# Introduction dans l'univers des jeux combinatoires

Aline Parreau

19 mai 2010

*Séminaire compréhensible de l'Institut Fourier*

*"On n'arrête pas de jouer parce que l'on devient vieux ; on devient vieux parce que l'on arrête de jouer"*
George Bernard Shaw

# Jeu combinatoire à deux joueurs

Quels jeux considère-t-on ?

- deux joueurs,
- pas de hasard,
- connaissance totale du jeu,
- pas le droit de passer,
- nombre fini de positions,
- toujours un gagnant,

# Jeu combinatoire à deux joueurs

Quels jeux considère-t-on ?

- deux joueurs,
- pas de hasard,
- connaissance totale du jeu,
- pas le droit de passer,
- nombre fini de positions,
- toujours un gagnant, celui qui ne peut plus jouer
- mêmes règles pour les deux joueurs

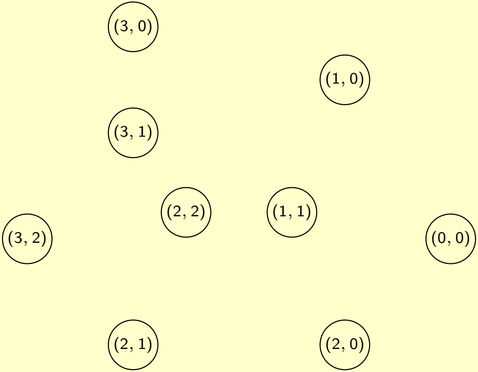
JEUX COMBINATOIRES IMPARTIAUX

# Graphe associé à un jeu

Jeu $NIM(3,2)$ :

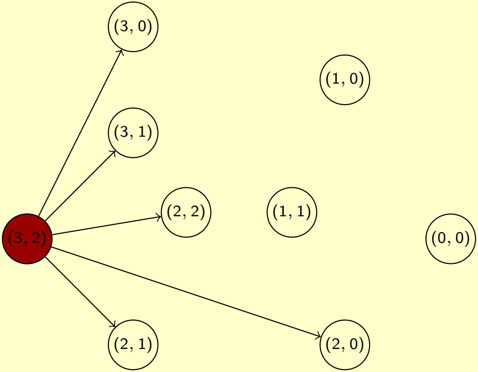
# Graphe associé à un jeu

Jeu $NIM(3,2)$ :



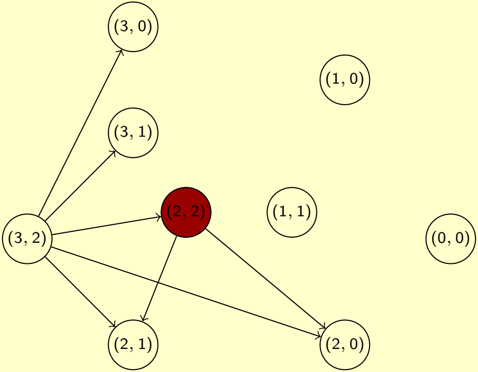
# Graphe associé à un jeu

Jeu $NIM(3,2)$ :



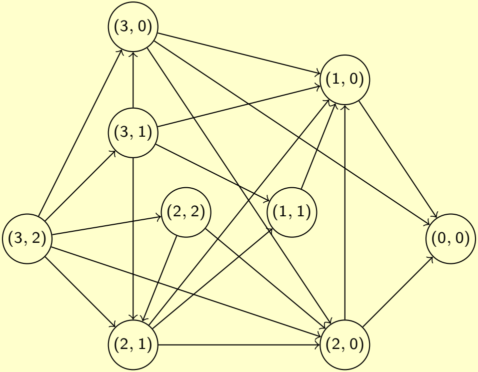
# Graphe associé à un jeu

Jeu $NIM(3,2)$ :



# Graphe associé à un jeu

Jeu $NIM(3, 2)$ :



# Situation perdante/gagnante

Position du jeu fixée, c'est au joueur 1 de jouer.

- Position perdante : quoique joue le joueur 1, l'adversaire gagne (en jouant parfaitement).
- Position gagnante : quoique joue l'adversaire, le joueur 1 gagne (en jouant parfaitement).

# Situation perdante/gagnante

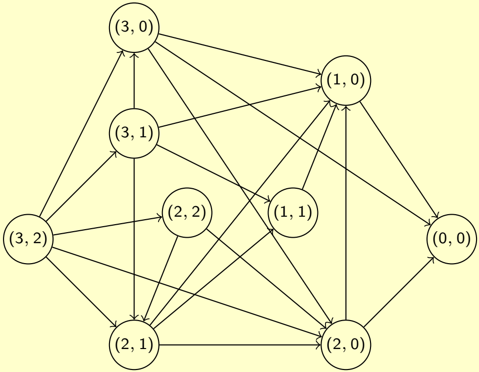
Position du jeu fixée, c'est au joueur 1 de jouer.

- Position perdante : quoique joue le joueur 1, l'adversaire gagne (en jouant parfaitement).
- Position gagnante : quoique joue l'adversaire, le joueur 1 gagne (en jouant parfaitement).

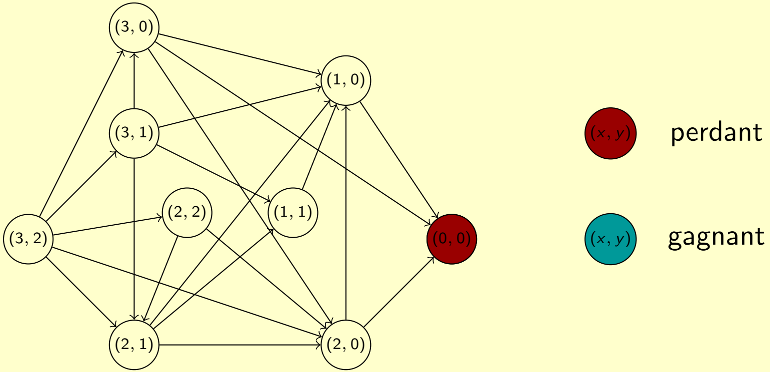
Avec les graphes :

- perdant : toutes les flèches vers des positions gagnantes
- gagnant : une flèche vers une position perdante

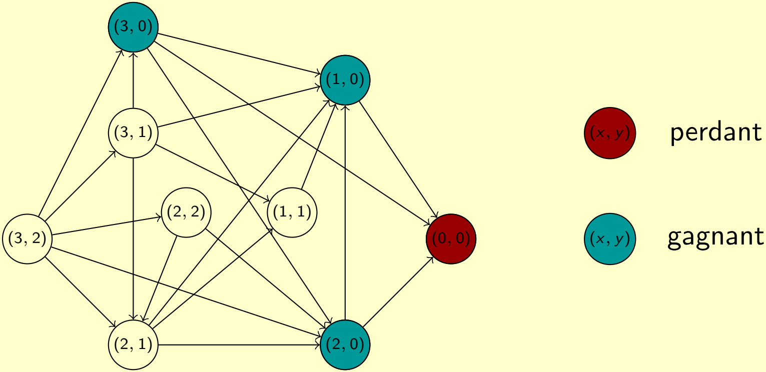
# Situation perdante/gagnante



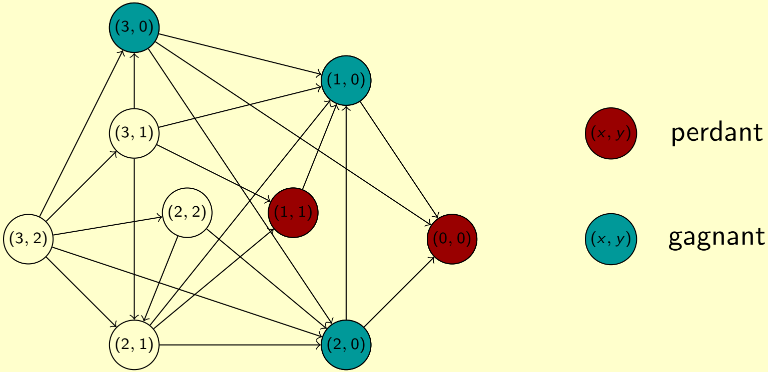
# Situation perdante/gagnante



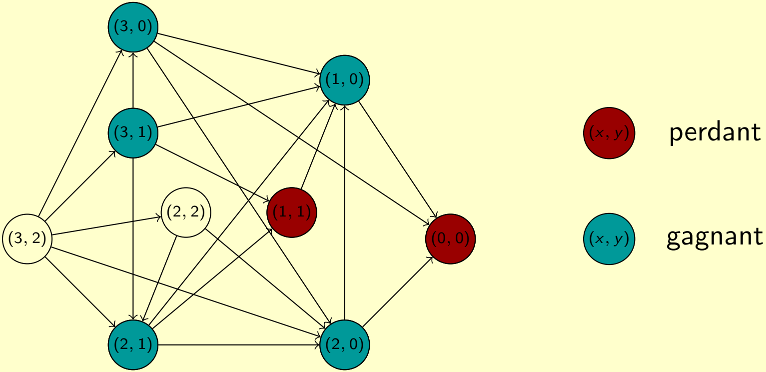
# Situation perdante/gagnante



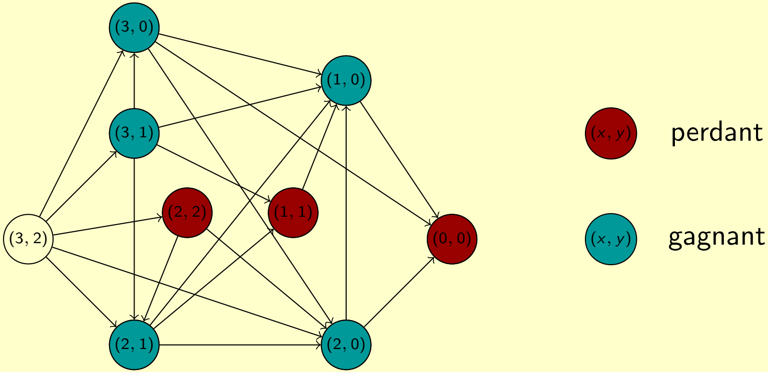
# Situation perdante/gagnante



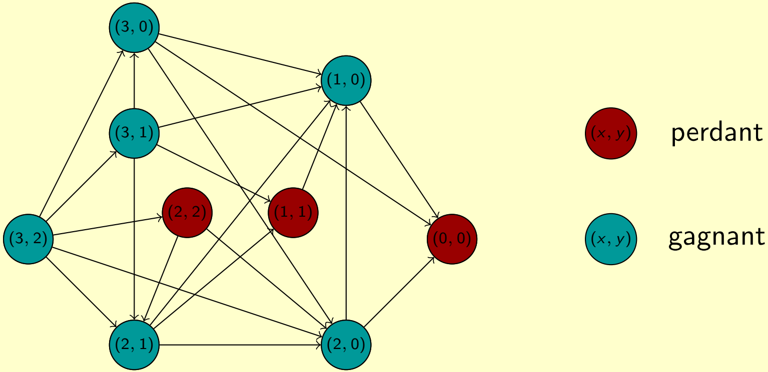
# Situation perdante/gagnante



# Situation perdante/gagnante



# Situation perdante/gagnante



# Théorème fondamental

**Théorème**

*Toute position est soit gagnante, soit perdante*

# Théorème fondamental

**Théorème**

*Toute position est soit gagnante, soit perdante*

Comment savoir si une position est gagnante ?

- dessiner le graphe...

# Théorème fondamental

**Théorème**

*Toute position est soit gagnante, soit perdante*

Comment savoir si une position est gagnante ?

- dessiner le graphe...
- utiliser la symétrie : $NIM(x, x)$ est perdant

# Théorème fondamental

**Théorème**

*Toute position est soit gagnante, soit perdante*

Comment savoir si une position est gagnante ?

- dessiner le graphe...
- utiliser la symétrie : $NIM(x,x)$ est perdant
- une preuve non constructive : CHOCOLAT est gagnant
- ...

# Somme de jeux

A partir de deux jeux $G$ et $H$ on définit $G + H$ :

- une position de $G + H$ est l'union d'une position de $G$ et d'une position de $H$
- à son tour on joue soit sur $G$, soit sur $H$.

*Exemple :* $NIM(2,3) = NIM(2) + NIM(3)$

# Somme de jeux

Arithmétique :

- Perdant + Perdant =
- Perdant + Gagnant =
- Gagnant + Perdant =
- Gagnant + Gagnant =

Arithmétique :

- Perdant + Perdant = Perdant
- Perdant + Gagnant =
- Gagnant + Perdant =
- Gagnant + Gagnant =

# Somme de jeux

Arithmétique :

- Perdant + Perdant = Perdant
- Perdant + Gagnant = Gagnant
- Gagnant + Perdant = Gagnant
- Gagnant + Gagnant =

# Somme de jeux

Arithmétique :

- Perdant + Perdant = Perdant
- Perdant + Gagnant = Gagnant
- Gagnant + Perdant = Gagnant
- Gagnant + Gagnant = ? ? ?

L'information donnée "gagnant/perdant" n'est pas suffisante...

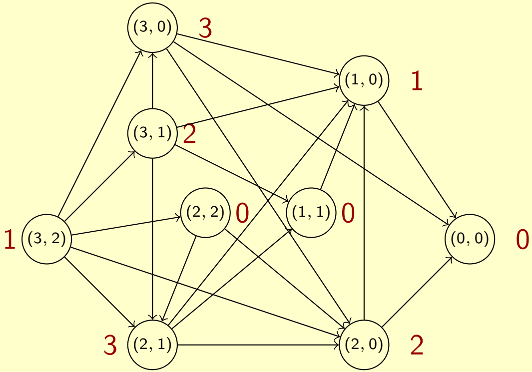
# Fonction de Grundy

$MEX(E)$ = le plus petit entier positif ou nul qui n'est pas dans $E$

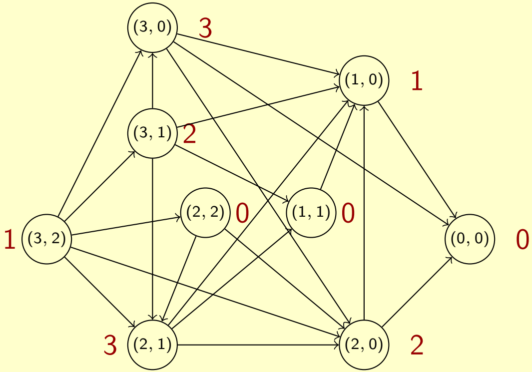
Définition de la fonction de Grundy $\mathcal{G}$ :

$$\mathcal{F}(x) = MEX\{\mathcal{F}(x')|x' \text{ atteignable à partir de } x\}$$

# Fonction de Grundy



# Fonction de Grundy




$\mathcal{F}(x) = 0$ ssi $x$ est une position perdante

# Fonction de Grundy de la somme

**Théorème**

$$\mathcal{F}(x+y) = \mathcal{F}(x) \oplus \mathcal{F}(y)$$

*avec $\oplus$ la somme binaire sans retenue.*

# Fonction de Grundy de la somme

**Théorème**

$$\mathcal{F}(x+y) = \mathcal{F}(x) \oplus \mathcal{F}(y)$$

*avec $\oplus$ la somme binaire sans retenue.*

Et donc :

$$x + y \text{ est perdant ssi } \mathcal{F}(x+y) = 0 \text{ ssi } \mathcal{F}(x) = \mathcal{F}(y)$$

On dit alors que les jeux $x$ et $y$ sont équivalents.

# L'exemple du jeu de NIM

- NIM à plusieurs tas est la somme de plusieurs NIM à un tas
- $\mathcal{F}(NIM(n)) = n$
- $\mathcal{F}(NIM(n_1, n_2, ..., n_k)) = n_1 \oplus n_2 ... \oplus n_k$
- pour gagner, il faut placer son adversaire dans une position telle que $n_1 \oplus n_2 ... \oplus n_k = 0$

# L'exemple du jeu de NIM

- NIM à plusieurs tas est la somme de plusieurs NIM à un tas
- $\mathcal{F}(NIM(n)) = n$
- $\mathcal{F}(NIM(n_1, n_2, ..., n_k)) = n_1 \oplus n_2 ... \oplus n_k$
- pour gagner, il faut placer son adversaire dans une position telle que $n_1 \oplus n_2 ... \oplus n_k = 0$

*Finalement, tout jeu est équivalent à un jeu de NIM à un tas...*

# Et les jeux partisans ?

Maintenant, les règles ne sont plus les mêmes pour les deux joueurs $\rightarrow$ Alice et Bob

4 fins possibles :

- Alice gagne tout le temps : $G \in \mathcal{A}$
- Bob gagne tout le temps : $G \in \mathcal{B}$
- Le joueur dont c'est le tour gagne : $G \in \mathcal{N}$
- Le joueur dont c'est le tour perd : $G \in \mathcal{P}$

# Définition formelle

Définition formelle :

- $G = \{\mathcal{G}^A | \mathcal{G}^B\}$ avec $\mathcal{G}^A$ un ensemble de jeux

Quelques exemples :

- $0 = \{|\}$
- $1 = \{0|\}$
- $-1 = \{|0\}$
- $* = \{0|0\}$ $(= NIM(1))$
- ...

# Opérations

- $G + H = \{\mathcal{G}^A + H, G + \mathcal{H}^A | \mathcal{G}^B + H, G + \mathcal{H}^B\},$

# Opérations

- $G + H = \{\mathcal{G}^A + H, G + \mathcal{H}^A | \mathcal{G}^B + H, G + \mathcal{H}^B\}$,
- $-G = \{-\mathcal{G}^B | -\mathcal{G}^A\}$

Dans un jeu impartial (NIM) : $G = -G$

# Equivalence de jeux

$G = H$ *si pour tout jeu* $X$, $G + X$ *et* $H + X$ *ont la même "fin"*

# Equivalence de jeux

*$G = H$ si pour tout jeu $X$, $G + X$ et $H + X$ ont la même "fin"*

Tout va bien :

- $G = 0$ si et seulement si $G \in \mathcal{P}$,
- 0 porte bien son nom $G + 0 = G$, $G - G = 0$,
- $+$ est associative et commutative,
- $G = H$ si et seulement pour tout jeu $X$, $G + X = H + X$,
- $G = H$ ssi $G - H = 0$ ssi $G - H \in \mathcal{P}$

# Comparaisons

$G \geq H$ si pour tout $X$, $H + X$ gagnant pour Alice $\Rightarrow$ $G + X$ est gagnant pour Alice.

"Remplacer $H$ par $G$ ne fait pas perdre Alice"

$G > 0$ revient à : Alice gagne $G$, $G \in \mathcal{A}$

Cette relation permet de donner des formes canoniques à des jeux

# Comparaisons

Deux jeux ne sont pas toujours comparables :

- $G - H \in \mathcal{A} \Rightarrow G > H$
- $G - H \in \mathcal{B} \Rightarrow G < H$
- $G - H \in \mathcal{P} \Rightarrow G = H$
- $G - H \in \mathcal{N} \Rightarrow G$ et $H$ ne sont pas comparables

*Exemple :* $NIM(n)$ n'est pas comparable avec 0

# Constructions des nombres

On fait les nombres entiers :

- $0 = \{|\}$
- $1 = \{0|\}$
- $2 = \{1|\} = \{\{0|\}|\}$
- $N = \{N - 1|\}$
- $-N = -N$

Tout va bien : $N + 1 = N{+}1$...

# Constructions des nombres

On peut aussi faire des fractions !

$$\frac{m}{2^j} = \left\{ \frac{m-1}{2^j} \middle| \frac{m+1}{2^j} \right\}$$

Heureusement : $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$...

# Constructions des nombres

On peut aussi faire des fractions !

$$\frac{m}{2^j} = \left\{ \frac{m-1}{2^j} \middle| \frac{m+1}{2^j} \right\}$$

Heureusement : $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$...

Quand Bob joue dans un jeu positif, il reste positif et la valeur augmente

# Et les autres jeux ?

Les jeux infinitésimaux :

$$-X < G < X \text{ pour tout jeu } X \text{ ayant une valeur positive}$$

*Exemple :* $* = \{0|0\}$, $\uparrow = \{0|*\}$, $\Uparrow = \uparrow + \uparrow$

# Et les autres jeux ?

Les jeux infinitésimaux :

$$-X < G < X \text{ pour tout jeu } X \text{ ayant une valeur positive}$$

*Exemple :* $* = \{0|0\}$, $\uparrow = \{0|*\}$, $\Uparrow = \uparrow + \uparrow$

et les infinitésimaux des infinitésimaux...

# Et NIM la dedans ?

Ce sont des jeux "tout petits" ! Ils sont infinitésimaux par rapport à tout...

- $NIM(1) = * = \{0|0\}$
- $NIM(2) = \{0, *|0, *\} = *2$
- $NIM(N+1) = \{0, *, *2, ..., *N|0, *, *2, ..., *N\} = *(N+1)$