Identifier les sommets d'un graphe avec des couleurs

Louis Esperet, Sylvain Gravier, Mickaël Montassier, Pascal Ochem, Aline Parreau

25 mai 2010

ANR IDEA ANR

maths à modeler

UNIVERSITE JOSEPH FOURIER

Comment identifier les sommets d'un graphe ?

Problème d'identification des sommets d'un graphe $G = (V, E)$:

- pour un sommet $u \in V$, on "définit" un objet $I(u)$
- I est injective : $I(u) = I(v) \Longrightarrow u = v$

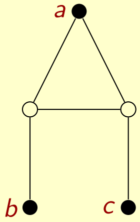
Comment identifier les sommets d'un graphe ?

Problème d'identification des sommets d'un graphe $G = (V, E)$:

- pour un sommet $u \in V$, on "définit" un objet $I(u)$
- I est injective : $I(u) = I(v) \Longrightarrow u = v$

Exemple 1 : Codes identifiants (Karpovsky et al, 98')

- $C \subseteq V$ un ensemble dominant,
- $I(u) = B_1(u) \cap C$ $(I(u) \neq \emptyset)$
- But : minimiser $|C|$



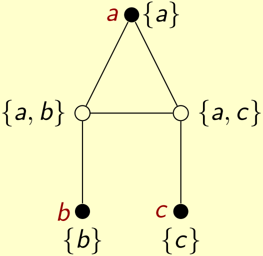
Comment identifier les sommets d'un graphe ?

Problème d'identification des sommets d'un graphe $G = (V, E)$:

- pour un sommet $u \in V$, on "définit" un objet $I(u)$
- I est injective : $I(u) = I(v) \Longrightarrow u = v$

Exemple 1 : Codes identifiants (Karpovsky et al, 98')

- $C \subseteq V$ un ensemble dominant,
- $I(u) = B_1(u) \cap C$ $(I(u) \neq \emptyset)$
- But : minimiser $|C|$



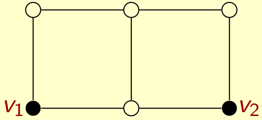
Comment identifier les sommets d'un graphe ?

Problème d'identification des sommets d'un graphe $G = (V, E)$:

- pour un sommet $u \in V$, on "définit" un objet $I(u)$
- I est injective : $I(u) = I(v) \Longrightarrow u = v$

Exemple 2 : Bases métriques (Harary et al, 76')

- $v_1, ..., v_k$ des sommets,
- $I(u) = (d(u, v_1), ..., d(u, v_k))$
- But : minimiser k = dimension



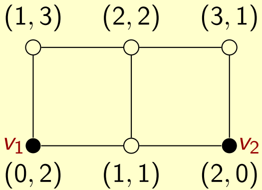
Comment identifier les sommets d'un graphe ?

Problème d'identification des sommets d'un graphe $G = (V, E)$:

- pour un sommet $u \in V$, on "définit" un objet $I(u)$
- I est injective : $I(u) = I(v) \Longrightarrow u = v$

Exemple 2 : Bases métriques (Harary et al, 76')

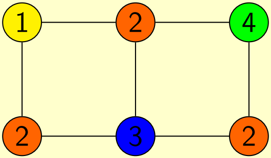
- $v_1, ..., v_k$ des sommets,
- $I(u) = (d(u, v_1), ..., d(u, v_k))$
- But : minimiser $k =$ dimension



Avec des couleurs

Coloration identifiante :

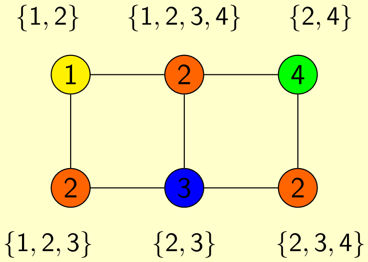
- $c : V \to \mathbb{N}$ une coloration propre des sommets
- $I(u) = \{c(v), v \in B_1(u)\}$
- But : minimiser le nombre de couleurs : χ_{id}



Avec des couleurs

Coloration identifiante :

- $c : V \to \mathbb{N}$ une coloration propre des sommets
- $I(u) = \{c(v), v \in B_1(u)\}$
- But : minimiser le nombre de couleurs : χ_{id}

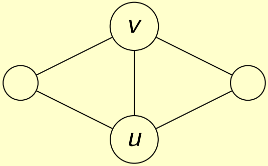


Avec des couleurs

Coloration identifiante :

- $c : V \to \mathbb{N}$ une coloration propre des sommets
- $I(u) = \{c(v), v \in B_1(u)\}$
- But : minimiser le nombre de couleurs : χ_{id}

Existence ?

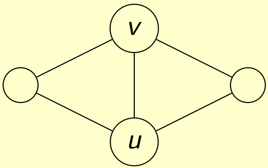


Avec des couleurs

Coloration identifiante :

- $c : V \to \mathbb{N}$ une coloration propre des sommets
- $I(u) = \{c(v), v \in B_1(u)\}$
- $B_1(u) \neq B_1(v) \Longrightarrow I(u) \neq I(v)$
- But : minimiser le nombre de couleurs : χ_{id}

Existence ?



u et v sont jumeaux : $B_1(u) = B_1(v)$

Version locale

Coloration localement identifiante :

- $c : V \to \mathbb{N}$ une coloration propre des sommets
- $I(u) = \{c(v), v \in B_1(u)\}$
- $uv \in E, B_1(u) \neq B_1(v) \Longrightarrow I(u) \neq I(v)$
- But : minimiser le nombre de couleurs : χ_{lid}

Version locale

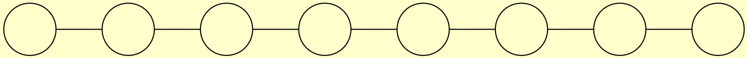
Coloration localement identifiante :

- $c : V \to \mathbb{N}$ une coloration propre des sommets
- $I(u) = \{c(v), v \in B_1(u)\}$
- $uv \in E, B_1(u) \neq B_1(v) \Longrightarrow I(u) \neq I(v)$
- But : minimiser le nombre de couleurs : χ_{lid}

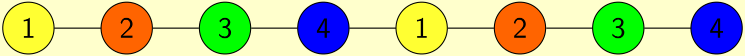
Des antécédents :

- coloration des arêtes + global (Hornak et al, 95'),
- coloration des arêtes + local (Zhang et al, 02')
- coloration totale (local) (Zhang, 05')

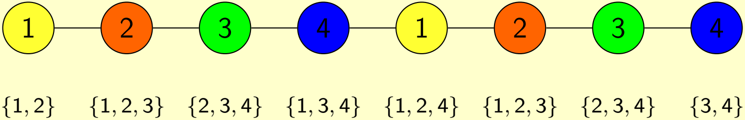
Le chemin avec 4 couleurs



Le chemin avec 4 couleurs



Le chemin avec 4 couleurs

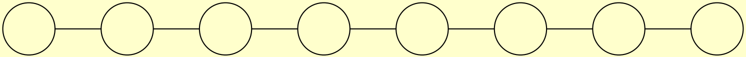


On a donc :

$$\chi_{lid}(P_k) \leq 4$$

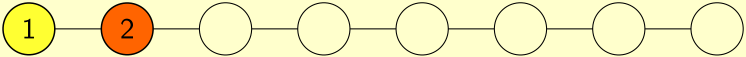
Et avec 3 couleurs ?

Peut-on faire avec 3 couleurs ?



Et avec 3 couleurs ?

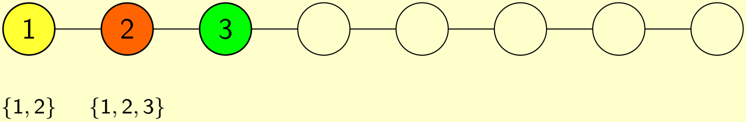
Peut-on faire avec 3 couleurs ?



$\{1,2\}$

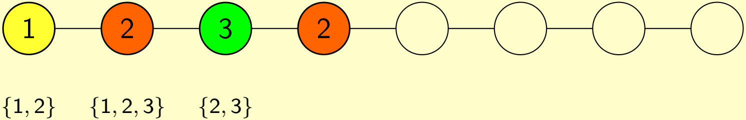
Et avec 3 couleurs ?

Peut-on faire avec 3 couleurs ?



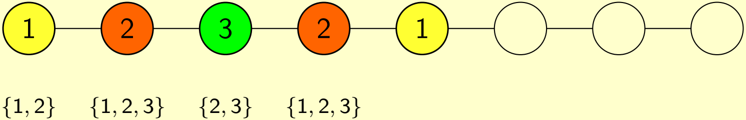
Et avec 3 couleurs ?

Peut-on faire avec 3 couleurs ?



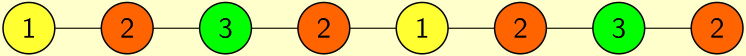
Et avec 3 couleurs ?

Peut-on faire avec 3 couleurs ?



Et avec 3 couleurs ?

Peut-on faire avec 3 couleurs ?

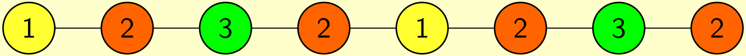


$\{1,2\}$ $\{1,2,3\}$ $\{2,3\}$ $\{1,2,3\}$ $\{1,2\}$ $\{1,2,3\}$ $\{2,3\}$ $\{2,3\}$

Si k est pair : $\chi_{lid}(P_k) = 4$

Et avec 3 couleurs ?

Peut-on faire avec 3 couleurs ?

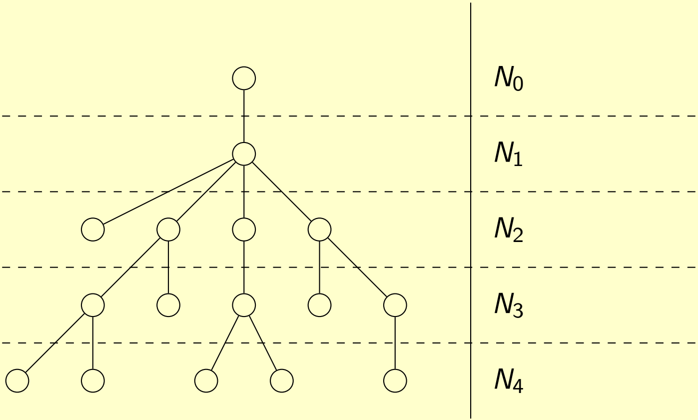


$\{1,2\}$ $\{1,2,3\}$ $\{2,3\}$ $\{1,2,3\}$ $\{1,2\}$ $\{1,2,3\}$ $\{2,3\}$ $\{2,3\}$

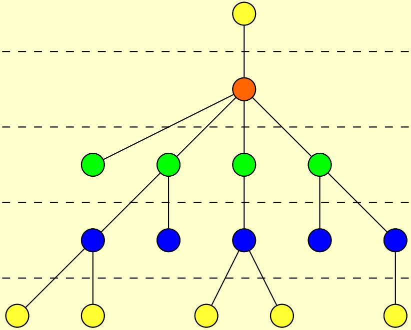
Si k est pair : $\chi_{lid}(P_k) = 4$
En conclusion :

$$\chi_{lid}(P_k) = 3 \Leftrightarrow k \text{ est impair}$$

Les arbres



Les arbres



$N_0 \rightarrow$ 1 $\{1,2\}$

$N_1 \rightarrow$ 2 $\{1,2,3\}$

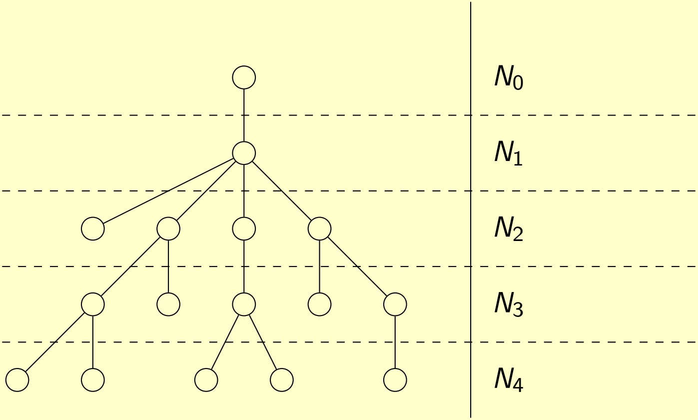
$N_2 \rightarrow$ 3 $\{2,3,4\}$ ou $\{2,3\}$

$N_3 \rightarrow$ 4 $\{1,3,4\}$ ou $\{3,4\}$

$N_4 \rightarrow$ 1 $\{1,4\}$

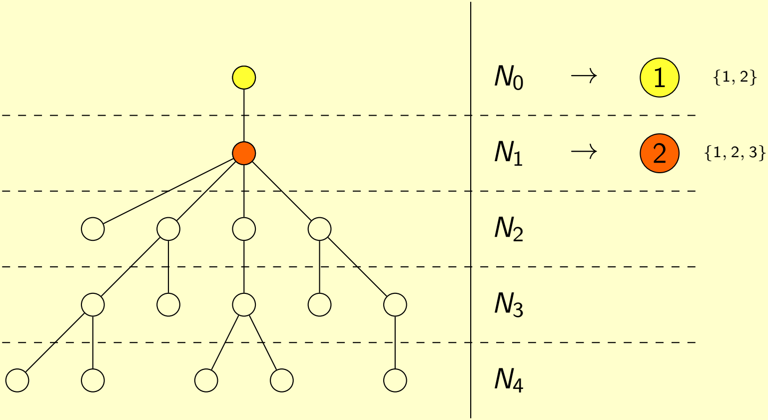
Les arbres avec seulement 3 couleurs

Avec 3 couleurs, on a nécessairement :



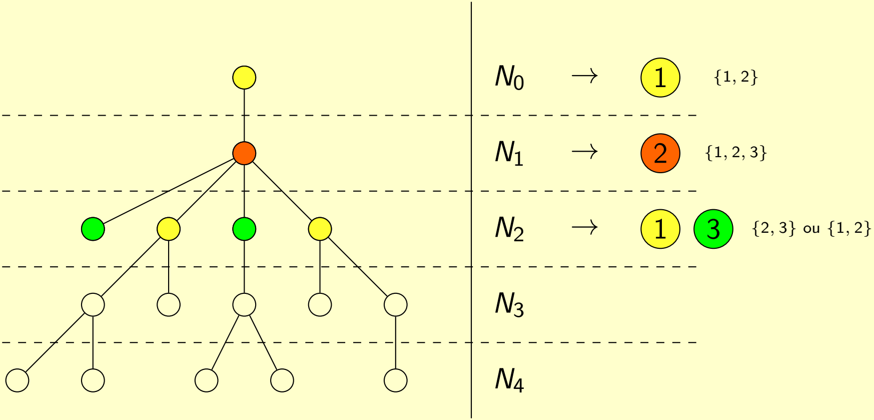
Les arbres avec seulement 3 couleurs

Avec 3 couleurs, on a nécessairement :



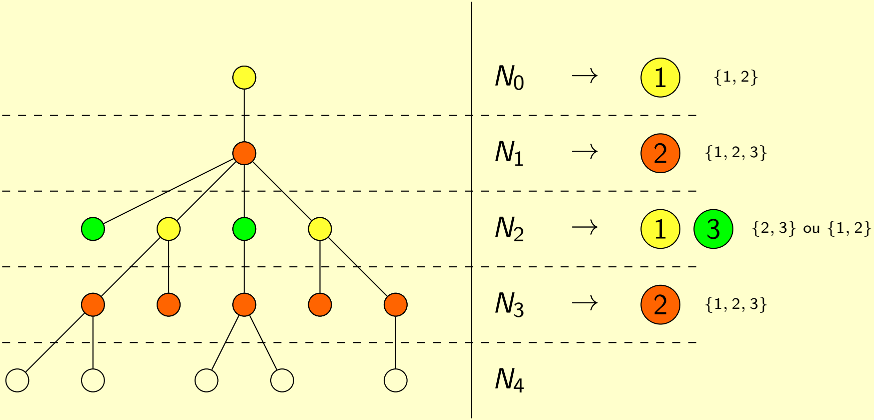
Les arbres avec seulement 3 couleurs

Avec 3 couleurs, on a nécessairement :



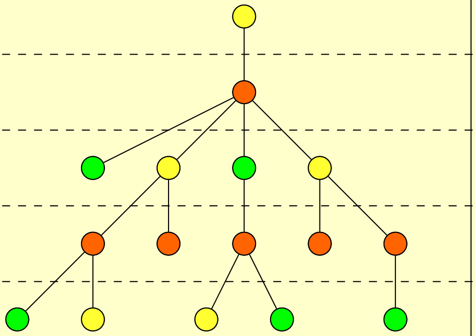
Les arbres avec seulement 3 couleurs

Avec 3 couleurs, on a nécessairement :



Les arbres avec seulement 3 couleurs

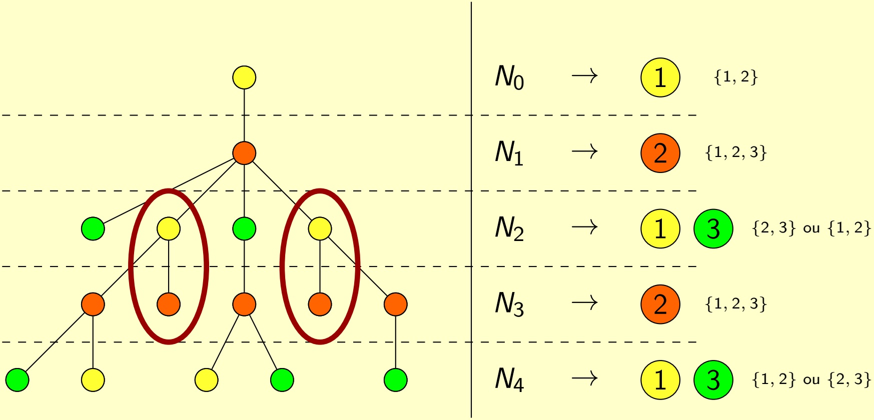
Avec 3 couleurs, on a nécessairement :



N_0	$\rightarrow$	1	$\{1,2\}$
N_1	$\rightarrow$	2	$\{1,2,3\}$
N_2	$\rightarrow$	1 3	$\{2,3\}$ ou $\{1,2\}$
N_3	$\rightarrow$	2	$\{1,2,3\}$
N_4	$\rightarrow$	1 3	$\{1,2\}$ ou $\{2,3\}$

Les arbres avec seulement 3 couleurs

Avec 3 couleurs, on a nécessairement :



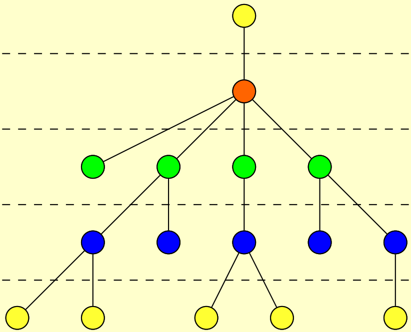
Conclusion sur les arbres

Finalement :

- $\rightarrow$ Un arbre se lid-colorie toujours avec 4 couleurs
- $\rightarrow$ Un arbre se colorie avec 3 couleurs ssi deux feuilles sont toujours à distance paire

Bipartis avec 4 couleurs

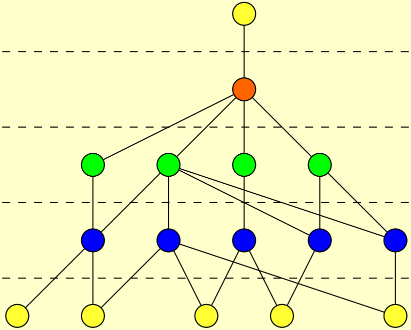
Reprenons la coloration avec 4 couleurs des arbres :



N_0	$\rightarrow$	1	$\{1,2\}$
N_1	$\rightarrow$	2	$\{1,2,3\}$
N_2	$\rightarrow$	3	$\{2,3,4\}$ ou $\{2,3\}$
N_3	$\rightarrow$	4	$\{1,3,4\}$ ou $\{3,4\}$
N_4	$\rightarrow$	1	$\{1,4\}$

Bipartis avec 4 couleurs

On peut l'étendre aux graphes bipartis



N_0	$\rightarrow$	1	$\{1,2\}$
N_1	$\rightarrow$	2	$\{1,2,3\}$
N_2	$\rightarrow$	3	$\{2,3,4\}$ ou $\{2,3\}$
N_3	$\rightarrow$	4	$\{1,3,4\}$ ou $\{3,4\}$
N_4	$\rightarrow$	1	$\{1,4\}$

Bipartis avec 4 couleurs

On a donc encore :

$\rightarrow$ Tout graphe biparti se colorie avec 4 couleurs.

Mais avec 3 couleurs . . .

Bipartis avec 4 couleurs

On a donc encore :

$\rightarrow$ Tout graphe biparti se colorie avec 4 couleurs.

Mais avec 3 couleurs . . .

C'est NP-complet !

Bipartis avec 3 couleurs

Réduction à partir de la 2-coloration des hypergraphes (Lovász, 73')

Bipartis avec 3 couleurs

Réduction à partir de la 2-coloration des hypergraphes (Lovász, 73')

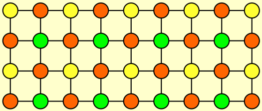
Ca reste NP complet si l'on se restreint aux bipartis 3-reguliers de grande maille

Parfois cela se passe bien

Polynomial pour :

- les arbres,
- les cycles,
- les produits cartésiens de bipartis (grille, hypercube...) (toujours 3-lid coloriable) :

	A_1	B_2
A_2	1	2
B_2	2	3



Lien avec le nombre chromatique

Borne inférieure :

- Nécessairement : $\chi(G) \leq \chi_{lid}(G)$
- Egalité ?

$$\chi(G) = \chi_{lid}(G) = 3 \text{ ssi } G \text{ est un triangle.}$$

Lien avec le nombre chromatique

Borne inférieure :

- Nécessairement : $\chi(G) \leq \chi_{lid}(G)$
- Egalité ?

$$\chi(G) = \chi_{lid}(G) = 3 \text{ ssi } G \text{ est un triangle.}$$

Borne supérieure ?

- Il y a des graphes avec $\chi(G) = 3$ et $\chi_{lid}(G)$ très grand :
- Pas de borne supérieure avec une fonction de $\chi(G)$
- Mais : $\chi_{lid}(G) \leq \chi(G^3)$

Lien avec le degré maximum

Pour la coloration classique, théoréme de Vizing :

Tout graphe se colorie avec moins de $\Delta + 1$ *couleurs*

Lien avec le degré maximum

Pour la coloration classique, théoréme de Vizing :

Tout graphe se colorie avec moins de $\Delta + 1$ *couleurs*

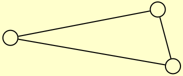
Avec la coloration localement identifiante :

Tout graphe se lid-colorie avec moins de $\Delta^3 - \Delta^2 + \Delta + 1$ *couleurs*

On connait des graphes avec $\chi_{lid}(G) = \Delta^2 + \Delta + 1$.

Les 2-arbres

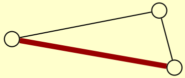
Construction des 2-arbres :



- On part d'un triangle

Les 2-arbres

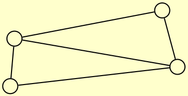
Construction des 2-arbres :



- On part d'un triangle
- on choisit une arête,

Les 2-arbres

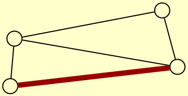
Construction des 2-arbres :



- On part d'un triangle
- on choisit une arête,
- on ajoute un point relié aux deux sommets de l'arête

Les 2-arbres

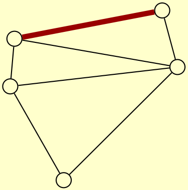
Construction des 2-arbres :



- On part d'un triangle
- on choisit une arête,
- on ajoute un point relié aux deux sommets de l'arête
- on recommence

Les 2-arbres

Construction des 2-arbres :

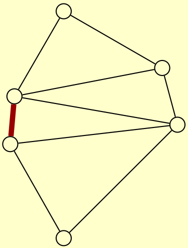


- On part d'un triangle
- on choisit une arête,
- on ajoute un point relié aux deux sommets de l'arête
- on recommence

Remarque : toute arête est dans un triangle

Les 2-arbres

Construction des 2-arbres :

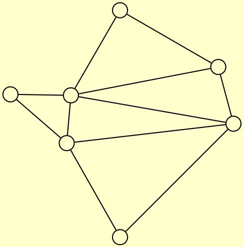


- On part d'un triangle
- on choisit une arête,
- on ajoute un point relié aux deux sommets de l'arête
- on recommence

Remarque : toute arête est dans un triangle

Les 2-arbres

Construction des 2-arbres :

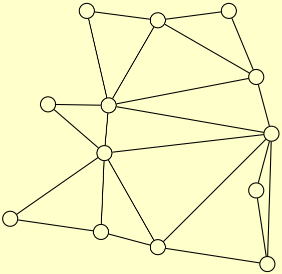


- On part d'un triangle
- on choisit une arête,
- on ajoute un point relié aux deux sommets de l'arête
- on recommence

Remarque : toute arête est dans un triangle

Les 2-arbres

Construction des 2-arbres :

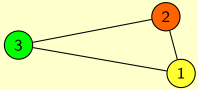


- On part d'un triangle
- on choisit une arête,
- on ajoute un point relié aux deux sommets de l'arête
- on recommence

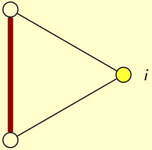
Remarque : toute arête est dans un triangle

Les 2-arbres

Coloration en 6 couleurs :

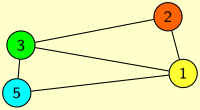


- On colorie le triangle avec les couleurs $1, 2, 3$
- Etape :

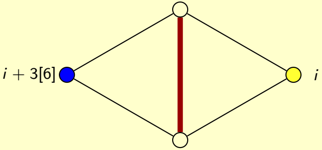


Les 2-arbres

Coloration en 6 couleurs :



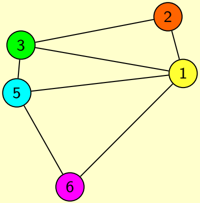
- On colorie le triangle avec les couleurs $1, 2, 3$
- Etape :



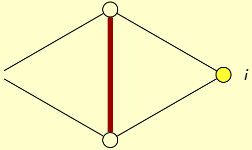
- Invariants :
  - coloration propre
  - pas d'arête $i, i + 3$

Les 2-arbres

Coloration en 6 couleurs :



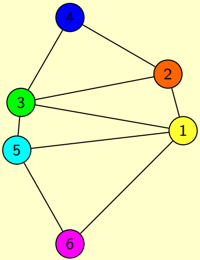
- On colorie le triangle avec les couleurs $1, 2, 3$
- Etape :



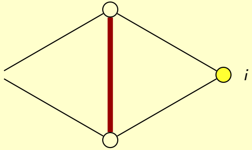
- Invariants :
  - coloration propre
  - pas d'arête $i, i+3$

Les 2-arbres

Coloration en 6 couleurs :



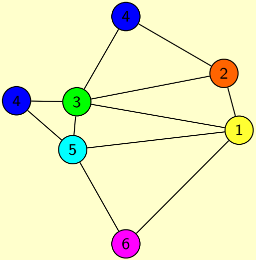
- On colorie le triangle avec les couleurs $1, 2, 3$
- Etape :



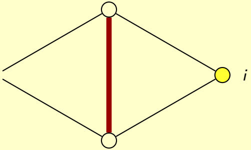
- Invariants :
  - coloration propre
  - pas d'arête $i, i+3$

Les 2-arbres

Coloration en 6 couleurs :



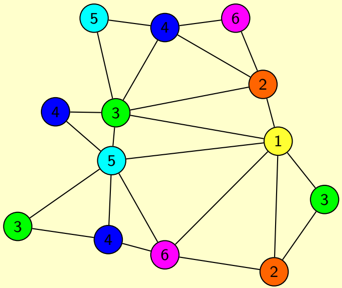
- On colorie le triangle avec les couleurs $1, 2, 3$
- Etape :



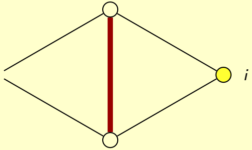
- Invariants :
  - coloration propre
  - pas d'arête $i, i + 3$

Les 2-arbres

Coloration en 6 couleurs :



- On colorie le triangle avec les couleurs $1, 2, 3$
- Etape :



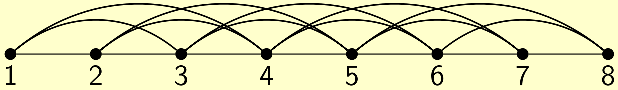
- Invariants :
  - coloration propre
  - pas d'arête $i, i+3$

Les k-arbres

On peut faire exactement la même chose sur les k-arbres :

→ Tout k-arbre se lid-colorie avec $2k + 2$ couleurs

Cette borne est serrée : P^k_{2k+2}



Généralisons encore ?

Un graphe triangulé possède un ordre simplicial : un sommet est ajouté à une clique de taille variable.

Peut-on faire la même chose qu'avec les k-arbres ?

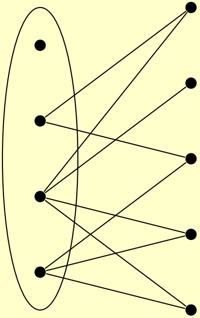
Conjecture : Tout graphe triangulé se lid-colorie avec $2\omega(G)$ couleurs

Les graphes splits

Un graphe split c'est

- une clique de taille k
- un stable
- ce qu'on veut entre les deux

C'est un graphe triangulé !



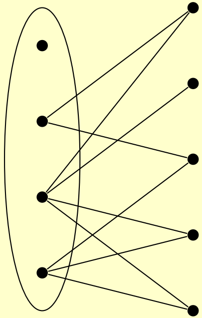
Les graphes splits

- Théorème de Bondy : $k-1$ sommets du stable permettent d'identifier les sommets de la clique

$\rightarrow$ On peut colorier avec $2k$ couleurs

$\rightarrow$ On peut même faire avec $2k-1$ couleurs

$\rightarrow$ c'est serré



k couleurs

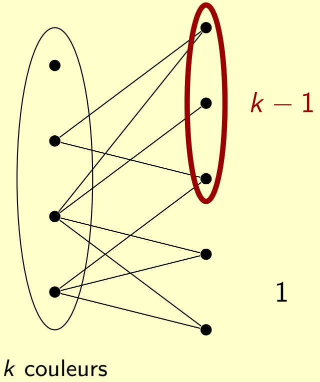
Les graphes splits

- Théorème de Bondy : $k-1$ sommets du stable permettent d'identifier les sommets de la clique

$\rightarrow$ On peut colorier avec $2k$ couleurs

$\rightarrow$ On peut même faire avec $2k-1$ couleurs

$\rightarrow$ c'est serré



Et pour les graphes planaires ?

Planaires extérieurs (tous les sommets sur face externe) :

$\rightarrow$ Maximaux : 2-arbres, 6 couleurs

$\rightarrow$ Cycles : en général 4 couleurs, 5 pour C_5 et C_7

$\rightarrow$ Sans triangles : 8 couleurs

$\rightarrow$ Quelconques : 20 couleurs

Et pour les graphes planaires ?

Planaires extérieurs (tous les sommets sur face externe) :

→ Maximaux : 2-arbres, 6 couleurs

→ Cycles : en général 4 couleurs, 5 pour C_5 et C_7

→ Sans triangles : 8 couleurs

→ Quelconques : 20 couleurs

- Mais les plus gros exemples : 6 couleurs

Planaires quelconques

$\rightarrow$ Avec une très grosse maille (66 !) : on fait 5 couleurs

Planaires quelconques

$\rightarrow$ Avec une très grosse maille (66 !) : on fait 5 couleurs

- Et sinon,... on ne sait pas si c'est borné !

Planaires quelconques

$\rightarrow$ Avec une très grosse maille (66 !) : on fait 5 couleurs

- Et sinon,... on ne sait pas si c'est borné !
- les plus gros exemples : 8 couleurs ($= 2\chi \ldots$)

Ce qu'il reste à faire...

A suivre (?) :

- une borne pour les planaires,
- les graphes triangulés avec 2χ couleurs,
- quels sont les graphes qui ont besoin de $|V|$ couleurs ?
- version globale

Merci !