Deux variations autour des codes identifiants *

Sylvain Gravier, Aline Parreau
Institut Fourier UMR 5582
Institut Fourier, 100 rue des Maths, BP 74
38402 St Martin d'Heres, France

Olivier Delmas, Mickael Montassier
Université de Bordeaux
LaBRI UMR 5800
351, cours de la Libération
F-33405 Talence Cedex, France

2 octobre 2009

Résumé

Nous étudions deux variantes des codes identifiants dans les graphes, plus faibles que la définition classique. De plus, nous donnons des bornes exactes de la cardinalité de ces codes pour les cycles alors que cette valeur pour les codes identifiants n'est toujours pas connue pour les cycles.

1 Introduction

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple et non orienté et $r \geq 1$ un entier. Pour un sommet $v \in V$, on note $B_r(v) \subseteq V$ la boule centrée en v de rayon r : $w \in B_r(v)$ si et seulement si $d(v, w) \leq r$. Un ensemble de sommet $S \subseteq V$ est dit *r-dominant* si les boules de centre les sommets de S de rayon r couvrent tous les sommets de G : $\cup_{s\in S} B_r(s) = V$. Un ensemble de sommet $S \subseteq V$ est dit *r-séparable* si :

$$\forall x \in V, \forall y \in V, y \neq x, B_r(x) \cap C \neq B_r(y) \cap C$$

Un *code r-identifiant* est un ensemble de sommets $C \subseteq V$ r-dominant qui est r-séparable. La notion de codes identifiants a été introduite en 1998 par Karpovsky, Chakrabarty et Levitin [2] pour modéliser un problème de détection de défaillance dans des réseaux multiprocesseurs. Chaque processeur du code r-identifiant teste ses $(\leq r)$-voisins (ses voisins à distance inférieure ou égale à r) et renvoit 1 si l'un d'eux est défectueux, 0 sinon, sans pour cela que le processeur puisse connaitre l'identité du voisin défectueux. S'il n'y a qu'un processeur en panne, la réponse globale permet de l'identifier.

On s'interesse généralement au problème de la minimisation de la cardinalité d'un code r-identifiant dans un graphe donné. Ce problème est NP-difficile [2]. Même pour des classes simples de graphes (hypercube, grille finie, ...), trouver la cardinalité minimale d'un code identifiant est encore un problème ouvert. Par exemple, on connait une borne exacte pour

*Recherches soutenues par le projet ANR IDEA -Identifying coDes in Evolving grAphs-, ANR-08-EMER-007, 2009-2012.

tous les cycles de taille paire, mais il reste encore des inconnues pour les cycles de taille impaire [1, 3, 4]. Pour en savoir plus sur les codes identifiants, voir la bibliographie en ligne d'Antoine Lobstein [5].

Dans cette note, nous introduisons deux variantes des codes identifiants : dans la première variante (code r-identifiant faible) un sommet est identifié des autres éléments pour un rayon inférieur ou égal à r. Dans la seconde variante (code r-identifiant allégé), les sommets sont identifiés deux à deux pour un rayon inférieur ou égal à r.

Code r-identifiant faible : Un *code r-identifiant faible* de G est un ensemble de sommets r-dominant $C \subseteq V$ qui est *faiblement r-séparable*, i.e.

$$\forall x \in V, \exists r_x \leq r, \forall y \in V, y \neq x, B_{r_x}(x) \cap C \neq B_{r_x}(y) \cap C$$

Code r-identifiant allégé : Un *code r-identifiant allégé* de G est un ensemble de sommets r-dominant $C \subseteq V$ qui est *légèrement r-séparable*, i.e.

$$\forall x \in V, \forall y \in V, y \neq x, \exists r_{xy} \leq r, B_{r_{xy}}(x) \cap C \neq B_{r_{xy}}(y) \cap C$$

Un code est dit *optimal* si sa cardinalié est minimum. Pour un graphe G, on note $IC_r(G)$ (resp. $WC_r(G)$ et $LC_r(G)$) la cardinalité d'un code r-identifiant optimal (resp. code r-identifiant faibleet code r-identifiant allégé).

Clairement, un code r-identifiant est un code r-identifiant faible (en prenant $r_x = r$ pour tout $x \in V$) et un code r-identifiant faible est un code r-identifiant allégé (en prenant $r_{xy} = r_x$). On a donc les inégalités suivantes : $LC_r(G) \leq WC_r(G) \leq IC_r(G)$, l'étude des codes r-identifiants faibles et allégés nous permet de trouver des bornes pour les codes identifiants. Un code 1-identifiant faible est un ensemble localisateur dominant (les éléments du code ne sont pas nécessairement identifiés). Cependant la réciproque n'est pas vraie : il existe des ensembles localisateurs dominants qui ne sont pas des codes 1-identifiants faibles (par exemple l'ensemble $\{v_1, v_3, v_5\}$ sur le cycle $v_1 v_2 ... v_7$ de taille 7).

Comme pour les codes identifiants "classiques", ces deux variantes permettent d'identifier chaque sommet de G, cependant la procédure de détection se fait en plusieurs étapes : les processeurs du code interrogent à l'étape i leurs $(\leq i)$-voisins. Elle nécéssite plus de temps et plus de mémoire mais les codes sont plus petits.

Dans la suite, nous calculons $WC_r(G)$ et $LC_r(G)$ pour les cycles. On note C_n le cycle de taille n.

2 Codes r-identifiants faibles dans les cycles

Nous donnons un code r-identifiant faible pour les cycles de taille $n = (2r + 2)p$:

Lemme 1 *Si $n = (2r + 2)p$, C_n a un code r-identifiant faible de cardinalité $2p$.*

La figure 1 donne un exemple de construction pour $r = 2, n = 12$. La construction générale consiste à prendre dans le code des paires de sommets adjacents séparés par $2r$ sommets.

Ce code est en fait optimal. Pour le montrer nous utilisons le lemme suivant :

Lemme 2 *Soit S un ensemble de $2r + 2$ sommets consécutifs de C_n. Si C est un code r-identifiant faible de C_n, alors S contient au moins deux éléments de C.*

Ce lemme donne directement des bornes pour $WC_r(C_n)$:

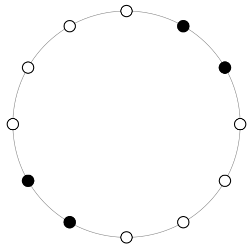

FIG. 1 – Un code 2-identifiant faible pour C_{12}

Corollaire 1 *Si C est un code r-identifiant faible de C_n, alors $|C| \geq \lceil \frac{2n}{2r+2} \rceil$.*
Plus précisément, si $n = (2r+2)p + R$ avec $0 \leq R < 2r+2$:
- *si $R = 0$, $|C| \geq 2p$,*
- *si $1 \leq R \leq r+1$, $|C| \geq 2p+1$,*
- *si $R > r+1$, $|C| \geq 2p+2$.*

Avec la construction du lemme 2, on obtient facilement des codes qui atteignent ces bornes si $R = 1$ ou si $R > r+1$. Ce n'est pas si simple pour le cas $2 \leq R \leq r+1$. La borne du corollaire 1 n'est alors atteinte que pour les cas $r = 1, R = 2$ et $r = 2, R = 2$:

Théorème 1 *Si $n = (2r+2)p + R$ avec $0 \leq R < 2r+2$, alors :*
- *si $R = 0$, $WC_r(C_n) = 2p$,*
- *si $R = 1$ ou si $r \leq 2$ et $R = 2$, $WC_r(C_n) = 2p+1$,*
- *si $R \geq 2$ et $(r, R) \neq (1,2), (2,2)$, $WC_r(C_n) = 2p+2$.*

3 Codes r-identifiants allégés dans les cycles

Nous nous intéressons maintenant à la deuxième variante : chaque paire de sommets doit être identifiée par un rayon inférieur ou égal à r. Les codes obtenus sont encore plus petits.

Nous commençons par donner un code r-identifiant allégé pour les cycles de taille $n = (3r+2)p$:

Lemme 3 *Si $n = (3r+2)p$, C_n a un code r-identifiant allégé de cardinalité $2p$.*

Un exemple de construction est donné dans la figure 2.

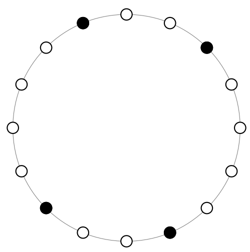

FIG. 2 – Un code 2-identifiant allégé pour C_{16}

Ce code est en fait optimal. Pour le montrer nous utilisons les deux lemmes suivants :

Lemme 4 *Soit C un code r-identifiant allégé de C_n et $v \in C$. Alors il y a un autre élément du code w à distance inférieure ou égale à $r+1$ de v : $\forall v \in C, \exists w \in C, 0 < d(v,w) \leq r+1$*

Lemme 5 *Soit S un ensemble de $3r + 2$ sommets consécutifs de C_n. Soit C un code r-identifiant allégé de C_n alors S contient au moins deux éléments de C.*

Ce dernier lemme donne directement des bornes pour $LC_r(C_n)$:

Corollaire 2 *Si C un code r-identifiant allégé de C_n, alors $|C| \geq \lceil \frac{2n}{3r+2} \rceil$*
Plus précisément, si $n = (3r + 2)p + R$ avec $0 \leq R < 3r + 2$:
- *si $R = 0$, $|C| \geq 2p$,*
- *si $2R \leq 3r + 2$, $|C| \geq 2p + 1$,*
- *si $2R > 3r + 2$, $|C| \geq 2p + 2$.*

Ces bornes sont atteintes pour les cas $R \leq r + 1$ et $2R > 3r + 2$, avec le lemme 4 on peut calculer les valeurs de $LC_r(C_n)$ pour les cas intermédiaires. On obtient :

Théorème 2 *Si $n = (3r + 2)p + R$, avec $0 \leq R < 3r + 2$, alors :*
- *si $R = 0$, $LC_r(C_n) = 2p$,*
- *si $R \leq r + 1$, $LC_r(C_n) = 2p + 1$,*
- *si $R > r + 1$,$LC_r(C_n) = 2p + 2$*

4 Conclusion

Nous avons introduit deux variantes plus faibles des codes identifiants. Nous donnons les valeurs exactes des cardinalités des codes optimaux dans le cas des cycles, ce qu'on ne connait pas complètement pour la définition classique des codes identifiants. L'étude de ces codes permet d'obtenir des bornes pour les codes identifiants, il serait donc intéressant d'étudier ces variantes dans d'autres structures.

Références

[1] S. Gravier, J. Moncel, A. Semri, *Identifying codes of cycles*, Eur. J. Comb., **27(5)**,(2006), 767-776

[2] M. G. Karpovsky, K. Chakrabarty, L. B. Levitin, *On a New Class of Codes for Identifying Vertices in Graphs*, IEEE Transactions on Information Theory **44(2)** (1998), 599-611

[3] David L. Roberts , Fred S. Roberts, *Locating sensors in paths and cycles : The case of 2-identifying codes*, European Journal of Combinatorics, **29(1)**, (2008), 72-82

[4] Xu, Min and Thulasiraman, Krishnaiyan and Hu, Xiao-Dong, *Identifying codes of cycles with odd orders*, Eur. J. Comb.,**29(7)**,(2008),1717-1720

[5] http ://www.infres.enst.fr/ lobstein/bibLOCDOMetID.html