent comme descendantes d'un ancêtre commun, la théorie de l'évidence.

Mesure de Possibilité et Fonctions de Croyance

Les fonctions de croyance concernent la modélisation et la quantification de la crédibilité attribuée à des faits. La théorie de l'évidence de Shafer considère un univers de référence fini X sur lequel sont déterminés des coefficients de croyance;

$$\sum_{x \supseteq A} m(A) = 1$$

m(A) : degré avec lequel un groupe d'observateurs croit à la réalisation de l'évènement A.

Toute partie non vide B de X telle que m(B) ≠ 0 est appelée élément focal.
D'où;

$$Bel(A) = \sum_{A \supseteq B} m(B)$$

degré de croyance prenant en considération tous les éléments focaux qui entraînent A, et

$$Pl(A) = \sum_{A \cap B \neq \emptyset} m(B)$$

degré de plausibilité Pl(A) de A en prenant en compte tous les éléments focaux qui ont quelque chose à voir avec A.

Plan

- INTRODUCTION

1. HISTORIQUE DE LA THEORIE DES POSSIBILITES
2. QUELQUES DEFINITIONS
3. THEORIE DES POSSIBILITES
4. COMPARAISON ENTRE POSSIBILITE ET PROBABILITE
5. MESURE DE POSSIBILITE ET FONCTION DE CROYANCE
6. DOMAINES D'APPLICATION

- CONCLUSION

Domaines d'application

Les parties floues (ou sous-ensembles flous) ont été introduites afin de modéliser la représentation humaine des connaissances, et ainsi améliorer les performances des systèmes de décision qui utilisent cette modélisation. Les sous-ensembles flous sont utilisés soit pour modéliser l'incertitude et l'imprécision, soit pour représenter des informations précises sous forme lexicale assimilable par un système expert.

Domaines d’application

La théorie des possibilités est utilisée dans des domaines aussi variés que l‘automatisme (freins ABS), la robotique (reconnaissance de formes), la gestion de la circulation routière (feux rouges), le control aérien, l'environnement (meteorologie, climatologie, sismologie), la medecine (aide au diagnostic), l' assurance (sélection et prévention des risques) et bien d'autres.

Elle présente aussi l'intérêt d'être plus facile et meilleur marché à implémenter qu'une logique probabiliste, bien que cette dernière seule soit stricto sensu cohérente.

Plan

- INTRODUCTION
1. HISTORIQUE DE LA THEORIE DES POSSIBILITES
2. QUELQUES DEFINITIONS
3. THEORIE DES POSSIBILITES
4. COMPARAISON ENTRE POSSIBILITE ET PROBABILITE
5. MESURE DE POSSIBILITE ET FONCTION DE CROYANCE
6. DOMAINES D’APPLICATION

- CONCLUSION

Conclusion

La théorie des possibilités a été présentée dans un cadre de la théorie de l'évidence, qui met en évidence un parallélisme par rapport a la théorie des probabilités, montrant en quoi ces deux théories sont proches, montrant également ce qui fait leur différence fondamentale.

Conclusion

MERCI POUR VOTRE ATTENTION

;=)