Itération fractale de graphes

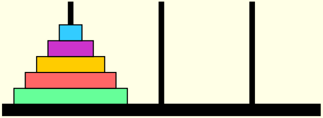
Sylvain Gravier, Matjaz Kovše, Aline Parreau

10 novembre 2010

Journées Graphes et Algorithmes 2010

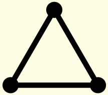
ANR IDEA

Aperçu de ce qui va suivre



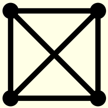
Tours de Hanoï

$\rightarrow$



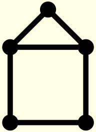
Graphe de Hanoï

$\rightarrow$



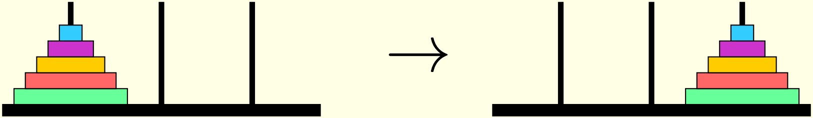
Graphe de Sierpiński

$\rightarrow$

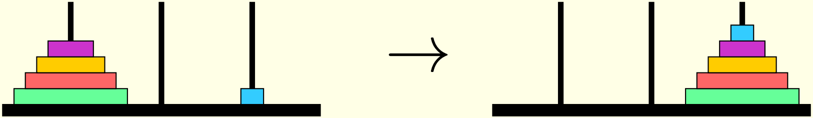


Graphe itéré fractal

Les tours de Hanoï

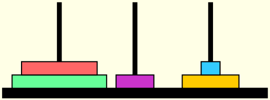


Les tours de Hanoï

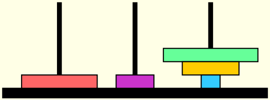


Règles :

- déplacer les disques un par un,
- respecter l'ordre des disques.

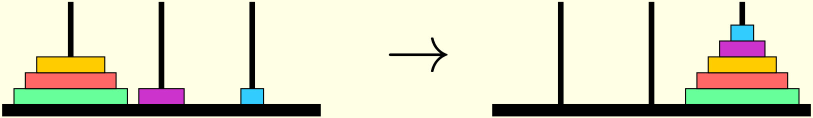


AUTORISEE



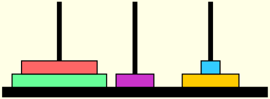
INTERDITE

Les tours de Hanoï

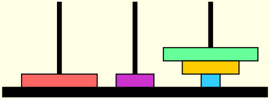


Règles :

- déplacer les disques un par un,
- respecter l'ordre des disques.

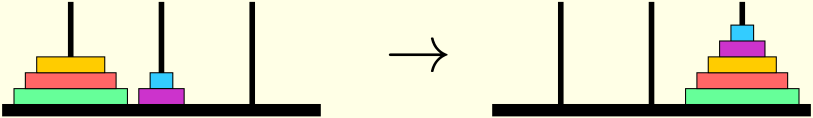


AUTORISEE



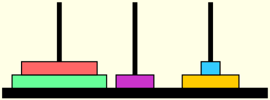
INTERDITE

Les tours de Hanoï

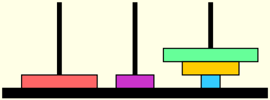


Règles :

- déplacer les disques un par un,
- respecter l'ordre des disques.



AUTORISEE



INTERDITE

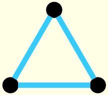
Les graphes de Hanoï

- sommet : configuration autorisée
- arête : passage possible d'une configuration à une autre

Les graphes de Hanoï

- sommet : configuration autorisée
- arête : passage possible d'une configuration à une autre

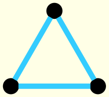
Un disque :



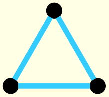
Les graphes de Hanoï

- sommet : configuration autorisée
- arête : passage possible d'une configuration à une autre

Un disque :



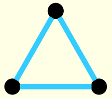
Deux disques :



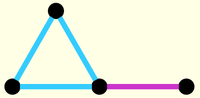
Les graphes de Hanoï

- sommet : configuration autorisée
- arête : passage possible d'une configuration à une autre

Un disque :



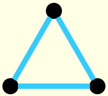
Deux disques :



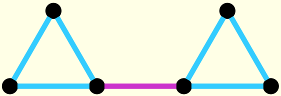
Les graphes de Hanoï

- sommet : configuration autorisée
- arête : passage possible d'une configuration à une autre

Un disque :



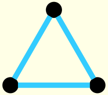
Deux disques :



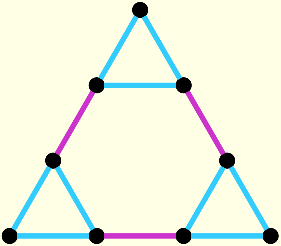
Les graphes de Hanoï

- sommet : configuration autorisée
- arête : passage possible d'une configuration à une autre

Un disque :

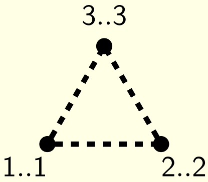


Deux disques :



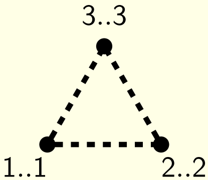
Les graphes de Hanoï

Si on connait le graphe pour $d-1$ disques :

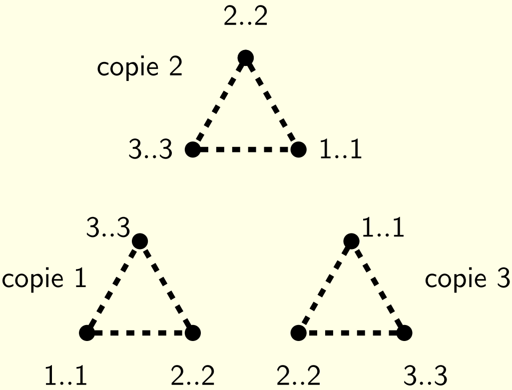


Les graphes de Hanoï

Si on connait le graphe pour $d-1$ disques :

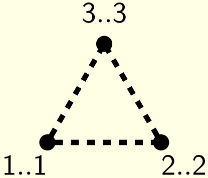


On construit le graphe pour d disques :

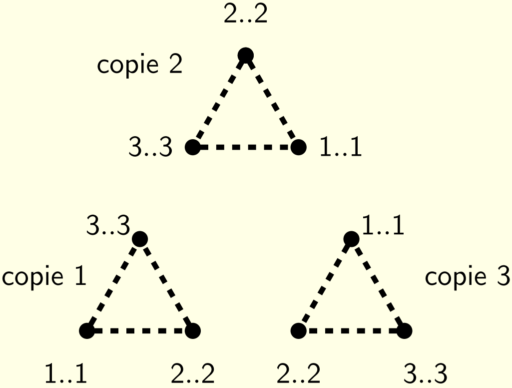


Les graphes de Hanoï

Si on connait le graphe pour $d-1$ disques :

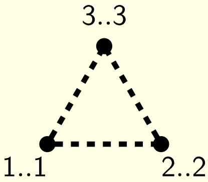


On construit le graphe pour d disques :

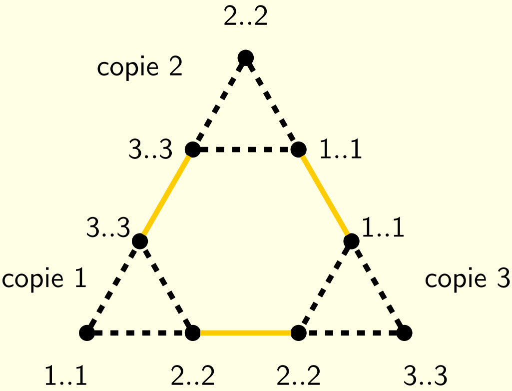


Les graphes de Hanoï

Si on connait le graphe pour $d-1$ disques :

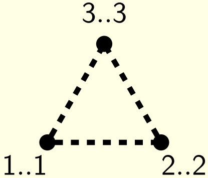


On construit le graphe pour d disques :

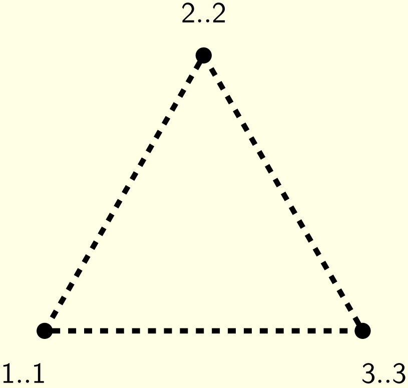


Les graphes de Hanoï

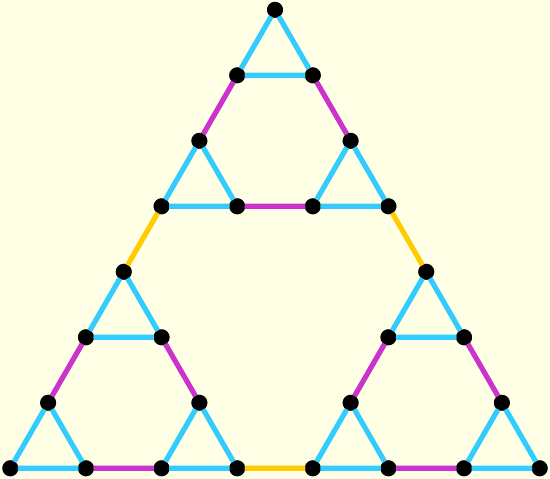
Si on connait le graphe pour $d-1$ disques :



On construit le graphe pour d disques :



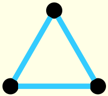
Ce qui donne pour 3 disques :



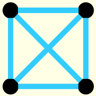
A quoi peut servir le graphe

- Distance entre deux points extrêmes : nombre minimum de coups pour résoudre Hanoï, $(= 2^d - 1)$
- Diamètre du graphe : configurations les plus éloignées,
- Hamiltonicité,
- ...

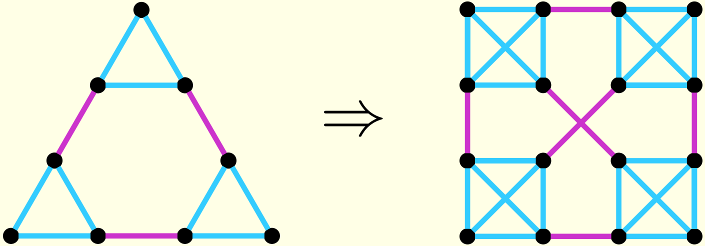
Géneralisation aux graphes complets



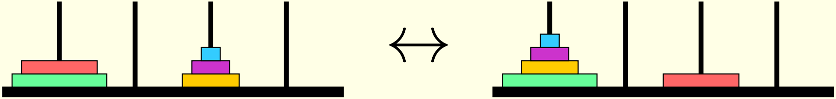
$\Longrightarrow$



Géneralisation aux graphes complets

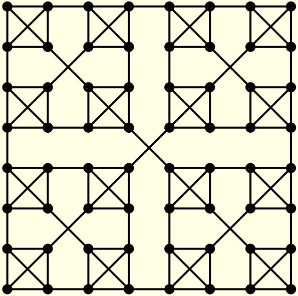


Ca correspond à Hanoï avec un autre mouvement :

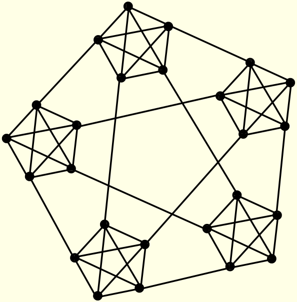


Graphes de Sierpiński (Klavžar, Milutinović, 1997)

$S(n, d)$: n sommets au départ (pics), d itérations (disques)



S(4,3)

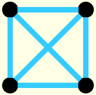


S(5,2)

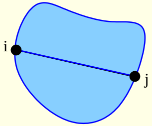
Études des graphes de Sierpiński

- Métrique du graphe (plus court chemins,. . .), (Klavžar, Milutinović, 1997)
- Hamiltonicité, (Klavžar, Milutinović, 1997)
- Groupe d'automorphismes, (Klavžar, Mohar, 2000)
- Crossing number, (Klavžar, Mohar, 2000)
- Études des codes parfaits, codes identifiants et (a, b)-codes, (Klavžar et al. 2002, Beaudou et al. 2010,. . .)
- ...

Généralisons encore : construction de $S(G, d)$

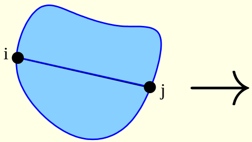


$$\Longrightarrow$$



Graphe G

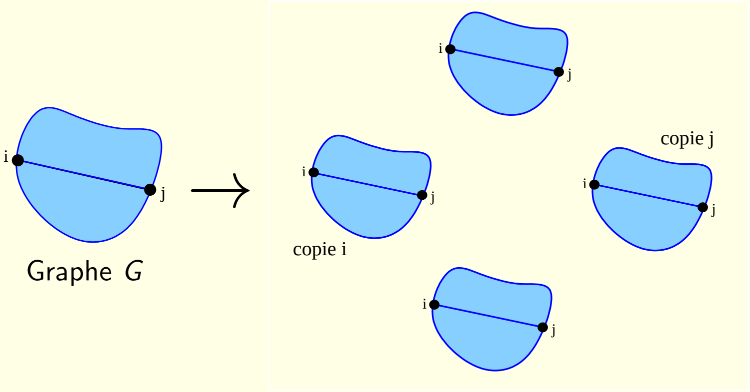
Généralisons encore : construction de $S(G, d)$



Graphe G

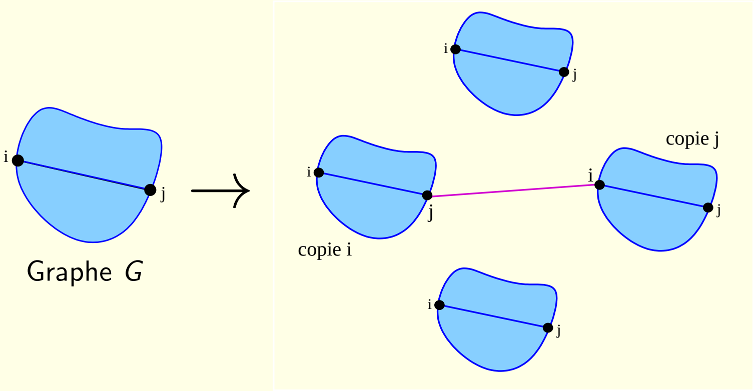
- Une copie par sommet de G

Généralisons encore : construction de $S(G, d)$



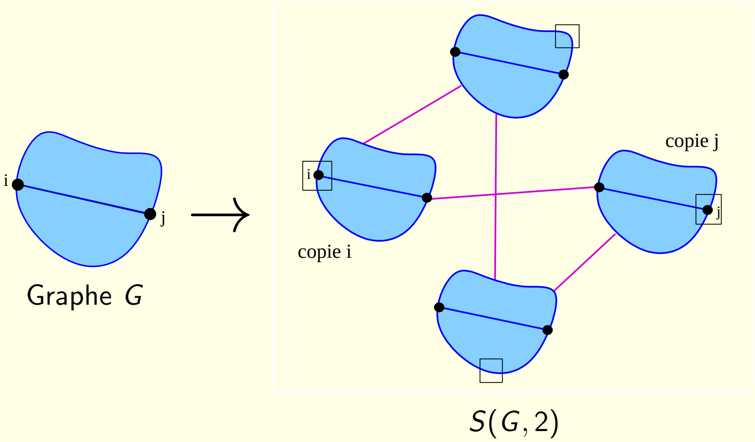
- Une copie par sommet de G
- Arête ij dans G $\rightarrow$ arête entre sommet i copie j et sommet j copie i

Généralisons encore : construction de $S(G, d)$



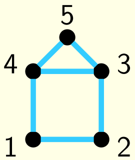
- Une copie par sommet de G
- Arête ij dans G $\rightarrow$ arête entre sommet i copie j et sommet j copie i
- sommets extrêmes ($\square$) : sommets i de la copie i

Généralisons encore : construction de $S(G, d)$



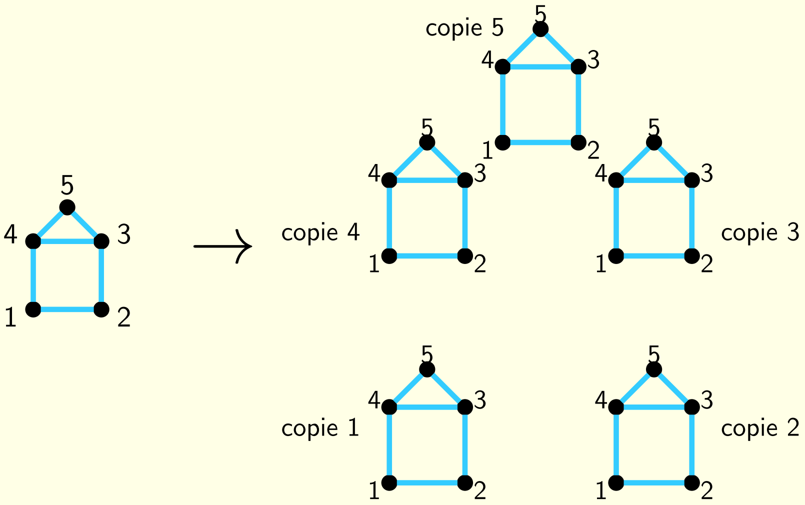
- Une copie par sommet de G
- Arête ij dans $G \rightarrow$ arête entre sommet i copie j et sommet j copie i
- sommets extrêmes ($\square$) : sommets i de la copie i

Sur un exemple pratique

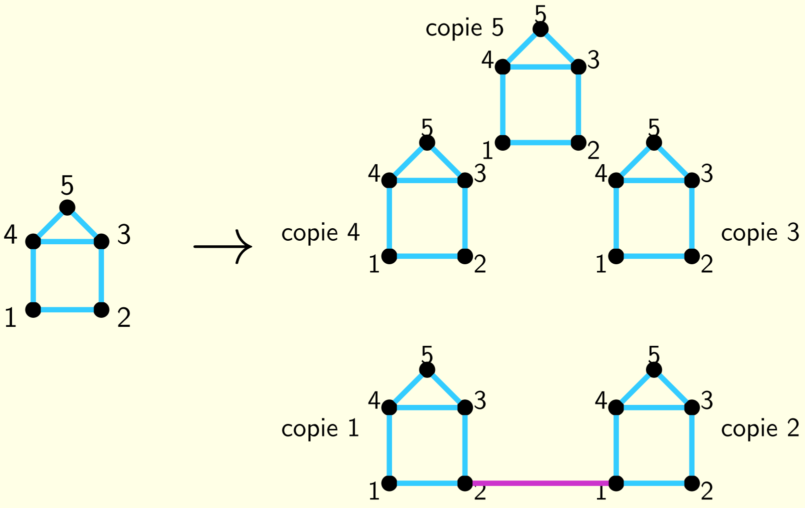


$\longrightarrow$

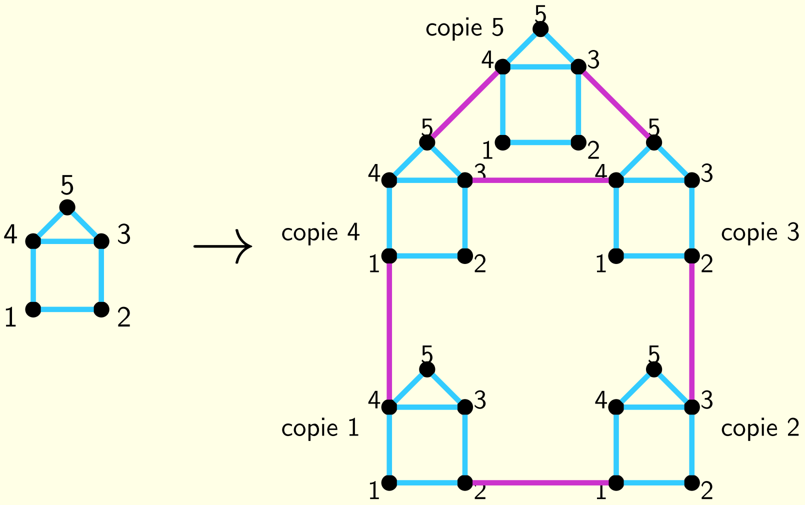
Sur un exemple pratique



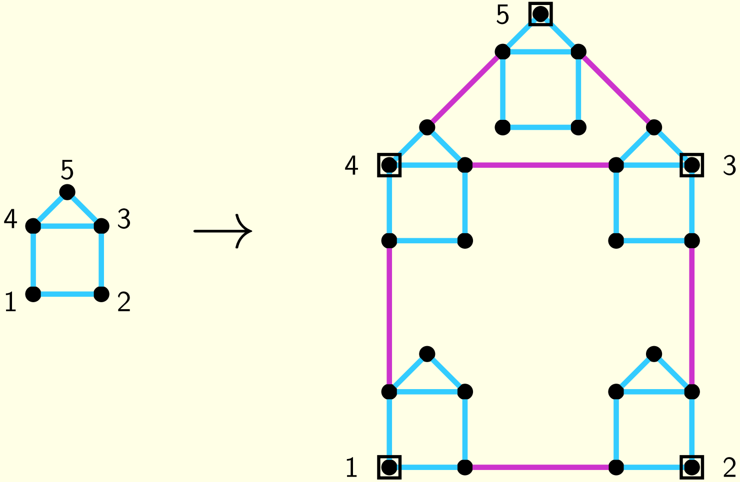
Sur un exemple pratique



Sur un exemple pratique

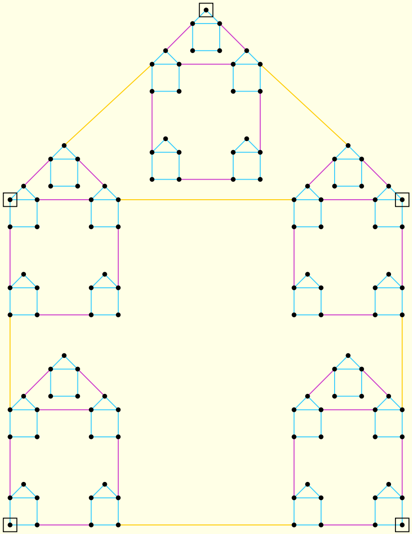


Sur un exemple pratique



Sur un exemple pratique

$S(\hat{\square}, 3)$



Quelques remarques

Dans $S(G, d)$ où G à n sommets et m arêtes :

- Nombre de sommets : n^d
- Nombre d'arêtes : $m(n^{d-1} + \ldots + 1)$

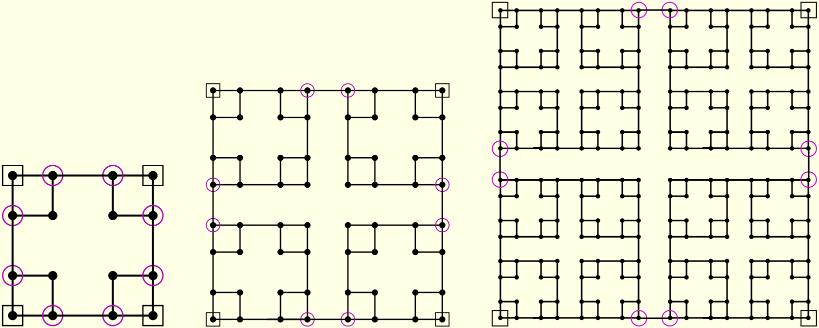
3 types de sommets :

- les sommets extrêmes : n sommets
- les sommets ponts : $2m$ sommets
- et les autres : sommets normaux...

A l'étape suivante, dans la copie i :

- extrême $i \to$ extrême i
- extrême j, $j \in N(i)$, $\to$ ponts
- autres extrêmes, ponts, normaux $\to$ normaux.

Un autre exemple



D'autres petites remarques

- Nombre chromatique : $\chi(G)$,
- Degrés des sommets : degrés dans G $+1$ si sommets ponts à une étape,
- Distance entre deux sommets extrêmes i et j : $(2^d - 1) * d(i, j)$
- Connexité : si une arête ij est coupante, alors les arêtes construites avec ij le sont aussi.
- Graphe auto-similaire

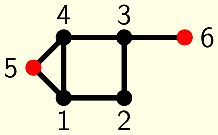
Que fait-on avec ces graphes ?

On étudie des propriétés des itérés en fonction des propriétés du graphe de départ :

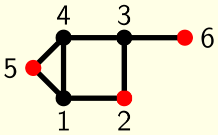
- Codes parfaits,
- Automorphismes,
- Métrique,
- ...

Codes parfaits

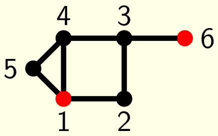
Un empilement :
Un sommet est dominé au plus une fois



Un dominant :
Tous les sommets sont dominés

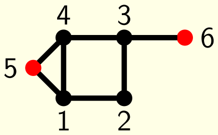


Un code parfait :
Tous les sommets sont dominés exactement une fois

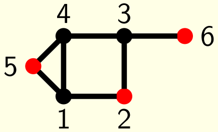


Codes parfaits

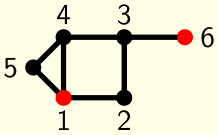
Un empilement :
Un sommet est dominé au plus une fois



Un dominant :
Tous les sommets sont dominés



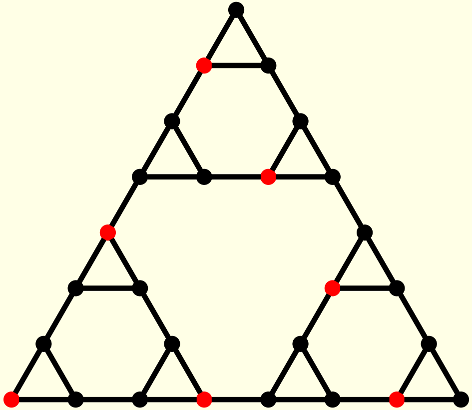
Un code parfait :
Tous les sommets sont dominés exactement une fois



Existe-il des codes parfaits dans nos graphes ?

Dans Sierpiński

Il y a toujours un code parfait dans $S(K_n, d)$ (Klavžar et al. 2002) :



Dans le cas général

Deux petits résultats :

Si tout empilement de G laisse au moins deux sommets, $S(G, d)$ ne possède jamais de code parfait.

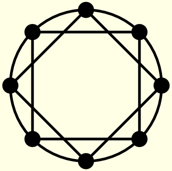
Si G n'a pas de code parfait, il y a équivalence entre :

- *$S(G, d)$ a un code parfait pour un $d > 1$,*
- *$S(G, d)$, $d > 1$ a toujours un code parfait,*
- *$S(G, 2)$ a un code parfait.*

Moralité : si G n'a pas de code parfait, il suffit d'étudier $S(G, 2)$.

Le cas des puissances de cycles

On prend $G = C_n^r$:



$n = k[2r+1]$	r	$d = 1$	$d = 2$	$d > 3$
$k > 1$		non	non	non
$k = 1$	r pair	non	non	non
$k = 1$	r impair	non	oui	oui
$k = 0$	$1 < r < \frac{n}{2}$	oui	oui	non
$k = 0$	$r = 1$ ou $r \geq \frac{n}{2}$	oui	oui	oui

Idées de preuve

On a $n = 1[2r+1]$. Donc :

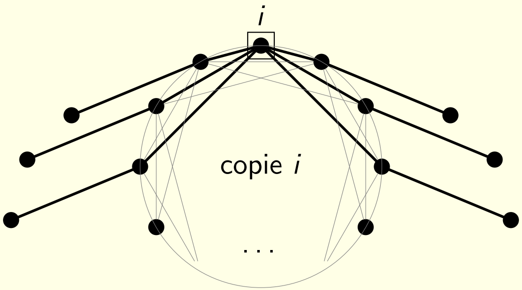
- C_n^r n'a pas de code parfait
- le plus gros empilement de C_n^r laisse un sommet

Il suffit de montrer que :

Si $S(C_n^r, 2)$ a un code parfait, alors r est impair

Idées de preuve

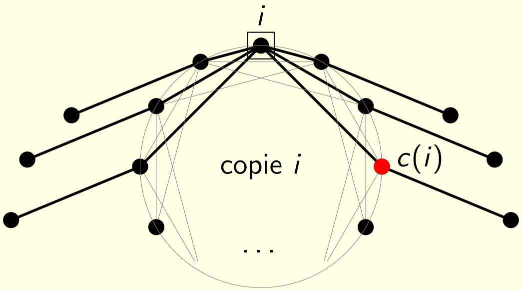
Supposons qu'il existe un code parfait C.



- C induit un empilement de C_n^r,

Idées de preuve

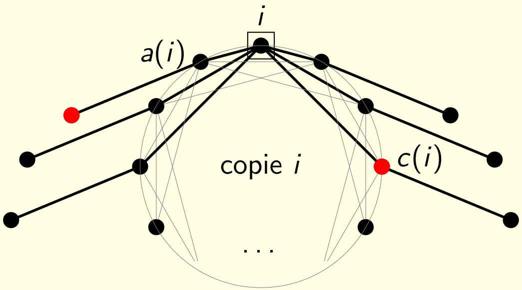
Supposons qu'il existe un code parfait C.



- C induit un empilement de C_n^r,
- $c(i)$: voisin dans C

Idées de preuve

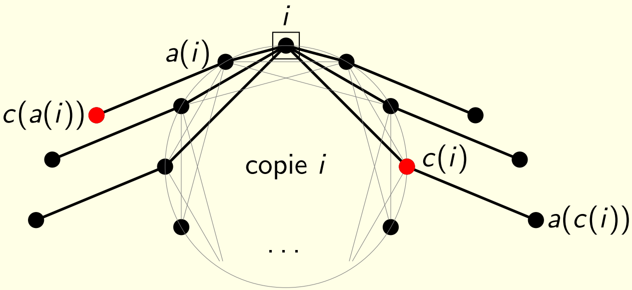
Supposons qu'il existe un code parfait C.



- C induit un empilement de C_n^r,
- $c(i)$: voisin dans C
- $a(i)$: voisin non dominé

Idées de preuve

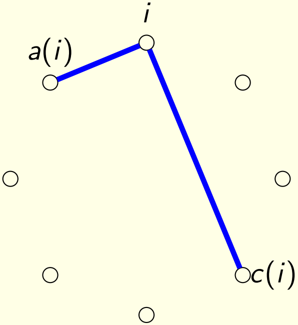
Supposons qu'il existe un code parfait C.



- C induit un empilement de C_n^r,
- $c(i)$: voisin dans C
- $a(i)$: voisin non dominé
- $|a(i) - c(i)| = r + 1$, $a \circ c = c \circ a = id$

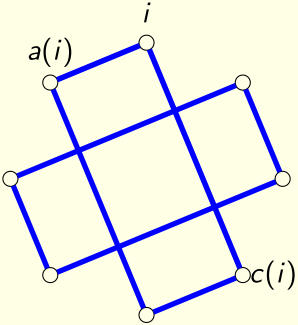
Idées de preuve

- pour chaque i : $a(i)$,$c(i)$,
- $|a(i) - c(i)| = r + 1$, $a \circ c = c \circ a = id$



Idées de preuve

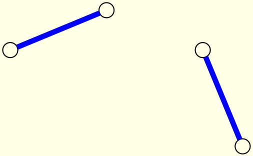
- pour chaque i : $a(i)$,$c(i)$,
- $|a(i) - c(i)| = r + 1$, $a \circ c = c \circ a = id$



- Construction d'un 2-facteur sur $\{1, \ldots, n\}$,

Idées de preuve

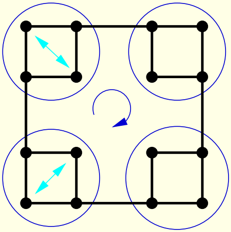
- pour chaque i : $a(i)$,$c(i)$,
- $|a(i) - c(i)| = r + 1$, $a \circ c = c \circ a = id$



- Construction d'un 2-facteur sur $\{1, \ldots, n\}$,
- Induit un couplage sur $\{1, \ldots, r + 1\}$, donc $r + 1$ est pair

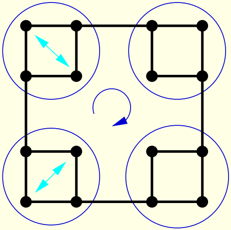
D'autres résultats

- Étude des automorphismes
  $\rightarrow$ description, dénombrement :



D'autres résultats

- Étude des automorphismes
  $\rightarrow$ description, dénombrement :



$$|Aut(C_4, d)| = O(2^{4^{d-2}+\cdots})$$

D'autres résultats

- Étude des automorphismes
  $\rightarrow$ description, dénombrement :

$$|Aut(C_4, d)| = O(2^{4^{d-2}+\cdots})$$

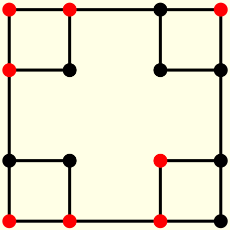
- Calcul du "distinguishing number"
  $\rightarrow$ en fonction de celui de G :

D'autres résultats

- Étude des automorphismes
  $\rightarrow$ description, dénombrement :

$$|Aut(C_4, d)| = O(2^{4^{d-2}+\dots})$$

- Calcul du "distinguishing number"
  $\rightarrow$ en fonction de celui de G :



$$D(S(G,d)) = \max(\max_{x \in V} D(G/x), 2)$$

D'autres résultats

- Étude des automorphismes
  $\rightarrow$ description, dénombrement :

$$|Aut(C_4, d)| = O(2^{4^{d-2}+\cdots})$$

- Calcul du "distinguishing number"
  $\rightarrow$ en fonction de celui de G :

$$D(S(G,d)) = \max(\max_{x \in V} D(G/x), 2)$$

- Calcul des distances dans le graphe
- Étude de la connexité

Et encore plein de choses à regarder

- Hamiltonicité,
- Crossing number,
- Nombre de couplages,
- Codes identifiants, (a, b)-codes
- Propriétés locales
- Reconnaissance

C'est fini !

Merci ! Merci !
Merci ! Merci !
Merci !
Merci ! Merci ! Merci !Merci !Merci ! Merci !Merci ! Merci !Merci ! Merci ! Merci !
Merci !Merci ! Merci !Merci ! Merci !Merci !Merci ! Merci ! Merci ! Merci !Merci ! Merci ! Merci !
Merci ! MercMerci ! Merci ! Merci ! Merci ! Merci ! Merci ! Merci ! Merci !
Merci ! Merci ! Merci ! Merci ! Merci ! Merci ! Merci ! Merci ! Merci !
Merci ! Merci ! Merci ! Merci ! Merci ! Merci ! Merci ! Merci !
Merci ! Merci ! Merci !Merci !Merci ! Merci ! Merci ! Merci ! Merci ! Merci !
Merci ! Merci ! Merci !Merci !Merci ! Merci ! Merci ! Merci ! Merci ! Merci !
Merci ! Merci ! Merci ! Merci !Merci ! Merci ! Merci ! Merci !
Merci ! Merci ! Merci ! Merci ! Merci ! Merci ! Merci !
Merci ! Merci ! Merci ! Merci ! Merci ! Merci ! Merci !
Merci ! Merci ! Merci !Merci !Merci ! Merci ! Merci ! Merci !Merci ! Merci ! Merci !
Merci ! Merci ! Merci !Merci !Merci ! Merci ! Merci ! Merci !Merci ! Merci ! Merci !