

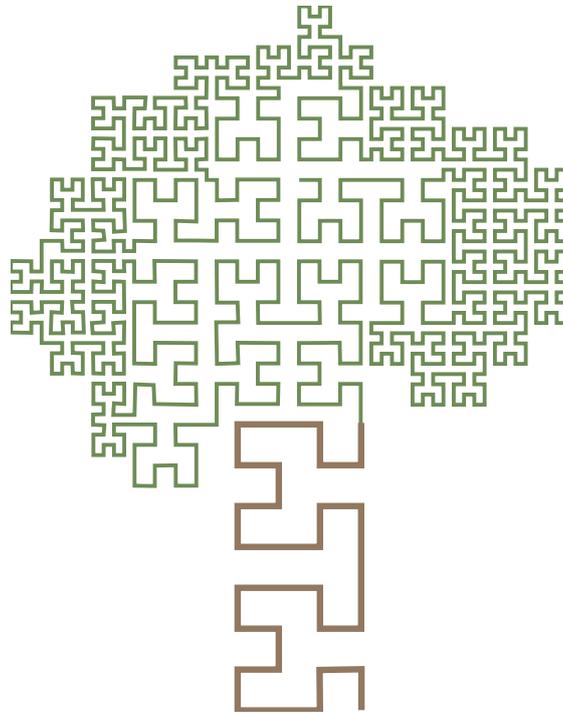
Université Joseph Fourier

Master 2 Recherche Informatique option ROCO

Arbres couvrants dans les grilles

Aline PARREAU

Juin 2009



Stage de Recherche effectué au sein de l'équipe Maths à Modeler de l'Institut Fourier
Maître de Stage : Sylvain Gravier

Remerciements

Je tiens à remercier mon responsable de stage, Sylvain Gravier, pour m'avoir encadrée durant mon stage, impliquée dans les activités de l'équipe et soutenue dans les moments de creux de mes recherches.

Je remercie aussi toute l'équipe Maths à Modeler pour la bonne humeur, les projets, les animations maths à modeler et les temps informels. Merci aussi à tous les stagiaires de l'Institut Fourier pour avoir partagé la bibliothèque pendant 5 mois dans une ambiance conviviale.

Je remercie Julien Moncel d'avoir accepté d'être mon expert extérieur ainsi que toute l'équipe du master sans qui ce stage n'aurait pas pu avoir lieu.

Enfin, merci à Vincent pour le dessin de la couverture et à Neil Sloane d'avoir créé l'encyclopédie en ligne de suites de nombres, qui m'aura bien aidée durant ce stage.

Table des matières

Introduction	2
1 Combien d'arbres dans la grille ?	4
1.1 Comment compter ?	4
1.2 L'exemple des grilles à deux lignes	5
1.3 Méthode générale	7
2 Là où l'on parle de partitions non croisées	10
2.1 Définition	10
2.2 Bijection avec d'autres objets	11
2.3 Quelques statistiques	13
3 Calcul partiel des coefficients	16
3.1 Coefficients limites	16
3.2 Principe de division	18
3.3 Partitions en intervalles	19
3.4 Lisser les oreilles ?	20
4 Mieux comprendre les structures en jeu	21
4.1 Construction du graphe	21
4.2 Structure de $Int(P_0, B)$	22
5 Variantes avec les cliques	26
5.1 Ce qui change	26
5.2 Nombre d'arbres dans la clique	26
5.3 Petites matrices	28
5.4 Contraction de sommets	28
5.5 Calcul des coefficients	29
6 Arbres couvrants avec les feuilles fixées	32
6.1 Résultats connus	32
6.2 En plus grande dimension	35
Conclusion	41
Notations	42
Références	43

Introduction

Ce mémoire est consacré à l'étude des arbres couvrants sur des grilles rectangulaires. Comment ces deux notions interagissent ? Quelle structure ont les arbres dans ces graphes très particuliers que sont les grilles ?

Un premier problème que l'on peut se poser est de dénombrer le nombre d'arbres couvrants de la grille. Ce nombre est un invariant important d'un graphe : si un graphe n'a aucun arbre couvrant, c'est qu'il n'est pas connexe, s'il n'en a qu'un c'est un arbre. Le graphe à n sommets ayant le plus d'arbres couvrants est bien sûr le graphe complet K_n qui compte n^{n-2} arbres couvrants (formule de Cayley). Le théorème de Kirshoff (connu en anglais sous le nom "Matrix Tree Theorem") exprime sous forme de déterminant du laplacien le nombre d'arbres couvrants d'un graphe. Cela nous donne un moyen d'obtenir le nombre d'arbres couvrants de la grille, mais sans information sur les liens de récurrence entre les différents coefficients. Nous cherchons donc une méthode pour énumérer les arbres. Un premier pas vers cela est de compter le nombre d'arbres couvrants de la grille colonne par colonne. Cette méthode a été introduite par Desjarlais et Molida en 2000 dans [6]. Raff en 2008 dans [18] continue cette étude et essaie de la généraliser. Cette méthode utilise une matrice de transfert dont Raff calcule les coefficients par ordinateur et obtient des récurrences pour des grilles ayant jusqu'à 6 lignes. Nous voulons poursuivre ces travaux en cherchant à calculer de manière combinatoire ces coefficients pour avoir des résultats généraux.

On peut aussi se poser la question de compter certains arbres couvrants particuliers. Il existe notamment de nombreuses études sur le nombre de chemins hamiltoniens dans la grille (voir [5, 14, 22]). Ces études sont naturellement liées au calcul du nombre de cycles hamiltoniens. Les auteurs se limitent toujours aux grilles ayant un petit nombre de lignes et n'arrivent pas à trouver de résultats généraux. Des auteurs cherchent alors à ne compter que certains chemins : par exemple, dans [5], on ne compte que les chemins entre deux coins fixés, mais cela ne facilite pas les choses.

Cette dernière étude nous invite cependant à nous poser une autre question sur les arbres couvrants dans les grilles, portant sur leur existence : étant donné une grille et un ensemble de sommets de cette grille, existe-t-il un arbre couvrant de la grille dont l'ensemble des feuilles est exactement cet ensemble de sommets ?

Ce problème a été résolu par Itaï et al. dans [10] lorsque l'ensemble fixé n'a que deux sommets, il s'agit alors de savoir s'il existe un chemin hamiltonien entre deux sommets fixés de la grille. Nous avons résolu dans de précédents travaux ([16]) le cas de 3 sommets. La grille étant un graphe biparti, une condition de coloration apparaît très vite. Nous avons cherché pour quelles grilles cette condition est suffisante, ce qui nous a amené à étudier des grilles de dimension plus grande.

Les premières parties (partie 1 à 4) sont consacrées à l'étude du premier problème : compter le nombre d'arbres couvrants de la grille. C'est ce qui a constitué la partie la plus importante de mon stage. Après avoir expliqué la méthode utilisée (partie 1), nous étudierons les partitions non croisées, objet au centre de cette méthode (partie 2). Nous donnons ensuite les principaux résultats obtenus (partie 3). Ces résultats étant partiels, nous avons cherché en partie 4 à mieux comprendre les structures en jeu à l'aide de graphes d'intersections.

La partie 5 est une variante au premier problème : la structure d'ensemble ordonné qu'est la colonne d'une grille est contraignante, aussi nous cherchons à compter le nombre d'arbres couvrants des grilles où les colonnes sont des cliques, c'est-à-dire, le nombre d'arbres couvrants du graphe $K_n \times P_m$.

Enfin, la dernière partie traite du second problème : chercher un arbre dont les feuilles sont fixées. Après un rappel des résultats connus, nous montrons notre résultat sur les grilles de dimension supérieure. Cette partie fait l'objet d'un article en cours de rédaction ([8]) et d'un poster que nous présenterons à Eurocomb en septembre 2009.

A la fin du mémoire, une table reprend les notations utilisées.

1 Combien d'arbres dans la grille ?

La *grille infinie* est le graphe dont les sommets sont les éléments de \mathbf{Z}^2 et où deux sommets sont reliés entre eux si leur distance euclidienne est 1. Un *graphe de grille* est un sous graphe de la grille infinie induit par un ensemble de sommets. Nous nous intéressons plus particulièrement ici aux grilles rectangulaires. La *grille rectangulaire* de taille $n \times m$ est le graphe de grille ayant comme ensemble de sommets $\{(x, y) \in \mathbf{Z}^2 | 1 \leq x \leq n, 1 \leq y \leq m\}$ elle sera notée $G_n(m)$ et représentée comme dans la figure 1. Les sommets sont numérotés de manière matricielle comme indiqué dans la figure pour la grille $G_4(5)$.

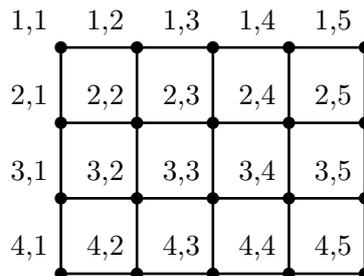


FIGURE 1 – La grille $G_4(5)$

Nous nous intéressons au problème du dénombrement des arbres couvrants d'une grille donnée. On notera $t(G)$ le nombre d'arbres couvrants d'un graphe quelconque G et plus spécialement, $t_n(m)$ le nombre d'arbres couvrants de la grille rectangulaire $G_n(m)$. Cette partie est consacrée aux différentes méthodes possibles et à l'explication détaillée de la méthode utilisée dans ce mémoire.

1.1 Comment compter ?

Le théorème de Kirchoff (voir par exemple [9]) donne un moyen systématique pour connaître le nombre d'arbres couvrants d'un graphe donné comme déterminant d'une matrice.

Théorème 1 (Kirchoff). *Soit $M = (m_{i,j})$ la matrice d'adjacence d'un graphe G , alors le nombre d'arbres couvrants de G est égal à n'importe quel cofacteur de la matrice $D - M$ où $D = (deg(v_i))$ est la matrice diagonale contenant les degrés des sommets de G (la matrice $D - M$ est appelée laplacien de G). On a donc, avec le cofacteur (n, n) ,*

$$t(G) = \begin{vmatrix} d_1 & -m_{1,2} & \dots & -m_{1,n-1} \\ -m_{2,1} & d_2 & \dots & -m_{2,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -m_{n-1,1} & \dots & \dots & d_{n-1} \end{vmatrix}$$

Cette méthode nous donne un moyen d'obtenir pour une grille de taille donnée le nombre d'arbres en temps polynomial mais ne nous donne aucune information sur la construction des arbres. Pour se rapprocher de l'énumération des arbres dans les grilles, la matrice d'adjacence n'est pas un outil approprié, elle n'utilise pas les spécificités de la structure de la grille. De plus, cette méthode ne donnera pas d'idées sur les relations entre les différents $t_n(m)$. Nous sommes à la recherche d'un moyen plus combinatoire pour calculer le nombre d'arbres couvrants, utilisant la structure de la grille.

Cette idée n'est pas nouvelle, de nombreux auteurs ont déjà essayé de dénombrer des structures couvrantes sur la grille. Toutes les méthodes sont basées sur le même principe : le nombre de lignes est fixe et l'on essaie de construire les chemins, cycles ou arbres colonne par colonne. Citons par exemple Kwong et Rogers dans [14] qui donnent une méthode générale basée sur une matrice de transfert qui peut marcher pour un nombre quelconque de lignes pour calculer le nombre de cycles hamiltoniens dans des grilles. Cependant, ils ne l'appliquent que pour des petites valeurs, et ne donnent aucun moyen de calculer cette matrice pour des grilles quelconques. Dans [22], Stoyan et Strehl calculent le nombre de cycles hamiltoniens de la grille en utilisant des langages rationnels et des automates finis. Pour cela, ils codent les cycles en numérotant 0 les cases à l'extérieur du cycle et 1 celles de l'intérieur. Ils cherchent alors comment passer d'une colonne à une autre en fonction de leur codage. Avec cette méthode, ils obtiennent des résultats numériques jusqu'à 8 lignes, et des résultats théoriques portant sur la relation de récurrence entre les valeurs. L'idée du codage est reprise par Collins et Krompart dans [5] pour compter le nombre de chemins hamiltoniens entre deux extrémités fixées. Ils arrivent à donner des valeurs pour des grilles ayant jusqu'à 5 lignes, sans méthode générale pour des grilles plus grandes.

Concernant plus précisément les arbres couvrants, les premiers essais sont dûs à Desjarlais et Molina dans [6] qui comptent le nombre d'arbres couvrants pour des graphes de taille $2 \times m$ et $3 \times m$. Raff dans [18] continue cette étude avec la même méthode, la généralise et obtient par ordinateur des résultats jusqu'à 6 lignes. Il propose des conjectures liées à la relation de récurrence.

Nous allons poursuivre ce travail, en cherchant de manière combinatoire des formules plus générales. Pour bien comprendre cette méthode, nous la détaillons complètement pour deux lignes.

1.2 L'exemple des grilles à deux lignes

Dans ce paragraphe, nous détaillons la méthode pour le cas simple où les grilles ne contiennent que deux lignes. Il y a d'autres manières de faire, qui peuvent paraître plus simple pour ces petits cas. Nous avons volontairement choisi de présenter ce point de vue qui est celui que nous utiliserons pour le cas général.

La méthode s'articule autour de la question suivante : comment construit-on un arbre couvrant sur $G_2(m)$ à partir de la grille $G_2(m-1)$?

Soit T un arbre couvrant de $G_2(m)$. Soit H le graphe induit par T sur les $m-1$ premières colonnes. Nous avons alors deux cas : soit H est un arbre de $G_2(m-1)$, soit H est une forêt de $G_2(m-1)$ avec deux composantes connexes, ayant la propriété suivante : chaque composante connexe de H a un sommet sur la colonne $m-1$. Une forêt ayant cette propriété sera dite *consistante*. Dans le premier cas, T peut avoir trois motifs différents sur les arêtes formant la dernière colonne : il y a donc 3 manières de construire un arbre couvrant de $G_n(m)$ à partir d'un arbre couvrant de $G_n(m-1)$ (voir la figure 2).

Dans le deuxième cas, les deux composantes connexes de H doivent nécessairement être reliées comme le montre la figure 3. Autrement dit, il n'y a qu'une seule manière d'obtenir un arbre couvrant sur m colonnes à partir d'une forêt consistante sur $m-1$ colonnes.

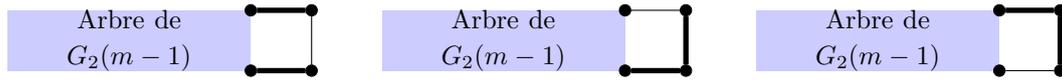


FIGURE 2 – Les 3 façons de créer un arbre sur m colonnes à partir d'un arbre sur $m - 1$ colonnes

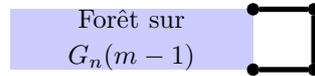


FIGURE 3 – La seule façon d'obtenir un arbre couvrant sur m colonnes à partir d'une forêt consistante sur $m - 1$ colonnes

Soit t_m le nombre d'arbres couvrants de $G_2(m)$ et f_m le nombre de forêts consistantes de $G_2(m)$. Alors on a la récurrence suivante :

$$t_m = 3t_{m-1} + f_{m-1}$$

Pour résoudre le problème nous avons aussi besoin d'une relation de récurrence pour f_m . Nous raisonnons de la même manière : à partir d'un arbre couvrant de $G_2(m-1)$, on peut construire 2 forêts consistantes de $G_2(m)$ et à partir d'une forêt consistante de $G_2(m-1)$, on ne peut construire qu'une seule forêt de $G_2(m)$. Donc :

$$f_m = 2t_{m-1} + f_{m-1}$$

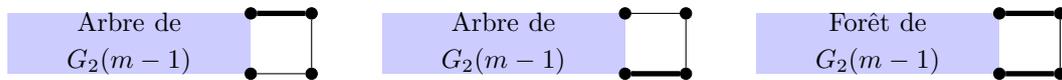


FIGURE 4 – Les 3 types de forêts que l'on peut construire

Nous avons maintenant tous les éléments de la récurrence, que l'on écrit sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} t_m \\ f_m \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} t_{m-1} \\ f_{m-1} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} t_1 \\ f_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Ce qui nous intéresse est d'obtenir une récurrence portant uniquement sur t_m . Pour supprimer les termes f_m , on peut utiliser la méthode du pivot. Une autre manière, plus "brutale" quand il n'y a que 2 lignes mais plus simple à exprimer quand les matrices sont plus grosses est de calculer le polynôme caractéristique de la matrice A :

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 1$$

D'après le théorème de Cayley Hamilton, nous avons alors :

$$A^2 = 4A - I$$

En appliquant à cette relation le vecteur $\begin{pmatrix} t_m \\ f_m \end{pmatrix}$ on obtient la récurrence

$$t_{m+2} = 4t_{m+1} - t_m \quad (2)$$

Initialement, $t_1 = 1$ et $t_2 = 4$. Nous obtenons alors la formule de t_m :

$$t_m = \frac{(2 + \sqrt{3})^m - (2 - \sqrt{3})^m}{2\sqrt{3}}$$

Nous nous contenterons généralement de la formule de récurrence (2).

1.3 Méthode générale

Nous allons maintenant généraliser cette méthode pour des grilles ayant un nombre quelconque n de lignes. Dans la suite, les arbres et forêts considérées seront toujours sous-entendus couvrants.

Soit T un arbre couvrant de $G_n(m)$. Soit H le graphe induit par T sur les $m - 1$ premières colonnes. H est une forêt de $G_n(m - 1)$ qui a la propriété (P) suivante : chaque composante connexe de H a au moins un sommet sur la colonne $m - 1$. Une forêt ayant la propriété (P) sera dite *consistante*.

Réciproquement, à partir d'une forêt consistante, on peut construire un arbre couvrant de la grille $G_n(m)$ en reliant les composantes connexes 2 à 2. L'information nécessaire pour construire cet arbre est de savoir quels sommets de la dernière colonne sont dans les mêmes composantes connexes, c'est-à-dire, quelle *trace* la forêt a sur la dernière colonne.

Soit H une forêt couvrante de $G_n(m - 1)$, la *trace* de H est la partition de $[1, n]$ définie par : i et j sont dans le même ensemble si et seulement si les sommets $(i, m - 1)$ et $(j, m - 1)$ sont dans une même composante connexe de H . A titre d'exemple, les forêts consistantes ayant comme trace la partition $\{[1, n]\}$ sont exactement les arbres couvrants.

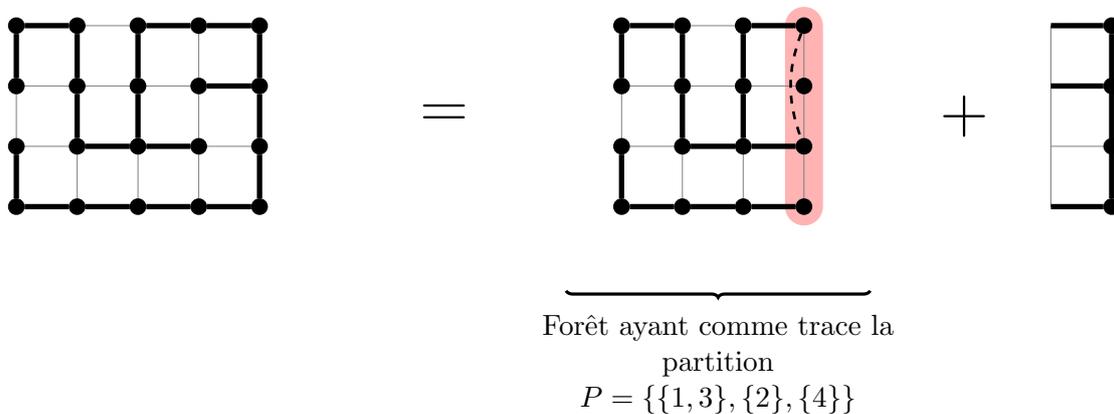


FIGURE 5 – Décomposition d'un arbre

Soit \mathcal{P}_n l'ensemble des partitions à n éléments. Pour deux partitions $P_0, P_1 \in \mathcal{P}_n$, on note a_{P_1, P_0}^n (où a_{P_1, P_0} si le contexte est clair) le nombre de manières d'obtenir une forêt consistante de $G_n(m)$ ayant comme trace P_1 à partir d'une forêt consistante de $G_n(m - 1)$ ayant comme trace P_0 .

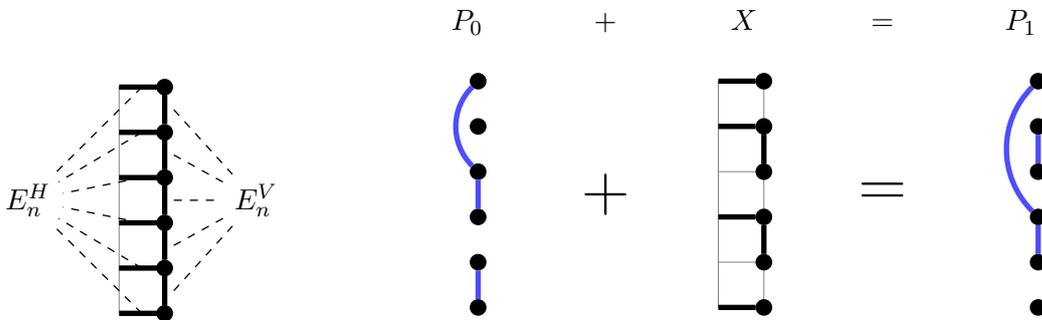
Pour compter le nombre d'arbres couvrants de $G_n(m)$, nous avons besoin aussi de compter pour chaque trace possible le nombre de forêts consistantes ayant cette trace. Pour $P_1 \in \mathcal{P}_n$, une partition à n éléments, nous notons $t_n(P_1, m)$ le nombre de forêts consistantes de $G_n(m)$ ayant comme trace P_1 . Nous avons alors :

$$t_n(P_1, m) = \sum_{P_0 \in \mathcal{P}_n} a_{P_1, P_0}^n t_n(P_0, m-1) \quad (3)$$

Cette relation définit une matrice $A_n = (a_{P_1, P_0}^n)_{P_0, P_1 \in \mathcal{P}_n}$. Pour compter le nombre d'arbres couvrants, il y a donc deux étapes :

1. Calculer les coefficients de A_n .
2. Éliminer les termes $t_n(P_1, m)$ où $P_1 \neq \{[1, n]\}$ afin d'obtenir une relation de récurrence pour $t_n(m)$ où seuls des termes $t_n(i) = t_n(\{[1, n]\}, i)$ apparaissent.

Nous nous sommes surtout intéressés à la première étape : calculer les coefficients de la matrice A_n . Essayons de préciser ce que sont ces coefficients. Pour passer d'une colonne à une autre, on doit ajouter des arêtes parmi un ensemble E_n d'arêtes que l'on peut séparer en deux parties : E_n^H , qui contient les n arêtes horizontales qui joignent les deux colonnes et E_n^V qui contient les $n-1$ arêtes verticales de la nouvelle colonne m (voir la figure 6).

FIGURE 6 – L'ensemble E_n FIGURE 7 – X est un transfert de P_0 à P_1

Un ensemble d'arêtes $X \subset E_n$ est un *transfert* de P_0 à P_1 si pour n'importe quelle forêt F de $G_n(m-1)$ de trace P_0 , on obtient une forêt $G_n(m)$ de trace P_1 en ajoutant les arêtes X . Le choix de la forêt n'est pas important, on peut calculer directement en connaissant P_0 et X la nouvelle trace P_1 , comme le montre la figure 7.

On a alors :

$$a_{P_1, P_0} = |\{X \subset E_n \mid X \text{ transfert de } P_0 \text{ à } P_1\}|$$

Raff dans [18] a calculé de cette manière jusqu'à $n \leq 6$, à l'aide d'un ordinateur, les coefficients de la matrice de manière brute, c'est-à-dire, en testant chaque sous ensemble d'arêtes que l'on peut ajouter. Très vite, cette méthode n'est plus réalisable, il y a en effet 2^{2n-1} sous-ensembles d'arêtes à tester pour chaque coefficient et $|\mathcal{P}_n|^2$ coefficients à calculer. L'objectif de ce mémoire est de donner des formules pour ces coefficients en utilisant des moyens combinatoires.

Raff s'intéresse plus à la deuxième étape : à partir de la matrice A , comment peut-on trouver une récurrence pour $t_n(m)$ où les $t_n(P, m)$ n'interviennent plus ? Il suggère de calculer le polynôme caractéristique de A_n et d'utiliser le théorème de Cayley Hamilton. Devoir utiliser un tel théorème est un peu décevant dans le sens où nous cherchons une méthode différente de celle utilisant le théorème de Kirshoff où l'on doit justement calculer un déterminant. Une méthode basée sur un pivot serait peut-être plus efficace, notamment si l'on prend soin de bien indiquer la matrice.

Quelque soit la méthode utilisée, nous obtenons, comme nous l'avons vu pour $n = 2$, une relation de récurrence pour $t_n(m)$ qui est dans le pire des cas d'ordre la taille de A_n , c'est-à-dire d'ordre le nombre de partitions à n éléments, connu dans la littérature pour être le n -ième nombre de Bell \mathcal{B}_n . Cela croît très vite : en effet, pour tout $\alpha \in]0, 1[$, on a, à partir d'un certain rang $n^{\alpha n} \leq \mathcal{B}_n \leq n^n$

Cette borne n'est cependant pas optimale : on ne tient par exemple pas compte des symétries, qui peuvent réduire la taille de la matrice. On semble même être très loin de la borne optimale puisque tous les calculs effectués donnent des récurrences qui sont seulement d'ordre 2^{n-1} (voir [18]).

La remarque suivante va nous permettre d'améliorer nettement la borne \mathcal{B}_n et fait apparaître un nouvel objet dans cette étude : toutes les partitions ne peuvent pas être la trace d'une forêt couvrante. On peut observer par exemple (voir la matrice A_4 dans [18]) que pour $n = 4$ et $P_1 = \{\{1, 3\}, \{2, 4\}\}$, on a $a_{P_1, P_0} = 0$ pour tout $P_0 \neq P_1 \in \mathcal{P}$, et donc $t_n(P_1, m) = 0$.

Ces partitions sont les partitions *non croisées*, ce sont les partitions telles que : pour tout $i < j < k < l \in [1, n]$ si i et k sont dans la même partie, et si j et l sont dans la même partie alors i, j, k et l sont dans la même partie.

Lemme 1. *Si P est la trace d'une forêt de $G_n(m)$ alors P est une partition non croisée.*

Démonstration. Soit H une forêt de $G_n(m)$ et P sa trace. Soient $i < j < k < l \in [1, n]$. Supposons que i et k soient dans une même partie de P . Alors les sommets (i, m) et (k, m) sont dans une même composante connexe de H . Soit C un chemin entre ces deux points inclus dans H . $G_n(m) \setminus C$ n'est pas connexe, et les points (j, m) et (l, m) ne sont pas dans la même composante. S'ils sont dans une même composante de la forêt, c'est donc nécessairement celle de (i, m) et (k, m) . \square

Ainsi, il n'y a aucune forêt consistante avec une partition qui n'est pas non croisée. Nous pouvons donc limiter la matrice A_n aux partitions non croisées, nous noterons toujours A_n notre matrice. De plus, un nouvel objet apparaît qui va être au cœur de notre étude. La partie suivante va donc lui être consacrée, nous donnerons en particulier le nouvel ordre de la récurrence.

2 Là où l'on parle de partitions non croisées

Pour connaître le nombre d'arbres couvrants la grille, nous avons vu qu'il faut connaître les coefficients d'une matrice indicée par des partitions non croisées. Dans cette partie, nous nous intéressons donc à ces objets afin de donner les outils nécessaires pour calculer les coefficients.

2.1 Définition

Les partitions non croisées ont été introduites en 1972 par Kreweras dans [13]. Elles sont définies sur un ensemble ordonné ou de manière équivalente sur un cycle. Simion propose dans [19] une revue des différents aspects où les partitions non croisées interviennent. McCammond dans [15] montre quelques exemples où les partitions non croisées interviennent de manière surprenante.

Une partition non croisée étant avant tout une partition, nous fixons quelques notations sur les partitions. Une partition sera généralement notée P, P_0 ou P_1 . L'ensemble des partitions est noté \mathcal{P}_n . Les éléments d'une partition sont appelés *blocs* et notés A_1, B_1, \dots . Pour décrire une partition, plutôt que de donner la liste de ses ensembles, nous utiliserons la notation suivante : chaque bloc est représenté par la liste de ses éléments par ordre croissant, les blocs sont séparés par le symbole "/" et les blocs sont rangés dans l'ordre croissant de leur plus petit élément. Ainsi la partition $\{\{1, 4, 7\}, \{2, 5\}, \{3, 6\}\}$ sera notée $147/25/36$. (Dans les exemples, il y aura toujours moins de 9 éléments, la notation n'est donc pas ambiguë.)

Le *type* λ d'une partition est un n -uplet $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ où λ_i est le nombre de blocs de taille i . Par exemple, la partition $145/23/68/7$ est de type $\lambda = (1, 2, 1, 0, 0, 0, 0)$. On a $\sum_{i=1}^n \lambda_i = k$ et $\sum_{i=1}^n i\lambda_i = n$. De manière équivalente, le type d'une partition peut aussi être exprimé par la taille de ses blocs $x = (x_1, \dots, x_k)$. La partition non croisée $145/23/68/7$ est de type $x = (3, 2, 2, 1)$. Chacune des deux notations a ses avantages : le nombre de partitions d'un type donné s'exprime mieux avec la notation λ , mais lorsque nous travaillons sur les blocs, nous préférons la notation x (qui donne une écriture plus condensée). Nous serons donc amenés à utiliser l'une ou l'autre notation.

Une *partition non croisée* à n éléments est une partition $P = \{A_1, \dots, A_k\}$ de $[1, n]$ telle que pour tout $i < j < l < p \in [1, n]$ si i et l sont dans le même bloc A_1 et si j et p sont dans un même bloc A_2 , alors $A_1 = A_2$. L'ensemble des partitions non croisées à n éléments est noté \mathcal{NP}_n . Lorsque l'on représente graphiquement une partition non croisée en reliant par des arcs les éléments d'un même ensemble, (comme dans la figure 8), les arcs ne se croisent pas, d'où la terminologie. On peut aussi représenter une partition non croisée avec n points placés en cercle qui sont reliés par des cordes lorsqu'ils sont dans un même bloc. Là aussi, les blocs ne se croisent pas.

Un bloc A d'une partition P est dit *intérieur* s'il est contenu dans l'enveloppe convexe d'un autre bloc : il existe un bloc B de P tel que $A \subset \text{conv}(B)$ où $\text{conv}(B)$ désigne l'enveloppe convexe des éléments de B . Sinon il est dit *extérieur*.

Une *partition en intervalles* est une partition où tous les blocs sont des intervalles, c'est-à-dire : $\text{conv}(A) \cap A = A$ pour tout bloc A . Cela correspond aux partitions sans blocs intérieurs. Ces partitions seront beaucoup utilisées par la suite. On note \mathcal{IP}_n l'ensemble des partitions en intervalles à n éléments.

Une *oreille* est un couple d'élément (i, j) d'un même bloc A tels que $(i+1) < j$ et tous les éléments entre i et j ne soient pas des éléments de A . Dans une représentation graphique,

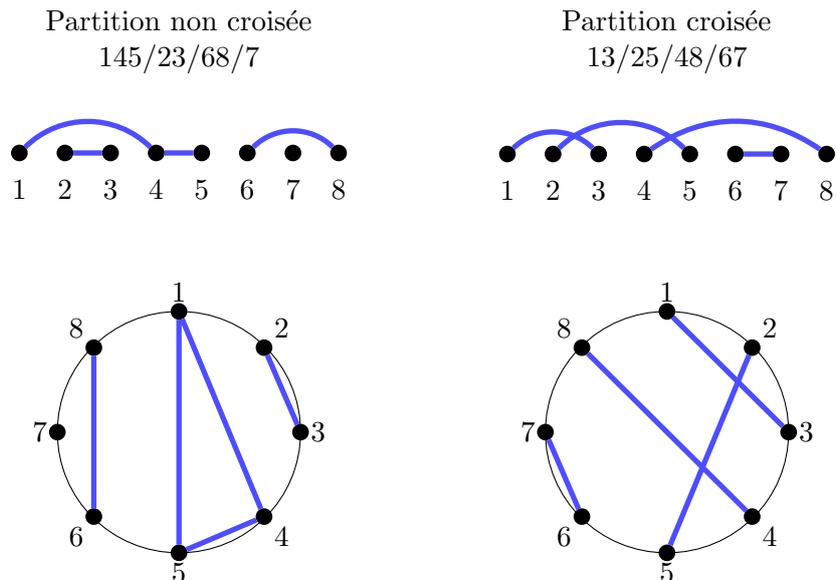


FIGURE 8 – Partition croisée et non croisée

cela correspond à un arc (voir la figure 8). Une partition sans oreille est une partition en intervalles.

Dans la figure 8, il y a deux blocs intérieurs (les blocs $\{2, 3\}$ et $\{7\}$), deux blocs extérieurs ($\{1, 4, 5\}, \{6, 8\}$), deux oreilles (les arcs $(1, 4)$ et $(6, 8)$).

Il y a un préordre naturel sur les partitions : $P < P'$ si pour tout $A \in P$ il existe $A' \in P'$ tel que $A \cup A'$. Par exemple $145/23/68/7 < 12345/678$. Ce préordre donne une structure de poset à l'ensemble \mathcal{NP}_n des partitions non croisées. Il y a un plus petit élément : la partition $1/2/\dots/n$ et un plus grand élément $1..n$. Pour plus de propriétés sur ce poset, on peut se référer à [20]

2.2 Bijection avec d'autres objets

Nombre d'objets peuvent être mis en bijection avec les partitions non croisées. Nous donnons ici quelques exemples. La figure 9 montre les bijections sur un exemple.

Avec les arbres ordonnés

Nous construisons une bijection entre l'ensemble des arbres ordonnés avec n arêtes et l'ensemble des partitions non croisées de $[1, n]$. Cette bijection a été construite par Prodinger (voir [17]).

Soit T un arbre ordonné avec n arêtes. Nous le représentons avec la racine en haut. Nous numérotions les arêtes de 1 à n en parcourant l'arbre en profondeur de gauche à droite, en préordre. Ainsi l'arête 1 est l'arête issue de la racine qui est la plus à gauche, l'arête n est celle en bas à droite (voir la figure 9).

On prend alors les étiquettes du chemin qui va de la racine à l'arête étiquetée n . Cela nous fait un premier ensemble. On enlève ce chemin puis on recommence : l'ensemble suivant est le plus long chemin contenant l'arête restante ayant la plus grande étiquette. La partition ainsi obtenue est bien non croisée.

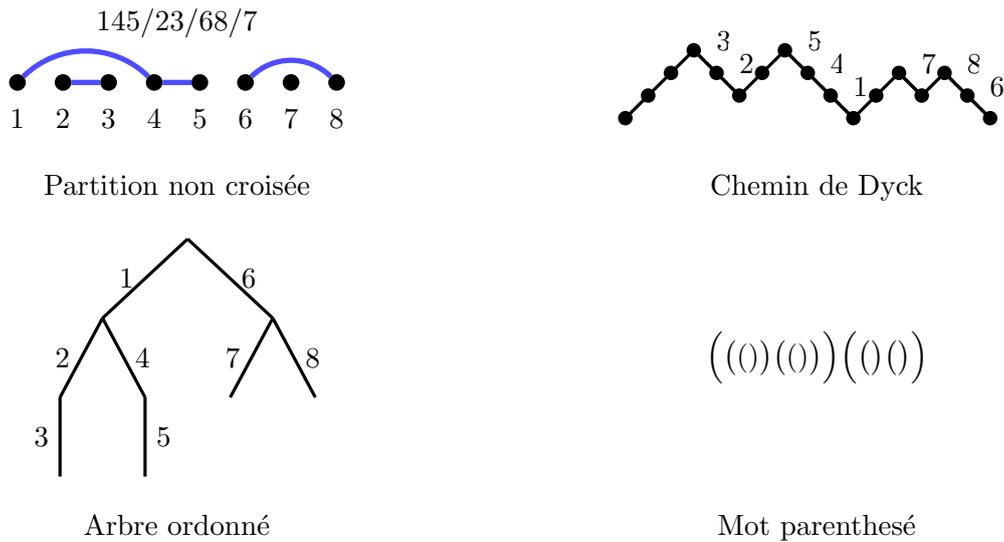


FIGURE 9 – Différentes bijections

L'application réciproque se construit ainsi : on prend l'ensemble A contenant l'élément n , on le transforme en un chemin C avec $|A|$ arêtes en numérotant les arêtes par ordre croissant. Puis on construit un chemin C' de la même manière avec l'ensemble A' qui contient le plus grand élément restant. On accroche alors le deuxième chemin sur le premier en respectant l'ordre, il n'y a qu'une manière de faire. On intègre de cette façon tous les blocs dans l'arbre.

Dans cette bijection, on peut voir que le nombre de blocs k d'une partition devient le nombre de feuilles de l'arbre. Le nombre de blocs extérieurs correspond au degré de la racine.

Avec les chemins de Dyck

Un chemin de Dyck est un chemin sur \mathbf{Z}^2 qui va du point $(0, 0)$ au point $(2n, 0)$ en ne faisant que des pas en montée U de vecteur $(1, 1)$ et en descente D de vecteur $(1, -1)$ et qui ne descend jamais sous le niveau 0. A chaque montée U est associé une descente D : c'est le pas de descente qui finit le plus petit chemin de Dyck qui commence par U . Les chemins de Dyck sont en bijection avec les arbres ordonnés. Cela nous donne donc une bijection avec les partitions non croisées.

Nous donnons une construction directe du chemin (cf. [19]). On construit le chemin de gauche à droite en considérant les éléments de $[1, n]$ dans l'ordre croissant : si i est le plus grand élément de son bloc alors on monte d'un pas et on descend de l pas où l est la taille du bloc contenant i . Sinon, on monte juste d'un pas (voir figure 9). On construit ainsi un chemin de Dyck.

Pour l'application réciproque, il faut numérotter les pas U de 1 à n en lisant de gauche à droite. Ensuite, on donne à un pas D le numéro du pas U qui lui est associé. A chaque descente correspond un bloc qui est constitué des numéros des étiquettes.

Dans cette bijection, le nombre de blocs correspond au nombre de descentes ou au nombre

de pics. Le nombre de blocs extérieurs correspond au nombre de descente's au niveau 0.

2.3 Quelques statistiques

Dans cette partie, nous donnons quelques chiffres sur les partitions non croisées.

Nombre de partitions non croisées :

Les bijections précédentes nous donnent directement le nombre de partitions non croisées à n éléments : c'est le nombre d'arbres ordonnés à n arêtes ou encore le nombre de mot bien parenthésés avec n parenthèses , c'est le nombre de Catalan $|\mathcal{NP}_n| = C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$.

Revenons un instant aux arbres couvrants. La matrice que l'on recherche à remplir est donc de taille $C_n \times C_n$. Nous améliorons donc le résultat de Raff dans [18] :

Théorème 2. *Le nombre d'arbres couvrants $t_n(m)$ de la grille $G_n(m)$ suit une relation de récurrence sur m qui est d'ordre $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$*

Dans [18], l'ordre était de \mathcal{B}_n le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments, nous diminuons l'ordre à C_n qui est équivalent à $\frac{4^n}{n^{3/2}\sqrt{\pi}}$ ce qui est nettement mieux que \mathcal{B}_n qui est proche de n^n . Cependant, les résultats de Raff laissent supposer que cette borne n'est pas optimale : toutes les récurrences connues sont d'ordre 2^{n-1} .

Nombre de partitions non croisées en k blocs :

On note $\mathcal{NP}_{n,k}$ le nombre de partitions non croisées à n éléments en k blocs. Compter le nombre d'éléments de $\mathcal{NP}_{n,k}$ revient à compter le nombre d'arbres ordonnés avec n arêtes et k feuilles. Ce sont les nombres de Narayana :

$$|\mathcal{NP}_{n,k}| = \frac{1}{n} \binom{n}{k} \binom{n}{k-1}$$

Nombre de partitions de type λ :

Soit $\mathcal{P}_{n,\lambda}$ (resp. $\mathcal{NP}_{n,\lambda}$) l'ensemble des partitions (resp. partitions non croisées) à n éléments de type λ . On a :

$$|\mathcal{P}_{n,\lambda}| = \frac{n!}{\prod i!^{\lambda_i} \lambda_i!}$$

Kraweras dans son article [13] calcule $|\mathcal{NP}_{n,\lambda}|$:

$$|\mathcal{NP}_{n,\lambda}| = \frac{n!}{(k-1)! \lambda_1! \dots \lambda_n!}$$

où $k = \sum \lambda_i$ est le nombre de blocs.

Nombre de partitions non croisées en k blocs avec l blocs extérieurs :

Nous cherchons maintenant le nombre $f_{n,k,l}$ de partitions non croisées sur n éléments, en k blocs, et avec l blocs extérieurs. On note $\mathcal{NP}_{n,k,l}$ l'ensemble de ces partitions.

Soit $P \in \mathcal{NP}_{n,k,l}$. Il y a deux cas : soit $\{1\}$ est un bloc de P , et il y a $f_{n-1,k-1,l-1}$ partitions P dans ce cas, soit 1 est dans un bloc A_1 de taille strictement plus grande que 1. Notons x le second (dans l'ordre croissant) élément de A_1 et i le nombre de blocs extérieurs (quand

on enlève 1) entre 1 et x . Alors $P \setminus 1$ (la partition P où on enlève le premier élément), est un élément de $\mathcal{NP}_{n-1,k,l+i}$. Réciproquement, à partir d'un élément de $\mathcal{NP}_{n-1,k,l+i}$ avec $l+i \leq k$ on construit une partition de $\mathcal{NP}_{n,k,l}$ en ajoutant un élément plus petit que tous les autres au $i+1$ -ème bloc extérieur.

On construit ainsi une bijection de $\mathcal{NP}_{n,k,l}$ dans $\mathcal{NP}_{n-1,k-1,l-1} \cup (\cup_{i=0}^{k-l} \mathcal{NP}_{n-1,k,l+i})$. Cela nous donne la relation de récurrence suivante :

$$\begin{aligned} f_{n,k,l} &= f_{n-1,k-1,l-1} + \sum_{i=0}^{k-l} f_{n-1,k,l+i} \\ &= f_{n-1,k-1,l-1} + \sum_{i=l}^k f_{n-1,k,i} \end{aligned}$$

Pour compléter cette récurrence, nous avons besoin des coefficients limites. Pour $n=1$, on a $f_{1,1,1} = 1$. Pour $k=1$, il y a un seul bloc, $f_{n,1,1} = 1$. Pour $k=n$, la partition est obligatoirement faite de singletons, on a donc $f_{n,n,l} = 0$ si $l < n$ et $f_{n,n,n} = 1$. La relation de récurrence nous donne alors facilement : $f_{n,n-1,l} = l$ pour $l \leq n-1$. Pour $k=l$, tous les blocs sont visibles, cela correspond donc au nombre de partitions en intervalles avec k blocs. Cela se compte facilement en remarquant qu'il suffit de placer les $k-1$ trous, on a donc $f_{n,k,k} = \binom{n-1}{k-1}$. Pour $l=1$, il y a un seul bloc visible. Si on enlève le premier élément, on obtient toutes les partitions à $n-1$ éléments en k blocs, il y en a donc $\frac{1}{n-1} \binom{n-1}{k} \binom{n-1}{k-1}$. Le théorème qui suit donne les autres coefficients :

Théorème 3. Soient n, k, l des entiers tels que $1 \leq l \leq k \leq n$, le nombre de partitions non croisées sur n éléments en k blocs avec l blocs extérieurs est :

$$f_{n,k,l} = \begin{cases} \frac{l}{n-k} \binom{n-1}{k} \binom{n-l-1}{k-l} & \text{si } k < n \\ 0 & \text{si } k = n \text{ et } l \neq n \\ 1 & \text{si } l = k = n \end{cases}$$

Démonstration. Cette formule généralise les résultats obtenus pour les cas limites.

Nous montrons la formule par récurrence sur n . Pour $n=1$, $f_{1,1,1} = 1$.

Soit $n > 1$, on suppose la formule vraie pour tout (n', k, l) avec $1 \leq l \leq k \leq n'$. Soit k, l tels que $1 \leq l \leq k \leq n$. Le résultat a déjà été montré pour $k=n$ et $k=n-1$ on peut donc supposer que $k \leq n-2$.

Soit $h_{n,k,l} = \frac{l}{n-k} \binom{n-1}{k} \binom{n-l-1}{k-l}$, on veut montrer que $f_{n,k,l} = h_{n,k,l}$. Calculons la différence $h_{n,k,l} - h_{n-1,k-1,l-1}$:

$$\begin{aligned} h_{n,k,l} - h_{n-1,k-1,l-1} &= \frac{l}{n-k} \binom{n-1}{k} \binom{n-l-1}{k-l} - \frac{l-1}{n-k} \binom{n-2}{k-1} \binom{n-l-1}{k-l} \\ &= \frac{1}{n-k} \binom{n-l-1}{k-l} \left[l \binom{n-1}{k} - (l-1) \binom{n-2}{k-1} \right] \\ &= \frac{1}{n-k} \binom{n-l-1}{k-l} \left[l \left[\binom{n-1}{k} - \binom{n-2}{k-1} \right] + \binom{n-2}{k-1} \right] \\ &= \frac{1}{n-k} \binom{n-l-1}{k-l} \left[l \binom{n-2}{k} + \binom{n-2}{k-1} \right] \end{aligned}$$

Montrons donc que $f_{n,k,l} - f_{n-1,k-1,l-1} = \sum_{i=l}^k f_{n-1,k,i} = \frac{1}{n-k} \binom{n-l-1}{k-l} \left[l \binom{n-2}{k} + \binom{n-2}{k-1} \right]$.

On procède par récurrence descendante sur l . Si $l = k$, par hypothèse de récurrence, $f_{n-1,k,k} = \frac{k}{n-k-1} \binom{n-2}{k} = \binom{n-2}{k-1}$, c'est bien $h_{n,k,k} - h_{n-1,k-1,k-1} = \frac{1}{n-k} \left[k \binom{n-2}{k} + \binom{n-2}{k-1} \right]$.
Supposons le résultat vrai pour l , montrons le pour $l-1$:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=l-1}^k f_{n-1,k,i} &= \sum_{i=l}^k f_{n-1,k,i} + \frac{l-1}{n-k-1} \binom{n-2}{k} \binom{n-l-1}{k-l+1} \\
&= \frac{1}{n-k} \binom{n-l-1}{k-l} \left[l \binom{n-2}{k} + \binom{n-2}{k-1} \right] + \frac{l-1}{n-k-1} \binom{n-2}{k} \binom{n-l-1}{k-l+1} \\
&= \frac{1}{(n-l)(n-k)} \binom{n-l}{k-l+1} \left[(k-l+1)l \binom{n-2}{k} + (k-l+1) \binom{n-2}{k-1} \right. \\
&\quad \left. + (n-k)(l-1) \binom{n-2}{k} \right] \\
&= \frac{1}{(n-l)(n-k)} \binom{n-l}{k-l+1} \left[(n-l)(l-1) \binom{n-2}{k} + (k-l+1) \binom{n-2}{k-1} \right. \\
&\quad \left. + k \binom{n-2}{k} \right] \\
&= \frac{1}{n-k} \binom{n-l}{k-l+1} \left[(l-1) \binom{n-2}{k} + \binom{n-2}{k-1} \right]
\end{aligned}$$

Finalemment :

$$\begin{aligned}
f_{n,k,l} &= f_{n-1,k-1,l-1} + h_{n,k,l} - h_{n-1,k-1,l-1} \\
&= h_{n,k,l}
\end{aligned}$$

ce qui achève la preuve. □

3 Calcul partiel des coefficients

Dans cette partie, nous essayons de calculer les coefficients de la matrice A . Certains coefficients se calculent plus facilement, notamment quand les partitions ont des formes simples : tous les éléments sont isolés (partition $1/2/\dots/n$ que l'on notera \emptyset), ou s'il n'y a qu'un seul élément (partition $P = 1\dots n$ que l'on notera I_n). Pour calculer les autres coefficients, nous allons voir une méthode de découpage qui va nous permettre de calculer les coefficients qui concernent les partitions en intervalles. Malheureusement, cette méthode n'est pas utilisable pour les autres partitions, que nous traiterons dans la partie suivante.

Rappelons que pour calculer a_{P_1, P_0} il faut compter le nombre de transferts de P_0 à P_1 . Pour qu'un ensemble $X = X^H \cup X^V$ soit un transfert de P_0 à P_1 il y a trois conditions à vérifier :

1. Tout bloc A de P_0 doit être relié par au moins une arête horizontale à la dernière colonne.
2. Il ne doit pas y avoir de cycle.
3. Les points reliés forment la partition P_1 sur la colonne m .

La condition 3 implique que dans un transfert, un bloc A de P_0 ne peut être relié par des arêtes horizontales à des sommets correspondant à un seul bloc B de P_1 . On dira alors que A est *associé* à B .

Les arêtes X^V induisent une partition en intervalles P_X sur la dernière colonne qui vérifie nécessairement $P_X \leq P_1$ (selon la relation définie en partie 2).

3.1 Coefficients limites

$P_0 = \emptyset$, ou comment faire à partir de rien

Nous cherchons à compter le nombre de façon d'obtenir une partition P_1 à partir de la partition composée de singletons. Si X est un transfert de \emptyset à P_1 , alors nécessairement $X^H = E_n^H$ pour satisfaire la condition 1, et $P_X = P_1$ pour satisfaire la condition 3. Cela détermine complètement X^V si P_1 est une partition en intervalles, sinon, il n'y a aucun transfert possible. Finalement :

$$a_{P_1, \emptyset} = \begin{cases} 1 & \text{si } P_1 \in \mathcal{IP} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

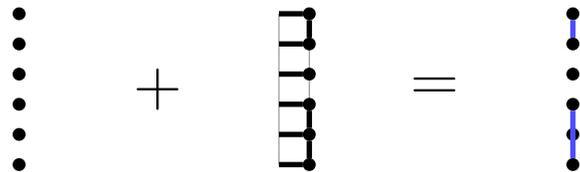


FIGURE 10 – Le seul transfert possible pour obtenir $P_1 = 12/3/456$ à partir de $P_0 = \emptyset$

$P_1 = \emptyset$, ou comment tout perdre

Nous cherchons à former la partition composée uniquement de singletons à partir d’une partition quelconque P_0 . Nécessairement, $X^V = \emptyset$ car $P_X \leq \emptyset$. De plus, chaque bloc de \mathfrak{P}_0 n’est associé qu’à un seul sommet-bloc de la dernière colonne, il faut donc choisir pour chaque bloc de P_0 le sommet de la colonne m auquel il sera associé, ce qui laisse $|A|$ possibilités pour chaque bloc A de P_0 . On a donc (λ et x désignent le type de P_0) :

$$a_{\emptyset, P_0} = \prod_{A \in P_0} |A| = \prod_{i=1}^n i^{\lambda_i} = \prod_{i=1}^k x_i$$

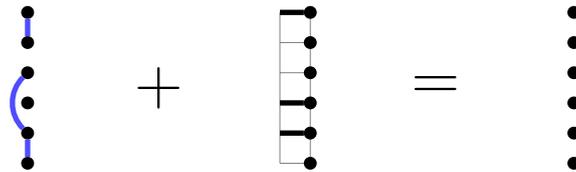


FIGURE 11 – Un exemple parmi les $3 \times 2 = 6$ transferts possibles pour obtenir $P_1 = \emptyset$ à partir $P_0 = 12/356/4$

$P_0 = P_1 = I_n$, ou comment passer du tout au tout

Il est déjà plus compliqué de calculer le nombre de manière de passer de la partition $P_0 = I_n$ à $P_1 = I_n$.

Fixons le nombre d’arêtes horizontales. Supposons qu’il y en a k . ($1 \leq k \leq n$). Pour ne pas faire de cycle (condition 2) mais pour que tous les points soient reliés entre eux, P_X doit être une partition en k intervalles, où chaque intervalle touche exactement une arête horizontale (voir figure 12 pour un exemple). X^V contient donc exactement $n - 1 - (k - 1) = n - k$ arêtes.

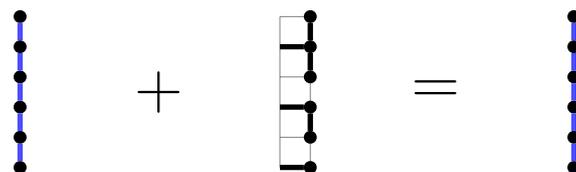


FIGURE 12 – Un transfert de I_n à I_n avec 3 arêtes horizontales

Pour compter le nombre de transferts possibles avec k arêtes horizontales, nous construisons une bijection avec les mots à $n + k - 1$ lettres sur $\{0, 1\}$ contenant exactement $2k - 1$ symboles "1".

Précisons cela en donnant une bijection entre les arbres possibles et les mots à $n + k - 1$ lettres sur $\{0, 1\}$ contenant exactement $2k - 1$ symboles "1". Soit X un transfert de I_n à I_n avec $|X^H| = k$. On parcourt les arêtes de E_n de haut en bas, en alternant arêtes horizontales et verticales et en commençant par la première arête horizontale (voir la figure 13). On écrit le mot $\Phi(X)$ lettre par lettre. Lorsqu’on rencontre une arête horizontale :

si elle est dans X^H , on écrit un “1”, sinon, on écrit rien. Lorsqu’on rencontre une arête verticale : si elle est dans X^V on écrit un “0”, sinon, on écrit un “1”. Le mot $\Phi(X)$ a donc $|E^V| + |X^H| = n + k - 1$ lettres et exactement $|X^H| + |E^V| - |X^V| = 2k - 1$ symboles “1”. L’opération inverse est la suivante : à partir d’un mot à $n + k - 1$ lettres contenant exactement $2k - 1$ “1”, on marque un “1” sur deux, en commençant par le premier. On construit ensuite le transfert de haut en bas de la manière suivante : si on rencontre un 0, arête verticale, si on rencontre un 1 marqué, arête horizontale, si on rencontre un 1 non marqué, trou (arête verticale non choisie). La figure 13 donne un exemple. Le nombre de transferts de I_n à I_n avec k arêtes horizontales est donc $\binom{n+k-1}{2k-1}$.

Transfert X	Lecture des arêtes	$\Phi(X)$
		0
	—	1
		0
	×	1
	—	1
		0
	×	1
	—	1
	—	1

FIGURE 13 – Code d’un transfert de I_n à I_n

Il faut maintenant sommer sur tous les k possibles, on obtient :

$$\begin{aligned}
 a_{I_n, I_n} &= \sum_{k=1}^n \binom{n+k-1}{2k-1} \\
 &= \text{Fib}(2n)
 \end{aligned}$$

Ce coefficient revenant à plusieurs reprises dans la suite, nous le noterons $a_n = a_{I_n, I_n}$.

3.2 Principe de division

Pour nous attaquer à des coefficients plus compliqués, nous allons donner un moyen de diviser le problème en séparant les lignes. Nous pourrions alors calculer les coefficients de la forme a_{P_1, P_0} avec $P_0, P_1 \in \mathcal{IP}$.

Division selon P_0

Soit $P_0 = 1 \dots t / (t+1) \dots n$ une partition en deux intervalles et P_1 une partition non croisée quelconque. P_1 induit une partition $P_1^{\leq t}$ sur les t premières lignes et une partition $P_1^{> t}$ sur les $n - t$ dernières lignes.

Si le bloc de P_1 contenant t est un bloc intérieur, alors $a_{P_1, P_0}^n = 0$. En effet, P_1 contient alors une oreille entre les t premières lignes et les $n - t$ dernières lignes. Cette oreille est impossible à générer car dans P_0 , aucun élément sur les t premières lignes n’est relié à un élément des $n - t$ dernières lignes.

Sinon, on peut découper la grille en deux parties : les t premières lignes et les $n - t$ dernières lignes. On a alors :

$$a_{P_1, P_0}^n = a_{P_1^{\leq t}, I_t}^t \times a_{P_1^{> t}, I_{n-t}}^{n-t}$$

En effet, les deux parties n'interfèrent pas et sont donc indépendantes : à partir d'un transfert $X^{\leq t}$ pour les t premières lignes et d'un transfert $X^{> t}$ pour les $n - t$ dernières lignes, on crée un transfert X pour la grille complète en concaténant les deux transferts et en ajoutant l'arête verticale $t(t + 1)$ si t et $t + 1$ sont dans le même bloc de P_1 .

La figure 14 illustre ce principe de division. $\left[\begin{array}{c} | \\ \hline | \end{array} \right]$ représente le coefficient a_{P_1, P_0} où P_0 et P_1 sont les deux partitions dessinées.

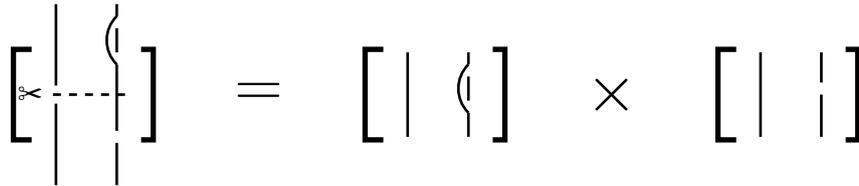


FIGURE 14 – Division selon P_0

Cette division va être tout à fait approprié pour les partitions P_1 en intervalles puisqu'elles n'ont pas de blocs intérieurs. On peut généraliser cette division aux partitions P_0 en k intervalles (on a alors un produit de k termes).

Division selon P_1

Diviser selon P_1 s'avère plus complexe. Considérons le cas où $P_1 = 1 \dots t / (t + 1) \dots n$ est une partition en deux intervalles. Comme souligné en début de partie, chaque bloc de P_0 ne peut être associé qu'à un seul des deux intervalles : dans un transfert, pour chaque bloc A de P_0 , il n'y a des arêtes horizontales de A vers P_1 que pour un des deux intervalles. Simplifions encore, prenons $P_0 = I_n$. Il y a alors deux cas : soit les arêtes horizontales de X^H sont parmi les t premières lignes, soit elles sont toutes parmi les $n - t$ dernières lignes. Si l'on est dans le premier cas, alors nécessairement X^V contiendra toutes les arêtes permettant de relier t à n . Le nombre de transferts est alors $a_t = a_{I_t, I_t}^t$. Avec le même raisonnement pour le deuxième cas, on obtient :

$$a_{P_1, I_n}^n = a_t + a_{n-t}$$

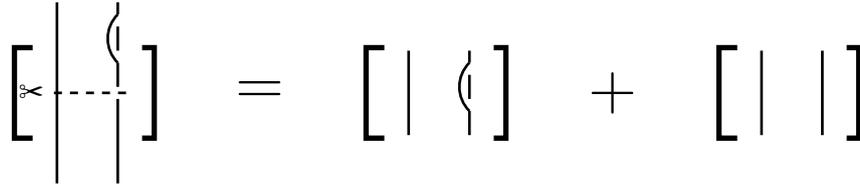
Cette méthode se généralise bien au cas où P_1 à une forme quelconque et que l'on coupe entre deux blocs extérieurs de P_1 . Si on coupe après la ligne t et qu'on note $P_1^{\leq t}$ et $P_1^{> t}$ les deux partitions induites, on a :

$$a_{P_1, I_n}^n = a_{P_1^{\leq t}, I_t}^t + a_{P_1^{> t}, I_{n-t}}^{n-t}$$

Généraliser pour des partitions P_0 est plus compliqué : il faut diviser les cas suivant comment sont associés les blocs de P_0 aux blocs de P_1 . Nous ne détaillons pas ce procédé car nous ne serons pas amenés à l'utiliser dans la suite.

3.3 Partitions en intervalles

Dans cette partie, nous calculons le nombre de transferts entre deux partitions en intervalles $P_0 = \{A_1, \dots, A_k\}$, de type λ ou x et $P_1 = (B_1, \dots, B_{k'})$ de type μ ou y .

FIGURE 15 – Division selon P_1

Nous calculons d'abord les coefficients avec $P_0 = I_n$. En divisant selon les intervalles de P_1 avec la méthode précédente, on obtient :

$$a_{P_1, I_n}^n = \sum_{j=1}^{k'} a_{y_j} = \sum_{i=1}^{k'} Fib(2y_j) = \sum_{j=1}^n \mu_j Fib(2j)$$

Ensuite nous calculons les coefficients avec $P_1 = I_n$ et P_0 quelconque, en divisant selon les intervalles de P_0 , on obtient :

$$a_{I_n, P_0}^n = \prod_{i=1}^k a_{x_i} = \prod_{i=1}^k Fib(2x_i) = \prod_{i=1}^n Fib(2i)^{\lambda_i}$$

Pour passer aux partitions quelconques, nous avons besoin d'une information supplémentaire : la taille des intersections des différents blocs. On note $z_{ij} = |A_i \cap B_j|$ les cardinaux des intersections. Alors, en découpant d'abord selon P_0 puis après selon P_1 , on obtient (avec par convention $Fib(0) = 0$) :

$$a_{P_0, P_1}^n = \prod_{i=1}^k \left(\sum_{j=1}^{k'} Fib(2z_{ij}) \right) \quad (4)$$

3.4 Lisser les oreilles ?

Reste à traiter les partitions qui ne sont pas des partitions en intervalles. Ces partitions sont celles contenant des blocs intérieurs et des oreilles.

Un cas que l'on peut régler est celui où $P_0 = I_n$. Si la partition P_1 a deux blocs différents contenant des oreilles, il n'y a aucun transfert. En effet, de la même manière que pour une oreille quand on avait $P_0 = \emptyset$, la partition P_0 ne pourra être associée ici qu'à un seul des deux blocs contenant des oreilles. Les deux oreilles ne pourront donc pas être réalisées.

Si par contre il n'y a qu'un seul bloc B de P_1 qui contient des oreilles, alors I_n doit être associé à ce bloc. Les seules arêtes horizontales possibles dans un transfert sont celles correspondant à des sommets de B . Les arêtes verticales non fixées sont celles entre des éléments de B . Soient C_1, \dots, C_l les différentes composantes connexes qui forment B . On a alors une bijection entre les transferts de I_n vers P_1 et les transferts de $I_{|B|}$ vers la partition en intervalles $\{C_1, \dots, C_l\}$. On a donc :

$$a_{P_1, I_n}^n = \begin{cases} \prod_{i=1}^l Fib(2|B_i|) & \text{si } P_1 \text{ a exactement un bloc } B \text{ contenant une oreille} \\ 0 & \text{si } P_1 \text{ a strictement plus de deux blocs contenant des oreilles} \end{cases}$$

Pour calculer les coefficients lorsque P_0 n'est pas une partition en intervalles, nous avons essayé d'obtenir une règle locale qui permettrait de "lisser" les oreilles pour se ramener au cas des partitions en intervalles. Cela n'a pas fonctionné : on ne peut pas remplacer localement les oreilles par des intervalles car cela a une influence sur le reste de la partition. C'est principalement dû au fait qu'un bloc de P_0 ne peut être associé qu'à un seul bloc de P_1 . Si l'on découpe une oreille de P_1 en deux parties, elles ne sont pas indépendantes, si une des parties est associée à un bloc, l'autre doit automatiquement être associée au même bloc.

Il faut donc comprendre de manière globale les interactions entre les deux partitions. Dans la partie suivante, nous construisons un graphe qui va représenter la structure des deux partitions et leurs interactions.

4 Mieux comprendre les structures en jeu

Nous ne pouvons pas calculer simplement les coefficients généraux avec les méthodes de découpage précédentes. Soient P_0 et P_1 fixées, quels sont les transferts possibles entre ces deux partitions ? Pour cela, il faut décider comment les blocs de P_0 s'associent aux blocs de P_1 . Traiter tous les blocs de P_1 à la fois étant complexe, nous nous limitons dans un premier temps à l'étude d'un seul bloc B de P_1 , on ne considère alors que les blocs A_i qui intersectent B . Nous allons construire un graphe $G(P_0, B)$ qui représente les interactions de P_0 et B . La figure 16 montre un exemple de construction.

4.1 Construction du graphe

Soit J_1, \dots, J_s les intervalles qui composent B (il y a donc $s - 1$ oreilles dans B). Nous choisissons de numéroter les blocs A_i de P_0 et les intervalles B_j de B dans l'ordre croissant de leur plus petit élément. Nous construisons d'abord un graphe biparti $H(P_0, B) = (A \cup J, E_H)$, où $A = \{a_1, \dots, a_k\}$, avec a_i qui représente le bloc A_i et $J = \{j_1, \dots, j_s\}$, avec j_l qui représente le bloc J_l . Il y a une arête (a_i, j_l) dans E_H si $A_i \cap J_l \neq \emptyset$.

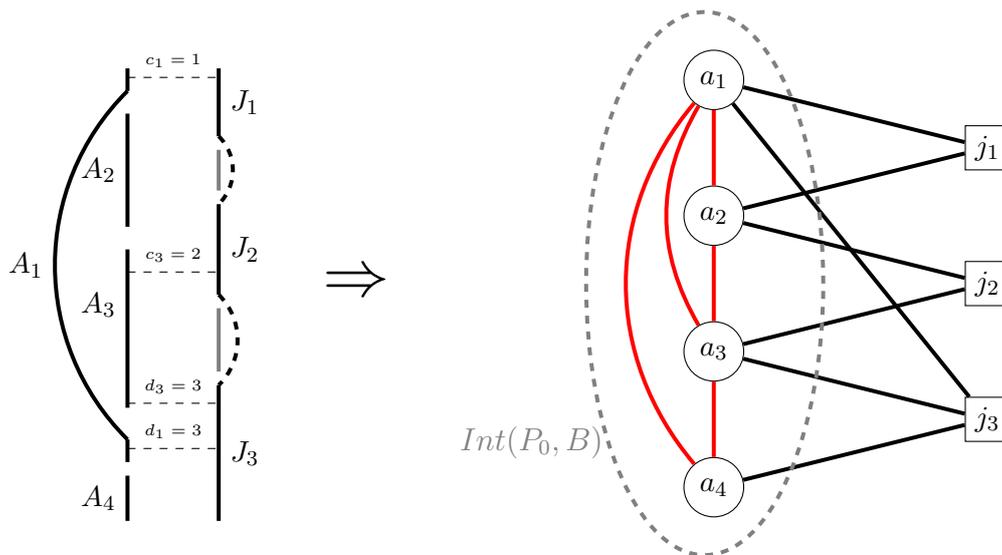


FIGURE 16 – Exemple de construction du graphe

Tous les graphes bipartis ne peuvent pas être atteints par une telle construction : la structure de partition non croisée impose certaines contraintes. Celles-ci sont difficiles à exprimer en termes de sommets. Aussi nous ajoutons des liens entre les sommets a_i pour exprimer leurs interactions. Pour chaque bloc A_i de P_0 , nous notons $c_i = \min\{l | A_i \cap J_l \neq \emptyset\}$ et $d_i = \max\{l | A_i \cap J_l \neq \emptyset\}$. Cela nous définit pour chaque bloc A_i un intervalle $[c_i, d_i]$. Soit $Int(P_0, B)$ le graphe d'intersection de la famille d'intervalles $([c_i, d_i])_{1 \leq i \leq k}$.

Nous définissons le graphe $G_{P_0, B}$ de la manière suivante :

- les sommets de $G_{P_0, B}$ sont ceux de $H(P_0, B) : A \cup J$,
- le graphe induit par les sommets a_1, \dots, a_k est exactement le graphe $Int(P_0, B)$ où le sommet a_i est identifié à l'intervalle $[c_i, d_i]$,
- le graphe induit par les sommets j_1, \dots, j_s est un stable,
- a_i est relié à J_l si $A_i \cap B_l \neq \emptyset$.

Nous donnons quelques propriétés que doit vérifier ce graphe :

1. si a_i et a_j ont un voisin commun dans J alors (a_i, a_j) est une arête de $Int(P_0, B)$,
2. a_i et a_j ne peuvent avoir plus de deux sommets communs dans J ,
3. si a_i et a_j ont exactement deux voisins communs dans J , alors, si $i < j$, $A_j \subset conv(A_i)$, en particulier, tout voisin de a_j dans $Int(P_0, B)$ est voisin de a_i ,
4. si on note p_i le plus petit indice d'un voisin de a_i dans J , alors si $i < j$, $p_i \leq p_j$

Nous ne savons pas si ces conditions sont suffisantes.

4.2 Structure de $Int(P_0, B)$

Dans cette partie, nous essayons de caractériser le graphe $Int(P_0, B)$.

$Int(P_0, B)$ est un graphe d'intervalle, mais tous les graphes d'intervalles ne sont pas atteints par cette construction. En effet, nous avons la contrainte suivante, dûe au fait que nous travaillons avec des partitions non croisées : on ne peut avoir deux intervalles vérifiant $c_i < c_j < d_i < d_j$. Cela impliquerait que les blocs A_i et A_j se croisent. Nous voulons caractériser les graphes des familles d'intervalles $(I_i) = [c_i, d_i]$ telles que pour aucun couple (i, j) , $c_i < c_j < d_i < d_j$. Dans la figure 17 nous avons un exemple d'une famille d'intervalles où les deux intervalles I_1 et I_2 vérifient $c_i < c_j < d_i < d_j$. Le graphe d'intersection de cette famille est le graphe H_1 de la figure 18. En fait, toutes les familles d'intervalles qui ont ce graphe comme graphe d'intersection vérifieront $c_i < c_j < d_i < d_j$ pour au moins deux intervalles. Deux autres graphes à 6 sommets possèdent cette propriété, ce sont les graphes H_2 et H_3 de la figure 18.

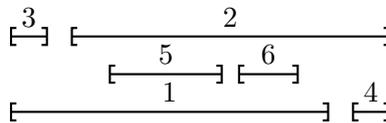


FIGURE 17 – Configuration interdite pour les intervalles

Ce sont en fait les plus petits :

Lemme 2. Soit G un graphe d'intervalles.

Alors G contient (en terme de graphe induit) H_1 , H_2 ou H_3 si et seulement si pour toute famille $(I_i = [c_i, d_i])$ d'intervalles dont le graphe d'intersection est isomorphe à G , il existe i et j tels que $c_i < c_j < d_i < d_j$.

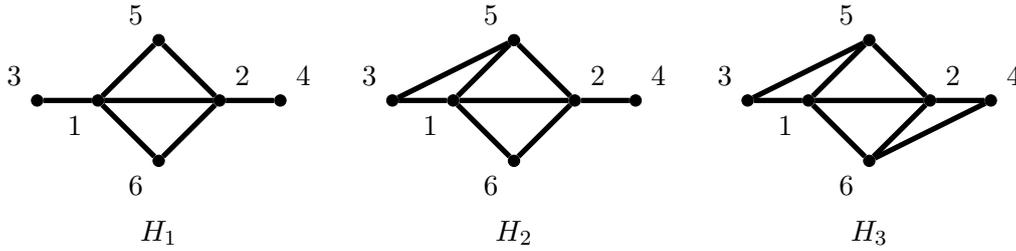


FIGURE 18 – Graphe Interdits

Démonstration. Supposons que G contienne H_1 comme graphe induit et soit $(I_i = [c_i, d_i])$ une famille d'intervalles dont le graphe d'intersection est G . Soient 1, 2, 3, 4, 5, 6 les sommets de G qui induisent H_1 (numérotés comme sur la figure 18). Au sommet 1 (resp. 2, 3, ...) correspond un intervalle que l'on note I_1 (resp. I_2, I_3, \dots).

Sans perte de généralités, on peut supposer que I_1 commence avant I_2 . Alors I_4 s'intersecte avec I_2 après la fin de I_1 et I_1 s'intersecte avec I_3 avant le début de I_2 . On a donc l'inégalité $d_1 < c_4 \leq d_2$ car I_1 et I_4 ne s'intersectent pas et que I_2 et I_4 s'intersectent, donc $d_1 < d_2$. De la même manière, $c_1 \leq d_3 < c_2$ donc $c_1 < c_2$.

Sans perte de généralités, on peut supposer que I_5 commence avant I_6 . On a alors $c_2 \leq d_5 < c_6 \leq d_1$.

Finalement $c_1 < c_2 < d_1 < d_2$. Les intervalles I_1 et I_2 vérifient la propriété.

Nous raisonnons de la même manière pour les cas où G contient H_2 ou H_3 .

Réciproquement, supposons que pour toute famille d'intervalles $(I_i) = ([c_i, d_i])$ dont le graphe d'intersection est G , il existe i et j tels que $c_i < c_j < d_i < d_j$. Nous appellerons un tel couple (i, j) un *conflit*.

Soit (I_i) une famille ayant pour graphe d'intersection G qui minimise le nombre de conflits. Elle possède au moins un conflit, on peut supposer que c'est sur le couple $(1, 2)$. Alors il existe un intervalle I_3 , différent de I_1 et I_2 , tel que $c_1 \leq d_3 < c_2$. En effet, sinon la famille d'intervalles I' définie par $I'_i = I_i$ si $i \neq 2$ et $I'_2 = [c_1, d_2]$ (on allonge l'intervalle I_2 jusqu'au début de I_1), a comme graphe d'intersection G (les voisins de I'_2 et I_2 sont les mêmes). Or I' a un conflit de moins que I , ce qui contredit la minimalité de I .

De même, il existe un intervalle I_4 , différent de I_1, I_2 et I_3 , tel que $d_1 < c_4 \leq d_2$ et un intervalle I_5 tel que $c_2 \leq d_5 \leq d_1$. On choisit I_5 de manière à minimiser d_5 .

Enfin, il existe un intervalle I_6 tel que $c_2 \leq d_5 < c_6 \leq d_1$. Sinon la famille I' définie par $I'_i = I_i$ si $i \neq 1, 2$ et $I'_1 = [c_1, d_5]$, $I'_2 = [d_5, d_2]$ a pour graphe d'intersection G . En effet, $I'_1 \cap I_j = \emptyset \Leftrightarrow I_1 \cap I_j = \emptyset$ car aucun intervalle ne débute entre d_5 et d_1 et $I'_2 \cap I_j = \emptyset \Leftrightarrow I_2 \cap I_j = \emptyset$ car on a choisi I_5 pour minimiser d_5 donc aucun intervalle ne finit entre c_2 et d_5 . I' ayant un conflit de moins que I , on obtient une contradiction.

Nous avons donc 6 intervalles dont le graphe d'intersection est H_1, H_2 ou H_3 , ce qui termine la preuve. \square

Ce lemme a pour conséquence directe :

Corollaire 1. *Int(P_0, B) est un graphe d'intervalles ne possédant aucun des H_i comme graphe induit*

Le théorème suivant donne une idée de la structure des graphes d'intervalles sans H_1, H_2 ou H_3 , donc en particulier de $Int(P_0, B)$.

Théorème 4. Soit G un graphe d'intervalles sans H_1, H_2 ou H_3 . Alors

- soit G est sans dart \diamondleftarrow ni gem \diamondrightarrow ,
- soit G possède un dart ou un gem et alors G est comme dans la figure 19. Plus précisément, G se décompose en :
 1. une clique A ,
 2. un sous-graphe B connexe, dont tous les sommets sont connectés à tous les sommets de A ,
 3. un sous-graphe C , non nécessairement connexe, où tous les sommets sont connectés à tous les sommets de A mais à aucun élément de B ,
 4. les autres voisins de A induisent un sous-graphe D , non nécessairement connexe, les voisinages des sommets de D dans A sont comparables, un sommet de D ne peut être à la fois relié à B et C , ni à deux composantes connexes différentes de C
 5. il existe une partie non vide de A , A_0 qui n'est reliée à aucun sommet de D ,
 6. les éléments de B qui ont des voisins dans D ne peuvent avoir d'autres voisins que ceux de A et D ,
 7. les autres sommets ne peuvent être voisins qu'avec un seul des ensembles B, C ou D .

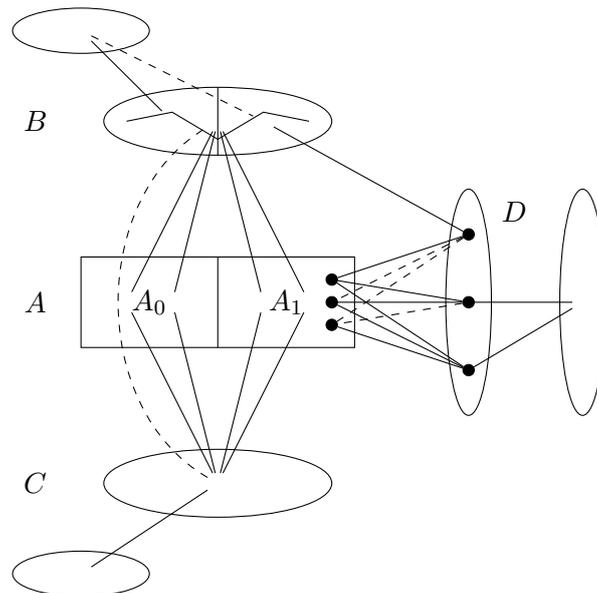


FIGURE 19 – Structure de $Int(P_0, B)$

Les graphes parfaits sans dart \diamondleftarrow ni gem \diamondrightarrow sont connus dans la littérature (voir [11]) sous le nom de graphes strictement cordaux. Ce sont des arbres ou chaque sommet est remplacé par une clique, et deux cliques voisines ont tous leurs sommets reliés entre eux.

Démonstration. Soit G un graphe d'intervalles sans H_1, H_2 ou H_3 . Supposons donc que G a un dart.

Soit A la plus grande clique telle qu'il existe deux ensembles B', C' non vides vérifiant :

- tous les sommets de A sont reliés à tous les sommets de B' et à tous les sommets de C' ,
- aucun sommet de B n'est relié à un sommet de C' ,
- il existe un sommet voisin d de A qui n'est ni dans B' ni dans C' .

Le dart nous assure l'existence de A de cardinal 2, donc la construction est possible. On choisit alors B et C de manière à maximiser la somme des cardinaux. On peut déplacer une composante connexe de B dans C en respectant les mêmes règles, on peut donc choisir B connexe. Soit D l'ensemble des éléments voisins de A qui ne sont ni dans B' ni dans C' .

Les points 1, 2, 3 du théorème sont alors assurés.

Montrons le point 4 : les voisinages des sommets de D dans A sont comparables : c'est-à-dire que pour tous sommets d_1, d_2 de D , $\Gamma_{|A}(d_1) \subset \Gamma_{|A}(d_2)$ ou $\Gamma_{|A}(d_2) \subset \Gamma_{|A}(d_1)$.

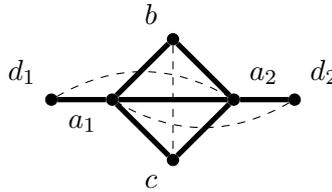


FIGURE 20 – Les sommets de D sont à voisinage comparable dans A

Soient d_1 et d_2 deux sommets de D . Supposons que l'on n'ait ni $\Gamma_{|A}(d_1) \subset \Gamma_{|A}(d_2)$, ni $\Gamma_{|A}(d_2) \subset \Gamma_{|A}(d_1)$, alors il existe deux sommets a_1 et a_2 de A tels que d_1 soit un voisin de a_1 mais pas de a_2 et d_2 soit un voisin de a_2 mais pas de a_1 (voir la figure 20, les arêtes en pointillés signifiant que les deux sommets ne sont pas voisins). Il existe aussi deux sommets b et c de B et C respectivement qui sont voisins de a_1 et a_2 .

On peut ajouter 4 arêtes à ce graphe : les arêtes entre un sommet a_i et b ou c . Mais quelque soit l'ensemble d'arêtes que l'on ajoute, on obtient un graphe interdit : si on ajoute rien, on obtient H_1 , si on ajoute une arête, on obtient H_2 , si on ajoute deux arêtes du même côté, on obtient un C_4 , qui est interdit car G_0 est un graphe d'intervalle, et enfin si on ajoute une arête de chaque côté, on obtient ou bien H_3 ou bien un trampoline ∇ qui est aussi interdit pour les graphes d'intervalles.

On peut donc ordonner les sommets d_1, \dots, d_s de D de manière à avoir : si $i < j$, $\Gamma_{|A}(d_i) \subset \Gamma_{|A}(d_j)$. $\Gamma_{|A}(d_s) \neq A$, sinon on aurait pu ajouter le sommet d_s à A, B ou C . Donc il existe un ensemble non vide $A_0 = A \setminus \Gamma_{|A}(d_s)$ qui n'a aucun voisin hormis dans B et C . On note A_1 les sommets de A qui ont un voisin dans D .

Cela prouve les points 4 et 5.

Enfin, un sommet b de B ne peut être à la fois relié à D et à un sommet x hors A, B, C, D , car cela formerait un H_2 ou un H_3 .

Le dernier est assuré par l'interdiction d'avoir des cycles de taille plus grande que 4. \square

Nous devrions pouvoir poursuivre cette étude structurelle et aboutir au moins à une description complète de ces graphes. Cependant, pour énumérer les transferts ou simplement compter le nombre de tels graphes, cela ne suffit pas. Une autre représentation serait peut-être plus adaptée.

5 Variantes avec les cliques

Devant les problèmes rencontrés pour traiter le cas de la grille rectangulaire, nous avons cherché une variante du problème plus simple qui nous permettrait peut-être de résoudre le problème initial.

La méthode utilisée pour compter le nombre d'arbres couvrants peut se généraliser très facilement à tous les graphes de la forme $G \times P_m$. Il faut de la même manière calculer une matrice A de transfert, indicée par les partitions sur $n = |G|$ éléments, qui indique le nombre de manière de passer d'une forêt consistante qui a comme trace (avec la même définition de consistante et trace) une partition P_0 des sommets de G , à une forêt consistante qui a comme trace une partition P_1 . La seule chose qui change sont les arêtes du transfert que l'on doit ajouter : les arêtes que l'on peut ajouter sont d'une part n arêtes horizontales, et d'autres parts $|E(G)|$ arêtes "verticales".

Ce qui complique le calcul pour $G = P_n$ est la structure ordonnée de P_n : un sommet de la colonne ne peut être voisin qu'avec le sommet d'en dessous et d'au dessus. Nous devons alors travailler avec des partitions non croisées.

Pour parer à cela, nous avons travaillé avec le graphe complet $G = K_n$. Une colonne n'est désormais plus un chemin mais une clique.

5.1 Ce qui change

Toutes les partitions de \mathcal{P}_n peuvent maintenant être la trace d'une forêt consistante. De plus, on peut choisir d'ordonner les sommets comme cela nous arrange, ainsi, toutes les partitions d'un même type jouent le même rôle. Pour P et Q deux partitions de même type, il y a autant de forêts couvrantes consistantes avec P qu'avec Q puisque l'ordre des sommets n'intervient pas. On peut donc indexer la matrice A par le type des partitions. $a_{y,x}$ désigne désormais le nombre de façon d'obtenir une partition fixée de type y à partir d'une partition quelconque de type x . La matrice est donc sensiblement plus petite. La récurrence pour le nombre d'arbres couvrants de $K_n \times P_m$ est donc au plus d'ordre le nombre de types différents.

D'autres choses changent : dans le cas précédent, sur la nouvelle colonne, on ne pouvait relier que des voisins $i(i+1)$, E^V ne contenait que ces $n-1$ arêtes. Cela nous permettait de diviser en sous cas en fonction de la partition P_0 . Maintenant $E^V = E(K_n)$: on peut ajouter n'importe quelle arête sur la nouvelle colonne. On ne peut donc plus utiliser la division selon la partition P_0 car les deux parties que l'on sépare peuvent interagir. Par contre, on peut toujours diviser selon P_1 , à condition de choisir quel bloc de P_0 va être associé à quel bloc de P_1 .

5.2 Nombre d'arbres dans la clique

Un élément qui va intervenir souvent est le nombre $t(K_n)$ d'arbres couvrants du graphe complet K_n . En effet, dès lors qu'on sait que n éléments doivent être reliés entre eux dans la dernière colonne, on a exactement $t(K_n)$ moyens de les relier sans créer de cycles. Le nombre d'arbres couvrants de K_n se calcule facilement avec le théorème de Kirschhoff vu en partie 1 (le déterminant est de taille $n-1$:

$$t(K_n) = \begin{vmatrix} n-1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & n-1 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & \dots & \dots & n-1 \end{vmatrix} = n^{n-2}$$

Ce résultat est connu sous le nom *formule de Cayley*. Nous donnons une autre preuve de ce résultat (cf. [23]) qui est plus combinatoire et qui nous aidera pour la suite. Aigner et Ziegler présentent encore d'autres preuves dans [1].

L'idée de la preuve qui suit est de compter les arbres en fonction des degrés des sommets.

Lemme 3. Soit d_1, d_2, \dots, d_n des entiers strictement positifs tels que $\sum_{i=1}^n d_i = 2n - 2$ et $d_i < n$. Soit \mathcal{A} l'ensemble des arbres à n sommets dont les v_1, \dots, v_n sont de degrés respectifs d_1, \dots, d_n . Alors :

$$|\mathcal{A}| = \frac{(n-2)!}{(d_1-1)!(d_2-1)! \cdots (d_n-1)!}$$

Démonstration. Par induction sur n . Pour $n = 2$: $d_1 = d_2 = 1$, il n'y a qu'un seul arbre, le lemme est vrai.

Supposons le résultat vrai pour $n - 1$. Un des degrés est égal à 1, on peut supposer que $d_n = 1$. Soit \mathcal{B}_i l'ensemble des arbres à $n - 1$ sommets v_1, \dots, v_{n-1} tels que v_j soit de degré d_j si $j \neq i$ et de degré $d_j - 1$ si $j = i$. Les arbres de \mathcal{B}_i sont les arbres de \mathcal{A} qui ont comme arête (v_i, v_n) . Cela est possible si $d_i > 1$. Pour $d_i = 1$, $\mathcal{B}_i = \emptyset$. Nous avons donc :

$$|\mathcal{A}| = \sum_{i=1}^{n-1} |\mathcal{B}_i|$$

Par hypothèse de récurrence, si $d_i > 1$,

$$|\mathcal{B}_i| = \frac{(n-3)!}{(d_1-1)! \cdots (d_i-2)! \cdots (d_{n-1}-1)!}$$

Sinon, $|\mathcal{B}_i| = 0$. On a donc, dans tous les cas :

$$|\mathcal{B}_i| = \frac{(n-3)!(d_i-1)}{(d_1-1)! \cdots (d_{n-1}-1)!}$$

Calculons maintenant $|\mathcal{A}|$:

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}| &= \sum_{i=1}^{n-1} |\mathcal{B}_i| \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(n-3)!(d_i-1)}{(d_1-1)! \cdots (d_{n-1}-1)!} \\ &= \frac{(n-3)!}{(d_1-1)! \cdots (d_{n-1}-1)!} \sum_{i=1}^{n-1} (d_i-1) \\ &= \frac{(n-3)!}{(d_1-1)! \cdots (d_n-1)!} (n-2) \\ &= \frac{(n-2)!}{(d_1-1)! \cdots (d_n-1)!} \end{aligned}$$

□

Pour calculer, $t(K_n)$ il faut sommer sur tous les degrés possibles :

$$\begin{aligned}
 |T_{K_n}| &= \sum_{d_1+d_2+\dots+d_n=2n-2, d_i>0} \frac{(n-2)!}{(d_1-1)! \dots (d_n-1)!} \\
 &= \sum_{k_1+k_2+\dots+k_n=n-2, k_i \leq 0} \frac{(n-2)!}{k_1! \dots k_n!} \\
 &= n^{n-2}
 \end{aligned}$$

La dernière ligne s’obtenant en utilisant la formule multinomiale.

5.3 Petites matrices

Nous avons pu calculer à la main les matrices pour 2, 3 et 4 lignes. Pour deux lignes, la matrice est la même que pour les grilles classiques : $P_2 = K_2$.

Pour trois et quatre lignes, nous choisissons un type y pour P_1 et nous nous fixons une partition de P_1 avec ce type. Nous calculons alors pour chaque partition P_0 (et non pas chaque type) de combien de manière on peut passer de P_0 à P_1 . Pour avoir la matrice A indiquée par les types, il faut sommer sur chaque ligne les coefficients correspondant aux partitions de même type x .

Pour trois lignes, cela donne :

$P_1 \setminus P_0$	\emptyset	12/3	13/2	1/23	I_3
\emptyset	1	2	2	2	3
12/3	1	3	2	2	4
I_3	3	8	8	8	16

 $\Rightarrow A_3 = \begin{matrix} y \setminus x & (1, 1, 1) & (2, 1) & (3) \\ (1, 1, 1) & \begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 1 & 7 & 4 \\ 3 & 24 & 16 \end{pmatrix} \\ (2, 1) & \\ (3) & \end{matrix}$

Par exemple, pour la partition 12/3 de type $y = (2, 1)$, il y a trois partitions de type $(2, 1)$ à traiter. On obtient 3, 2 et 2 manières d’avoir 12/3 en partant d’une partition de type $x = (2, 1)$ suivant les partitions. Il y a donc en tout 7 manières d’avoir une partition de type $(2, 1)$ à partir d’une partition de type $(2, 1)$.

Pour quatres lignes, on obtient de la même manière la matrice suivante :

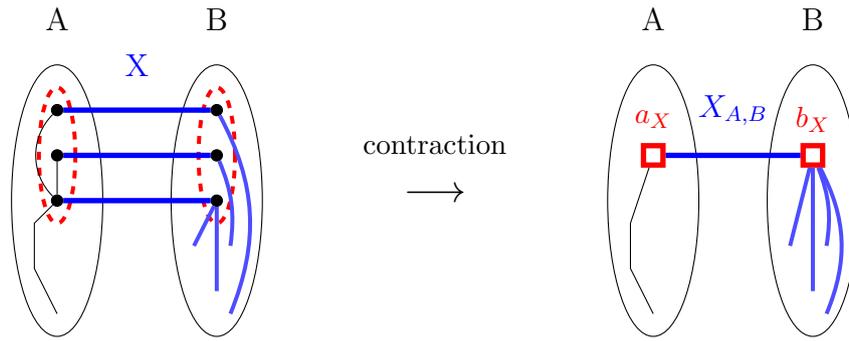
$$A_4 = \begin{matrix} y \setminus x & (1, \dots, 1) & (2, 1, 1) & (3, 1) & (2, 2) & (4) \\ (1, \dots, 1) & \begin{pmatrix} 1 & 12 & 12 & 12 & 4 \\ 1 & 13 & 14 & 13 & 5 \\ 3 & 42 & 46 & 42 & 17 \\ 1 & 14 & 16 & 17 & 6 \\ 16 & 240 & 300 & 300 & 125 \end{pmatrix} \\ (2, 1, 1) & \\ (3, 1) & \\ (2, 2) & \\ (4) & \end{matrix}$$

Nous cherchons maintenant une méthode générale pour calculer les coefficients des matrices de taille quelconque.

5.4 Contraction de sommets

Pour calculer les coefficients, nous allons *contracter* les sommets d’un même bloc qui sont reliés horizontalement à P_1 .

Soit X un transfert de P_0 à P_1 . Soient A et B deux blocs de P_0 et P_1 respectivement tels que A est associé à B . Soit k le nombre d’arêtes horizontales de X entre A et B .

FIGURE 21 – Contraction des arêtes horizontales d'un transfert X entre A et B

On contracte les k sommets de A et les k sommets de B touchés par ces arêtes en deux sommets a_X et b_X .

On obtient alors un transfert $X_{A,B}$ entre P'_0 et P'_1 où les deux partitions sont les partitions P_0 et P_0 avec les k sommets de A (resp. B) sont remplacés par a_X et b_X .

Combien de transfert X ont la même image par cette opération de contraction ? Il est plus simple de regarder combien d'antécédents $X_{A,B}$ peut avoir. Les arêtes horizontales d'un antécédent sont toutes fixées (ce sont celles de $X_{A,B}$ et les k arêtes entre les sommets contractés). Pour les arêtes verticales, les seules arêtes à choisir sont celles entre les sommets contractés, donc celles qui ont pour extrémité b_X . Développons le sommet b_X . Si b_X est de degré d dans la dernière colonne, alors chacune des d arêtes verticales touchant b_X a k extrémités possibles dans un antécédent : les k sommets qui ont été contractés. De plus, les sommets contractés n'ont aucune arête entre eux, sinon il y aurait un cycle. Finalement, $X_{A,B}$ a k^d antécédents, où d est le degré de b_X .

5.5 Calcul des coefficients

Nous allons avec cette méthode calculer les coefficients de la forme $a_{(n),x}$. P_1 est la partition I_n , et peu importe quelle partition l'on choisit pour P_0 puisqu'on peut choisir de mettre les sommets dans n'importe quel ordre. Pour simplifier, nous choisissons donc comme partition pour P_0 la partition $1 \dots x_1 / (x_1 + 1) \dots (x_1 + x_2) / \dots$ (les x_1 premiers éléments forment un même bloc, les x_2 suivants forment le deuxième bloc...). Nous allons d'abord calculer pour cette partition de combien de manières l'on peut passer à I_n . Pour avoir le coefficient final, il faudra donc multiplier par le nombre de partitions de type x .

Dans ce cas particulier, tous les blocs de P_0 sont nécessairement associés à l'unique bloc constitué de tous les éléments de P_1 . Soit X un transfert entre P_0 et I_n . Notons n_1, \dots, n_k les nombres d'arêtes horizontales de X entre le bloc A_k et I_n . Après k contractions (une pour chaque bloc), on obtient un transfert X_{cont} sur des partitions avec $n' = n - \sum_i n_i + k$ sommets de chaque côté. Le transfert X_{cont} obtenu a k arêtes horizontales, une par bloc. Comme la partition que l'on obtient à droite est $I_{n'}$, tous les sommets sont reliés entre eux par les arêtes de X_{cont}^V . Ainsi, X_{cont}^V est un arbre couvrant. Notons d_1, \dots, d_k les degrés des k sommets contractés dans l'arbre créé par les arêtes de X_{cont}^V .

Le nombre d'antécédents de X_{cont} avec exactement n_1 (resp. n_2, \dots, n_k) arêtes horizontales entre A_1 (resp. A_2, \dots, A_k) et B est $\prod_{i=1}^k (n_i)^{d_i}$.

Pour calculer le nombre $T(x, n_1, \dots, n_k)$ de transferts avec exactement n_1 (resp. n_2, \dots, n_k) arêtes horizontales fixées entre A_1 (resp. A_2, \dots, A_k) et B il faut donc sommer sur tous

les X_{cont} possibles, c'est-à-dire sur tous les arbres couvrants possibles à $n' = n - \sum_i n_i + k$ sommets.

On peut regrouper ces arbres par les degrés de leurs sommets que l'on note d_1, \dots, d_k pour les k sommets contractés et $d_{k+1}, \dots, d_{n'}$ pour les derniers. D'après la preuve de la formule de Cayley donnée en partie 5.2, le nombre d'arbres couvrants à n' sommets ayant comme degrés $d_1, \dots, d_{n'}$ est $\frac{(n'-2)!}{(d_1-1)!(d_2-1)! \dots (d_{n'}-1)!}$

On a donc (on pose $n_i = 1$ pour $i > k$ pour simplifier les calculs) :

$$\begin{aligned}
T(x, n_1, \dots, n_k) &= \sum_{\substack{d_i=2n'-2 \\ d_i > 0}} \frac{(n'-2)!}{(d_1-1)!(d_2-1)! \dots (d_{n'}-1)!} \times \prod_{i=1}^{n'} (n_i)^{d_i} \\
&= \sum_{\substack{l_i=n'-2 \\ l_i \geq 0}} (n'-2)! \prod_{i=1}^{n'} \frac{(n_i)^{l_i+1}}{l_i!} \\
&= \prod_{i=1}^{n'} n_i \times \left(\sum_{i=1}^{n'} n_i \right)^{n'-2} \\
&= \prod_{i=1}^k n_i \times n^{n - \sum_{i=1}^k n_i + k - 2}
\end{aligned}$$

Pour compter le nombre $T(x, P_0)$ de transferts possibles d'une partition P_0 de type x fixée à I_n , il ne reste plus qu'à sommer sur les n_i possibles. Pour n_1, \dots, n_k donnés, il y a $\prod_{i=1}^k \binom{x_i}{n_i}$ façons de choisir les arêtes horizontales :

$$\begin{aligned}
T(x, P_0) &= \sum_{\substack{n_1, \dots, n_k \\ 1 \leq n_i \leq x_i}} \prod_{i=1}^k \binom{x_i}{n_i} \prod_{i=1}^k n_i \times n^{n - \sum_{i=1}^k n_i + k - 2} \\
&= n^{n-2} \prod_{i=1}^k x_i \left(\sum_{n_i=1}^{x_i} \binom{x_i-1}{n_i-1} \frac{1}{n} \right)^{n_i-1} \\
&= n^{n-2} \prod_{i=1}^k x_i \left(\frac{1}{n} + 1 \right)^{x_i-1} \\
&= n^{k-2} (n+1)^{n-k} \prod_{i=1}^k x_i
\end{aligned}$$

Pour obtenir le coefficient $a_{I_n, x}$ il ne reste plus qu'à multiplier par le nombre de partitions de type x . On préfère alors la notation λ , et on a :

$$a_{I_n, x} = \frac{n! n^{\sum \lambda_i - 2} (n+1)^{n - \sum \lambda_i}}{\prod (i-1)!^{\lambda_i} \lambda_i!}$$

Nous pouvons employer la même méthode pour calculer les autres coefficients. Cependant, comme $P_1 \neq I_n$, il va falloir "choisir" quel bloc A de P_0 va être associé à quel bloc

de P_1 . Soit x et y de type de partitions à n éléments. On fixe P_1 une partition quelconque de type y et on fait varier la partition P_0 de type x . Pour calculer $a_{y,x}$, on peut alors d'abord commencer par fixer une application $\sigma : [1..k] \rightarrow [1..k']$ signifiant que le bloc A_i de P_0 est associé au bloc $B_{\sigma(i)}$ de P_1 . Un autre élément à prendre en compte est comment les blocs s'en positionner deux à deux. Une fois σ fixée, ce qui va entrer en compte est l'intersection des blocs A_i et $B_{\sigma(i)}$. On fixe donc $z_i = |A_i \cap B_{\sigma(i)}|$. Pour une partition P_0 vérifiant $z_i = |A_i \cap B_{\sigma(i)}|$, on calcule avec la même méthode que précédemment le nombre de transferts où A_i est associé à $B_{\sigma(i)}$. Nous obtenons :

$$T(x, y, \sigma, z) = \prod_{i=1}^{k'} y_j^{y_j-2} \prod_{i=1}^k z_i \left(\frac{1}{y_{\sigma(i)}} + 1 \right)^{z_i-1}$$

Nous avons alors une formule pour $a_{y,x}$:

$$a_{y,x} = \sum_{\sigma \in [1..k]^{[1..k']}} \sum_{\substack{z \\ 1 \leq z_i \leq \min(x_i, y_{\sigma(i)}) \\ \sum z_i \leq y_i}} N(x, y, \sigma, z) T(x, y, \sigma, z)$$

où $N(x, y, \sigma, z)$ est le nombre de partitions P_0 à n éléments de type x vérifiant $z_i = |A_i \cap B_{\sigma(i)}|$. Il n'est pas facile d'exprimer ce nombre est donc d'obtenir une formule plus simple pour les coefficients. Pour arriver à exprimer une formule de récurrence pour $t_n(m)$, il faudrait trouver des propriétés sur N et T nous permettant des simplifications, cela passe d'abord par calculer N .

6 Arbres couvrants avec les feuilles fixées

Dans cette dernière partie, nous nous intéressons à un autre problème (LTP) : étant donné un graphe de grille G et un sous-ensemble L de sommets de G , existe-t-il un arbre couvrant G dont l'ensemble des feuilles est exactement L ? On notera (G, L) une instance du problème et $k = |L|$.

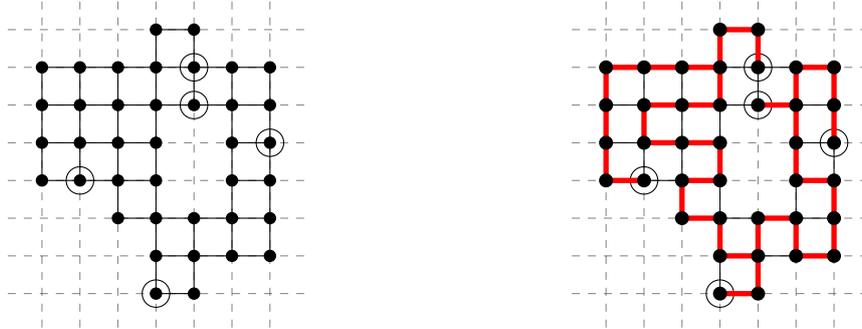


FIGURE 22 – Instance d'un problème et une de ses solutions, les sommets de L sont les sommets entourés

Lorsque L ne contient que deux éléments, il s'agit de trouver un chemin hamiltonien entre deux extrémités fixées. Ce problème a été étudié par Itai, Papadimitriou et Szwarcfiter dans [10]. Ils montrent que ce problème est NP-complet. Cela implique que LTP est NP-complet. Nous montrons que la variante k -LTP où la taille de l'ensemble L est fixée à k est aussi NP-complète.

Il est donc intéressant de se restreindre à des classes de graphe de grille pour lesquelles le problème pourrait être polynomial. Nous étudions ainsi le problème sur les grilles rectangulaires. Lors de précédents travaux [16] nous avons établi une condition nécessaire et suffisante pour L contenant 3 sommets sur des grilles rectangulaires.

Dans un premier temps, nous rappelons les résultats déjà connus, qui sont issus principalement de [10] et de [16]. Ensuite, nous donnons une condition suffisante pour des grilles de plus grande dimension.

6.1 Résultats connus

Complexité

Théorème 5 ([10, 8]). *Pour tout entier $k \geq 2$, k -LTP est NP-complet.*

Le théorème pour $k = 2$ est montré dans [10]. Pour k quelconque, on montre que 2-LTP se réduit à k -LTP en utilisant le gadget de la figure 23.

Conditions nécessaires

On peut tout de même trouver des conditions nécessaires pour l'existence d'un arbre. La figure 24 montre des cas interdits et qui illustrent les conditions nécessaires.

Condition de coloration. La première est directement due au fait que la grille infinie est un graphe biparti. On peut donc colorier les sommets en deux couleurs à la manière d'un échiquier. Sans perte de généralité, la couleur majoritaire s'il y en a une est le noir, l'autre

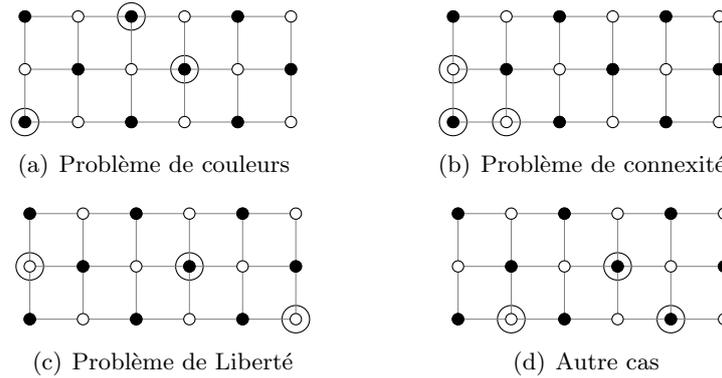


FIGURE 24 – Cas non résolubles

Cas interdits.

Ces conditions nécessaires sont valables pour n'importe quels graphes de grille. Elles ne sont pas suffisantes (voir le cas de la figure 24(d)), même pour des grilles rectangulaires de dimension 2. Nous listons ici les instances sans solution qui vérifient les conditions nécessaires que l'on a rencontrées pour des rectangles de dimension 2.

Dans la suite G désigne la grille rectangulaire $G_n(m)$. L est un ensemble de k sommets de G et on fixe le coin $(1, 1)$ de couleur noire. La figure 25 illustre les différents cas.

Les instances suivantes sont dites *interdites* :

- I1** : $n = 3$, $m \geq 6$ est pair, L a exactement un sommet blanc, a . Si $a_1 = 2$ alors $\forall b \in L, b_1 > a_1$ (cas I1 - a), sinon $\forall b \in L, b_1 > a_1 + 1$ (cas I1 - b),
- I2** : n, m pair, L contient tous les sommets noirs de la première ligne et de la première colonne, sauf le coin $(1, 1)$, et L ne contient aucun autre sommet de cette ligne et de cette colonne. Ou n est impair et m est pair et L contient tous les sommets noirs de la première et de la dernière colonne et de la première ligne sauf les coins $(1, 1)$ et $(1, n)$, et aucun autre sommets sur ces lignes et colonnes.
- I3** : $L = \{a, b, c\}$, $n = 3$, m est impair, a est blanc, b et c sont noirs, $a_1 = b_1 + 1 = c_1 - 1$, $b_2 = c_2 = 1$, $a_2 = 3$

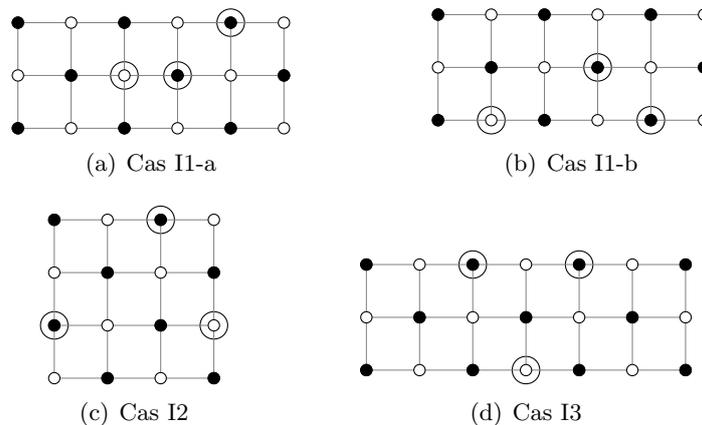


FIGURE 25 – Cas interdits

Lemme 8 ([16]). *Si une instance est isomorphe a une instance interdite, alors elle n'a pas de solution*

Les preuves se font principalement par étude de cas sur les arêtes d'une coupe qui appartiennent ou non à l'arbre.

Cas résolus

Le théorème suivant nous dit que ce sont les seuls cas interdits lorsque L contient 2 ou 3 sommets :

Théorème 6 ([10, 16]). *Soit G une grille rectangulaire de dimension 2 et L un sous-ensemble de 2 ou 3 sommets de G . (G, L) est résoluble si et seulement si (G, L) satisfait les conditions nécessaires et si ce n'est pas un cas interdit.*

Pour montrer ce théorème, nous utilisons un lemme de division qui permet de séparer une instance en deux instances plus petites, et l'on montre que les instances qui ne sont pas divisibles sont soit des cas interdits soit résolubles directement.

Pour L contenant plus de sommets, le problème reste ouvert. La méthode utilisée amène déjà à une étude de cas fastidieuse et ne semble donc pas adéquate pour résoudre ce problème.

6.2 En plus grande dimension

Les conditions de connexité et de liberté sont difficiles à satisfaire lorsque l'on cherche à diviser une grille en grilles plus petites, alors que la condition de coloration ne dépend pas de la position précise des points, mais seulement de leur couleur, qui ne change pas lorsqu'on réduit la grille.

Aussi cherche-t-on des cas où la condition de coloration est suffisante. Ce n'est pas le cas en dimension 2, mais dans d'autres dimensions ?

On peut généraliser la définition des grilles à des dimensions plus grandes. On se place alors dans la grille infinie de dimension d dont les sommets sont ceux de \mathbf{Z}^d et les arêtes sont entre les sommets à distance 1.

Un pavé ou grille rectangulaire de taille $l_1 \times \dots \times l_d$ est alors le graphe induit par les sommets x vérifiant $1 \leq x_i \leq l_i$. Certains des l_i peuvent être égaux à 1, ce qui diminue en quelque sorte la dimension du pavé. On dira qu'un pavé G est de *pleine dimension* d' si $d' = |\{l_i \neq 1\}|$. Un pavé est dit *pair* s'il a un nombre pair de sommets, *impair* sinon.

L'énoncé du problème reste le même et les conditions citées précédemment sont toujours valables. Dans [16], nous montrons le théorème suivant :

Théorème 7 ([16]). *Soit G un pavé de pleine dimension 3 et L un ensemble de deux sommets de G . Alors (G, L) a une solution si et seulement si (G, L) satisfait la condition de coloration.*

Durant le stage, nous avons généralisé ce résultat :

Théorème 8. *Soit G un pavé de pleine dimension d avec $d \geq 3$ et L un ensemble d'au plus d sommets de G . Alors (G, L) a une solution si et seulement si (G, L) satisfait la condition de coloration.*

Pour montrer ce théorème, on utilise la notion d'instance acceptable et quasi-acceptable : (G, L) est dite *acceptable* si elle satisfait la condition de coloration et si $2 \leq k \leq d$. (G, L) est dite *quasi-acceptable* si $k < d$ (avec éventuellement $k = 1$) et si elle satisfait la condition de coloration en ajoutant un autre sommet. (On a donc, si G est pair, $L_B = \emptyset$ ou $L_N = \emptyset$, et si G est impair, $|L_N| = 1$.)

Pour pouvoir faire un induction, nous allons diviser les grilles. (G_1, G_2) est une *division* d'un pavé G si G_1 et G_2 sont deux pavés et que l'union de leurs sommets est l'ensemble des sommets de G . On note alors F_1 et F_2 les faces de G_1 et G_2 qui se font face. Si x_1 est un sommet de F_1 alors il a exactement un voisin dans F_2 que l'on note x_2 . Si G est de pleine dimension d , alors F_1 et F_2 sont de pleine dimension $d - 1$. Si de plus L est un ensemble de sommets de G , on notera L_i de cardinal k_i la restriction de L aux sommets de G_i .

Le lemme de division qui suit nous permet de nous ramener à de plus petits cas :

Lemme 9 (Lemme de division). *Soit (G, L) une instance acceptable.*

(G, L) est dite réductible si on peut diviser G en (G_1, G_2) de manière à se trouver dans un des cas suivants :

- a. $L_1 = \emptyset$, G_1 est pair et (G_2, L_2) est acceptable,
- b. (G_1, L_1) est acceptable et (G_2, L_2) est quasi-acceptable,
- c. (G_1, L_1) et (G_2, L_2) sont quasi-acceptables,
- d. (G_1, L_1) et (G_2, L_2) sont acceptables,

Il existe alors L'_1 et L'_2 tels que :

- a. $L'_i = L_i$,
- b. $\exists p_2 \in F_2 - L_2$, $L'_1 = L_1$, $L'_2 = L_2 + p_2$, (G_2, L'_2) est acceptable et $p_1 \notin L_1$;
- c. $\exists p_1 \in F_1 - L_1$, $L'_1 = L_1 + p_1$, $L'_2 = L_2 + p_2$, (G_1, L'_1) et (G_2, L'_2) sont acceptables,
- d. $L'_i = L_i$,

et si les (G_i, L'_i) ont des solutions (pour $L_i \neq \emptyset$) alors (G, L) a une solution.

Pour montrer ce lemme on utilise le résultat suivant, conséquence du theoreme 7.

Lemme 10. *Si G est un pavé pair de pleine dimension $d \geq 2$, p un coin de G et q un voisin de p , alors G a un cycle hamiltonien qui contient l'arête pq .*

Preuve du lemme 9. Pour la première partie du lemme, il faut seulement montrer les cas b et c :

Cas b (première partie) : Supposons qu'il faille ajouter un sommet noir à L_2 pour le rendre acceptable. Alors il faut trouver un sommet blanc p_1 dans $F_1 - L_1$, avec $p_2 \notin F_2$, c'est-à-dire, une arête "blanc-noir" entre F_1 et F_2 sans extrémités dans L .

Si $|F_1|$ est pair, alors G_1 et G_2 sont aussi paires, il y a donc obligatoirement au moins un noir et un blanc dans L_1 et aucun noir dans L_2 . Il y a donc au plus $k - 2$ arêtes "blanc-noir" entre F_1 et F_2 qui ont une extrémité dans L . Or il y a au moins 2^{d-2} arêtes "blanc-noir" entre F_1 et F_2 , donc une est au moins sans extrémité dans L ($k - 2 \leq d - 2 < 2^{d-2}$ pour $d \geq 3$).

Si $|F_1|$ est impair, alors $|F_1| \geq 3^{d-1}$ et il y a au moins $3^{d-1}/2$ arêtes "blanc-noir" entre F_1 et F_2 . $k \leq d < 3^{d-1}/2$ donc il y a une arête libre.

Cas c (première partie) : Nous montrons dans un premier temps que l'on doit obligatoirement ajouter des sommets de couleurs opposées pour que les deux problèmes soient acceptables.

Supposons le contraire : un sommet noir est manquant de chaque côté. Si G_1 et G_2 sont paires, alors L_1 et L_2 ont seulement des sommets blancs, mais cela n'est pas possible, L ne contiendrait que des sommets blancs, et (G, L) , grille paire, ne serait pas acceptable.

Si G_1 est pair et si G_2 est impaire, alors L_1 n'a que des sommets blancs et G_2 a exactement un sommet noir. Donc L a seulement un sommet noir, cela n'est pas possible car G est impaire et (G, L) est acceptable.

Le dernier cas est G_1 et G_2 impaires, alors elles n'ont pas la même couleur majoritaire, donc on ne doit pas leur ajouter la même couleur.

On peut donc supposer qu'il faut ajouter un sommet noir à L_1 et un sommet blanc à L_2 . On cherche une arête "noir-blanc" entre F_1 et F_2 sans extrémités dans L . Si F_1 est pair G_1 et G_2 le sont aussi. Il n'y a pas de sommets noirs dans L_1 et pas de sommets blancs dans L_2 . Donc toutes les arêtes "noir-blanc" sont libres. Si F_1 est impair, il y a au moins 4 arêtes "noir-blanc" entre F_1 et F_2 et seulement deux ont des extrémités dans L .

Maintenant, on prouve la deuxième partie du lemme :

Cas a :

Soit T_2 un arbre solution pour (G_2, L_2) . Il y a 2^{d-1} coins sur F_2 , mais $k \leq d < 2^{d-1}$ (car $d > 2$, et $k \leq d$ car (G, L) est acceptable), il y a donc un coin libre p_2 dans F_2 qui n'est pas dans L_2 . Ce coin a un degré 2 dans T_2 , mais il a un seul voisin qui n'est pas dans F_2 , il y a donc une arête p_2q_2 de T_2 qui est incluse dans F_2 . Soit p_1q_1 l'arête correspondante dans F_1 . Par le lemme 10, il y a un cycle hamiltonien de G_1 qui contient p_1q_1 . On construit un arbre solution pour G en ajoutant le cycle, comme indiqué dans la Fig. 26.

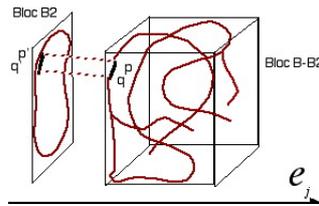


FIGURE 26 – Division avec pavé pair

Cas b et c (deuxième partie) : Pour ces deux cas, on ajoute simplement aux deux arbres solutions l'arête p_1p_2 .

Cas d : Il faut trouver une arête entre F_1 et F_2 dont aucune extrémité n'est dans L . Il y a au plus k arêtes prises par L et au moins 2^{d-1} arêtes entre les deux faces. Comme $k \leq d < 2^{d-1}$ il y a une arête libre, que l'on ajoute aux deux arbres solutions pour former un arbre pour G . □

Le lemme suivant implique directement le théorème 8

Lemme 11. *Si (G, L) est acceptable, alors elle a une solution.*

Démonstration. Nous allons montrer ce lemme par induction. Si une instance est réductible, alors par induction, elle est résoluble par le lemme 9. On montre donc que toute instance acceptable est soit réductible, soit a une solution.

Soit (G, L) une instance acceptable. On note d la pleine dimension de G et $l_1 \times \dots \times l_d$ les longueurs des côtés. On distingue les cas suivant la longueur des côtés.

Cas 1 : $\forall i, l_i > 3$

Alors on divise G en deux pavés G_1, G_2 de pleine dimension G . De plus, on peut diviser de manière à avoir G_1 et G_2 pairs si G est pair.

- Si G est pair, G_1 et G_2 sont pairs aussi. Si $L_1 = \emptyset$ alors (G_2, L_2) est acceptable G est réductible (cas a. du lemme de division). De même si $L_2 = \emptyset$. Sinon, $k_i < d$ dans chaque G_i qui sont pairs et non vide, ils sont donc acceptables ou quasi-acceptables et donc G est réductible.
- Si G est impair, on peut sans perte de généralité, supposer que G_1 est pair et que G_2 est impair. Si L_1 est vide, alors (G_2, L_2) est acceptable et G est réductible. Si $L_1 = L$ alors L_2 est vide, on peut diviser en $(G_1 + F_2, G_2 - F_2)$, et G est réductible. Sinon (G_1, L_1) est quasi-acceptable. (G_2, L_2) n'est ni acceptable ni quasi-acceptable que si L_2 a seulement des sommets de la couleur minoritaire, qui est celle de G . Mais on peut alors diviser en $(G'_1, G'_2) = (G_1 + F_2, G_2 - F_2)$. G est réductible car (G'_1, L'_1) acceptable (L'_1 contient tous les sommets de la couleur majoritaire), et (G'_2, L'_2) est soit vide soit acceptable.

Cas 2 : $\forall i, l_i \leq 3, \exists i, j, l_i = 3, l_j = 2$ et $d > 3$

On divise selon la direction e_i telle que $l_i = 3$ en trois pavés pairs de dimension $d - 1$: (G_1, G_2, G_3)

Si G_1 n'a pas de sommets de L (resp. G_3) alors G est réductible selon la division $(G_1, G_2 + G_3)$.

Sinon, il y a un sommet de L dans G_1 et un dans G_3 . Si L_1 a $d - 1$ sommets, on peut diviser le problème selon $(G_1 + G_2, G_3)$ et les sous problèmes sont acceptables ou quasi-acceptables. Si L_1 et L_3 ont strictement moins de $d - 1$ sommets alors on peut diviser selon $(G_1 + G_2, G_3)$.

Cas 3 : Hypercube Q_d : $\forall i, l_i = 2$ et $d > 3$

Supposons $k > 2$, alors il y a deux sommets de L avec la même couleur, supposons que c'est le noir. On divise alors Q_d en deux hypercubes de dimension $d - 1$ avec un sommet noir de chaque côté. De chaque côté, les instances sont acceptables ou quasi-acceptables, sinon, on aurait $d - 1$ sommets, tous noirs, dans une des parties, et donc L n'aurait que des sommets noirs. Ce n'est pas possible.

Si $k = 2$, on coupe en deux parties. Soit l'un des rectangles est pair et on applique le cas a) du lemme de division ($d > 3$ nous garantie que le problème reste acceptable). Sinon il y a un sommet dans chaque partie et les problèmes sont quasi-acceptables.

Cas 4 : Cube C_d : $\forall i, l_i = 3$ et $d > 3$

Il y a au moins deux sommets noirs dans L . On divise G en G_1, G_2 de manière à avoir un sommet noir dans chaque partie. Une des parties est isomorphe à C_{d-1} , supposons que c'est G_1 .

Dans les cas suivants :

- G_1 a deux sommets noirs
- G_1 a strictement moins de $d - 1$ sommets,

G est réductible. En effet, G_2 est pair de dimension d , non vide, et avec au plus $n - 1$ sommets, donc acceptable. G_1 est acceptable dans le premier cas, quasi-acceptable dans le deuxième car il a déjà un sommet noir.

Supposons que pour chaque division qui sépare les sommets noirs, nous ne sommes pas dans un des cas ci-dessus. Alors L a d sommets et seulement 2 noirs. La distance euclidienne entre deux sommets noirs est d'au moins 2. Si les sommets diffèrent d'une seule coordonnée, on peut couper selon cette coordonnée. (Il y a deux possibilités pour couper, dans l'une d'elle tous les sommets ne sont pas dans G_1) Donc les 2 noirs diffèrent suivant deux coordonnées, supposons que ce soit x_1 et x_2 . La situation est

alors isomorphe à l'un des deux cas suivant :

- Il y a un noir dans $(1, 1, x_3, \dots)$ et un autre dans $(2, 2, y_3, \dots)$,
- il y a un noir dans $(1, 2, x_3, \dots)$ et un autre dans $(2, 1, y_3, \dots)$.

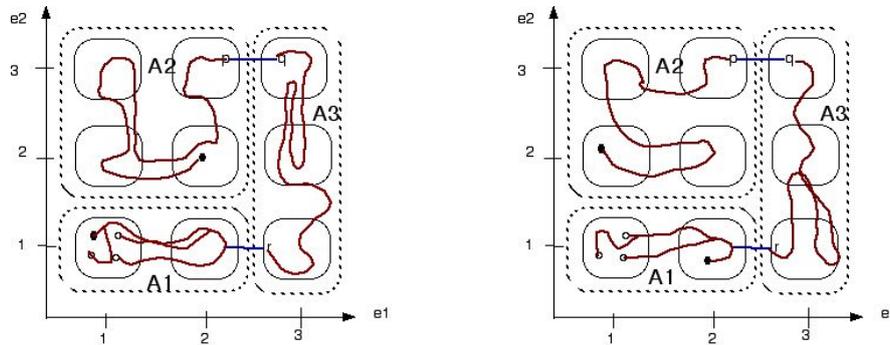


FIGURE 27 – Les deux noirs différent sur 2 coordonnées

Dans les deux cas, tous les autres sommets, qui sont blancs, ont pour coordonnées $(1, 1, \dots)$. On divise en petits pavés comme indiqués dans la figure 27. Chaque petit pavé est isomorphe à C_{d-2} . A_1 est un rectangle pair de dimension $d - 1 \geq 3$ avec $n - 1$ sommets de L avec les deux couleurs représentées. Par induction, il y a un arbre couvrant avec ces points comme feuilles. A_2 est un rectangle pair de dimension d avec un sommet noir. A_3 est un rectangle impair de dimension $d - 1$. On ajoute à L un sommet q qui est un coin de A_3 relié à A_2 , p son voisin dans A_2 , r un coin de A_3 relié à A_1 et \bar{r} son voisin dans A_1 . Alors q et r sont noirs, p et r' sont blancs, et, par induction, il y a un chemin hamiltonien dans A_3 entre q et r et un chemin hamiltonien dans A_2 entre le sommet noir et p . On obtient les solutions finales en ajoutant les arêtes pq et $r\bar{r}$. On peut se référer à la Fig. 27 pour visualiser les solutions.

Cas 5 : Cas irréductibles

- Sous cas 5.1 : $2 \times 2 \times 2$

On divise en deux rectangles 2×2 de manière à avoir dans chaque rectangle un sommet ou deux de couleurs différentes.

Si $|L| = 3$, on ajoute dans le carré 2×2 un sommet de la couleur opposée qui n'a pas voisin dans L dans l'autre face, et on fait un chemin hamiltonien dans chaque carré.

Si $|L| = 2$, on ajoute une arête entre les deux carrés qui n'a pas d'extrémité dans L et on fait un chemin hamiltonien dans chaque carré.

- Sous cas 5.2 : $2 \times 2 \times 3$

On coupe dans la direction du côté de taille 3 en un pavé $2 \times 2 \times 2$ et un rectangle $1 \times 2 \times 2$. S'il n'y a pas de points dans le $1 \times 2 \times 2$, le problème est réductible. S'il y a un point dans le $1 \times 2 \times 2$, on ajoute n'importe quelle arête sans extrémité dans L et avec les bonnes couleurs. Il y a un chemin hamiltonien dans le $2 \times 2 \times 2$, c'est le cas précédent, et un dans le carré.

Sinon on coupe dans l'autre sens.

- Sous cas 5.3 : $2 \times 3 \times 3$

Comme avant : on coupe en deux parties $2 \times 2 \times 3$ et 2×3 . Dans le 2×3 , il y a toujours un chemin hamiltonien entre deux sommets des bonnes couleurs lorsque

l'un d'eux est un coin. S'il y a seulement un point dans le 2×3 , on prend un coin qui n'a pas pas comme voisin un sommet de L .

– **Sous cas 5.4 : $3 \times 3 \times 3$**

On essaie dans un premier temps de diviser en 2 pavés avec un sommet noir de chaque côté. Dans le 3×3 il y a toujours un chemin hamiltonien entre deux sommets noirs. Les seuls cas où l'on ne peut pas diviser sont ceux du cas 4.

On fait alors la même division et on ajoute les mêmes points. Il faut juste montrer qu'il y a un chemin hamiltonien entre les deux points de A_1 . A_1 est un rectangle 3×2 , le seul cas où il n'y a pas de chemin est quand les deux points sont sur la deuxième ligne. Cela ne peut arriver que dans le deuxième sous cas. Voir la solution sur la figure pour ce problème précis.

□

La condition $|L| \leq d$ est serrée. En effet, si l'on considère l'ensemble L de cardinalité $d + 1$, contenant tous les sommets voisins d'un coin, plus un sommet noir. Alors (G, L) satisfait la condition de coloration dès que G est pair, mais d'après le lemme 6 (condition de connexité), (G, L) n'a pas de solution.

Conclusion

Nous avons dans ce mémoire étudié des problèmes d'arbres couvrants sur des structures de type grille. Concernant le problème du dénombrement des arbres couvrants de la grille, nous n'avons pas pu conclure l'étude mais nous avons néanmoins avancé sur le sujet et soulevé plusieurs questions. Nous avons en particulier fait le lien avec un autre objet mathématique : les partitions non croisées. Cela nous a permis de diminuer nettement l'ordre de la récurrence sur le nombre d'arbres couvrants connu jusqu'alors.

Pour mieux comprendre la structure inhérente aux couples de partitions non croisées, nous avons introduit une nouvelle classe de graphes d'intersection, définie par sous graphes exclus, qui contient des sous-classes de graphes connus.

Enfin, nous avons presque résolu le cas des graphes $K_n \times P_m$, ce qui nous confirme que la difficulté d'énumérer les arbres de la grille classique vient de la structure ordonnée des colonnes.

Concernant la caractérisation des arbres par leur ensemble de feuilles, un certain nombre de résultats avait déjà été obtenus précédemment, nous avons pu apporter un complément en donnant un résultat plus rond pour des grilles de dimension plus grande. Ce résultat est intéressant car il donne une condition portant uniquement sur la condition de coloration, due au fait que les grilles sont des graphes bipartis. Par ailleurs, ces résultats font l'objet d'un article en cours de rédaction et seront présentés sous forme de poster à Eurocomb en septembre 2009.

Plus personnellement, ce stage m'a permis de m'intégrer au sein d'une équipe de recherche, de participer à ses activités (rencontres ANR à Bordeaux, rédaction d'un article, participation aux activités de vulgarisation, . . .). Les recherches ont parfois été difficiles car infructueuses, mais ce stage a soulevé un certain nombre de questions permettant un travail varié (dénombrement, étude structurelle des graphes, recherches bibliographiques, . . .) Cela me donne une bonne base pour continuer un travail en thèse.

Notations

Cette table reprend les notations du mémoire :

- G_∞ : grille infinie de dimension
- G_∞^d : grille infinie de dimension d
- $G_n(m)$: grille rectangulaire avec n lignes et m colonnes, les sommets sont numérotés de manière matricielle, un sommet a a pour coordonnées (a_1, a_2)
- $t(G), t_n(m)$: nombre d'arbres couvrants le graphe G , nombre d'arbres couvrants la grille $G_n(m)$
- \mathcal{P}_n : ensemble des partitions à n éléments
- type λ, x : type d'une partition. Il y a deux manières équivalentes de le voir.
- \mathcal{NP}_n : ensemble des partitions non croisées à n éléments, $\mathcal{NP}_{n,k}$ désigne les partitions non croisées à n éléments en k blocs
- \mathcal{IP}_n : ensemble des partitions en intervalles à n éléments
- A_n : matrice de transition pour n lignes, les coefficients sont a_{P_1, P_0} , le nombre de manières de passer de la partition P_0 à la partition P_1
- $X = (X^H, X^V)$: transfert, c'est un sous ensemble de E_n qui contient n arêtes horizontales et $n - 1$ arêtes verticales, cela correspond aux arêtes que l'on ajoute pour former la dernière colonne,
- $\Gamma(x)$: ensemble des voisins du sommet x dans un graphe. Si l'on se restreint à un sous ensemble A des sommets, on notera $\Gamma|_A$.

Références

- [1] M. Aigner and G. M. Ziegler. *Proofs from the book*. Springer, 2004.
- [2] B. Bollobas. *Modern Graph Theory*. Springer, July 1998.
- [3] A. Bondy and U.S.R Murty. *Graph Theory*. Sprinber, 2008.
- [4] A. Brandstädt, V.B. Le, and J.P. Spinrad. *Graph classes : a survey*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, USA, 1999.
- [5] K.L. Collins and L.B. Krompart. The number of hamiltonian paths in a rectangular grid, 1997.
- [6] M. Desjarlais and R. Molina. Counting spanning trees in grid graphs. In *Congressus Numerantium*, 2000.
- [7] M. C. Golumbic. *Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs (Annals of Discrete Mathematics, Vol 57)*. North-Holland Publishing Co., 2004.
- [8] S. Gravier and A. Parreau. Spanning trees in grid graphs with fixed leaves. *en cours de rédaction*, 2009.
- [9] F. Harary. *Graph Theory*. Addison-Wesley, 1969.
- [10] A Itai, C.H. Papadimitriou, and J.L. Szwarcfiter. Hamilton paths in grid graphs. *SIAM Journal on Computing*, 11(4) :676–686, 1982.
- [11] W. Kennedy, G. Lin, and G. Yan. Strictly chordal graphs are leaf powers. *J. Discrete Algorithms*, 4(4) :511–525, 2006.
- [12] M. Klazar. On trees and noncrossing partitions. *Discrete Appl. Math*, 82 :263–269, 1998.
- [13] G. Kreweras. Sur les partitions non croisées d’un cycle. *Discrete Mathematics*, 1 :333–350, 1972.
- [14] Y. H. H. Kwong and D. G. Rogers. A matrix method for counting hamiltonian cycles on grid graphs. *Eur. J. Comb.*, 15(3) :277–283, 1994.
- [15] J. McCommond. Noncrossing partitions in surprising locations. *The mathematical association of america*, 2006.
- [16] A. Parreau. Hamiltonicité dans une grille, un jeu d’enfant ? Mémoire de stage de recherche, L3IF, 2006.
- [17] H. Prodinger. A correspondence between ordered trees and non-crossing partitions. *Discrete Mathematics*, 46 :205–206, 1983.
- [18] P. Raff. Spanning trees in grid graphs. *soumis*, 2008.
- [19] R. Simion. Noncrossing partitions. *Discrete Math.*, 217(1-3) :367–409, 2000.
- [20] R. Simion and D. Ullman. On the structure of the lattice of noncrossing partitions. *Discrete Mathematics*, 98 :193–206, 1991.
- [21] N.J.A. Sloane. The on-line encyclopedia of integer sequence. published on-line, 2001. <http://research.att.com/njas/sequences/q>.
- [22] R. Stoyan and V. Strehl. Enumeration of hamiltonian circuits in rectangular grids. *Séminaire Lotharingien de Combinatoire, Issue*, 34, 1995.
- [23] unknown. Cayley’s formula. <http://en.wikipedia.org/wiki/Cayley>.