

Journées Graphes et Algorithmes 2009

Deux variantes autour des codes identifiants

Olivier Delmas, Sylvain Gravier, Mickaël Montassier, Aline Parreau

5 novembre 2009

ANR IDEA 

maths à modeler



Codes r -identifiants

$G = (V, E)$ un graphe, $r \in \mathbb{N}$.

$C \subseteq V$ est un **code r -identifiant** si :

- C est un ensemble dominant :

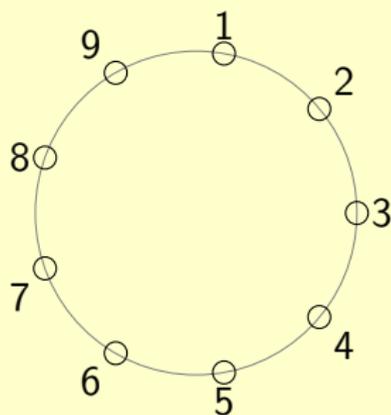
$$\forall x \in V, B_r(x) \cap C \neq \emptyset$$

- C r -sépare tous les sommets :

$$\forall x \in V, \forall y \in V, B_r(x) \cap C \neq B_r(y) \cap C$$

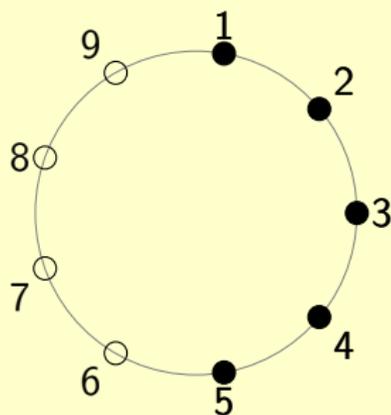
Codes r -identifiants

Exemple avec $r = 2$ sur \mathcal{C}_8 :



Codes r -identifiants

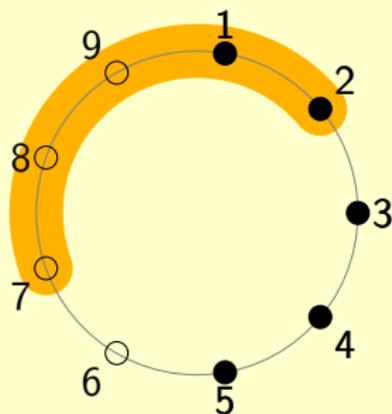
Exemple avec $r = 2$ sur \mathcal{C}_8 :



Codes r -identifiants

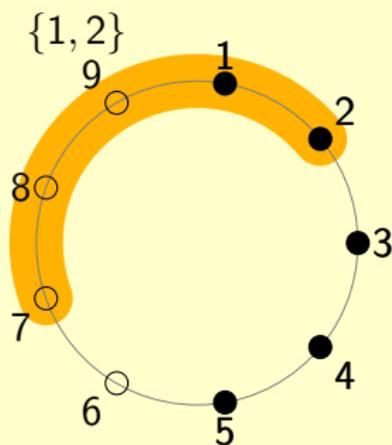
Exemple avec $r = 2$ sur \mathcal{C}_8 :

$B_2(9)$



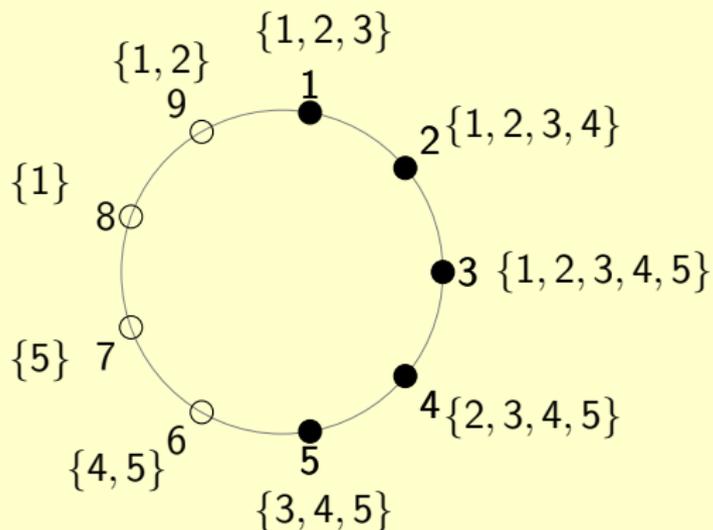
Codes r -identifiants

Exemple avec $r = 2$ sur \mathcal{C}_8 :



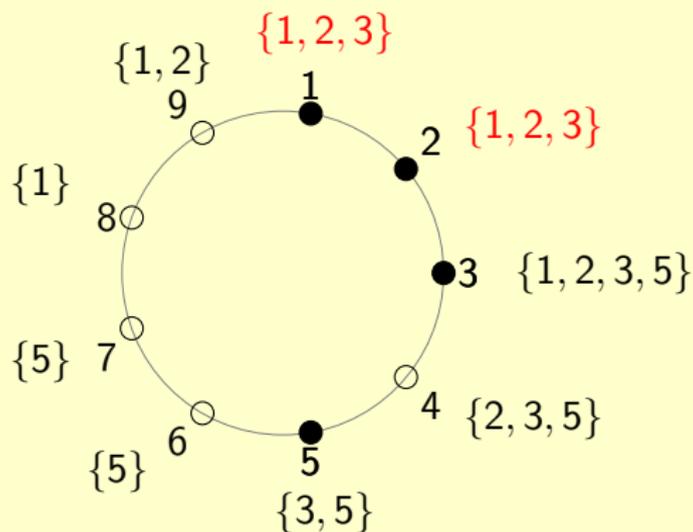
Codes r -identifiants

Exemple avec $r = 2$ sur \mathcal{C}_8 :



Codes r -identifiants

Exemple avec $r = 2$ sur \mathcal{C}_8 :



Une première variante

$G = (V, E)$ un graphe, $r \in \mathbb{N}$.

$C \subseteq V$ est un **code r -identifiant** si :

- C est un ensemble dominant :

$$\forall x \in V, B_r(x) \cap C \neq \emptyset$$

- C r -sépare tous les sommets :

$$\forall x \in V, \forall y \in V, B_r(x) \cap C \neq B_r(y) \cap C$$

Une première variante

$G = (V, E)$ un graphe, $r \in \mathbb{N}$.

$C \subseteq V$ est un **code r -identifiant faible** si :

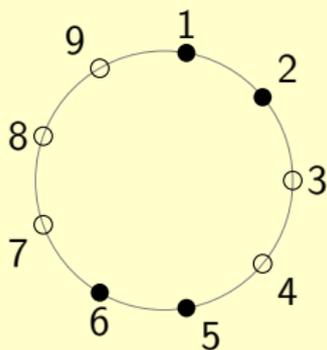
- C est un ensemble dominant :

$$\forall x \in V, B_r(x) \cap C \neq \emptyset$$

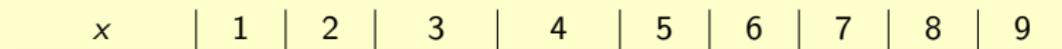
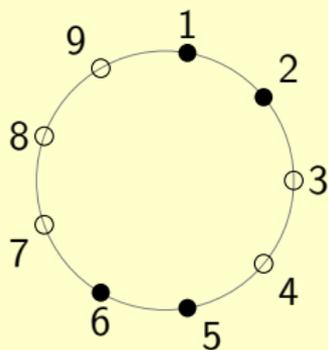
- C r -sépare **faiblement** tous les sommets :

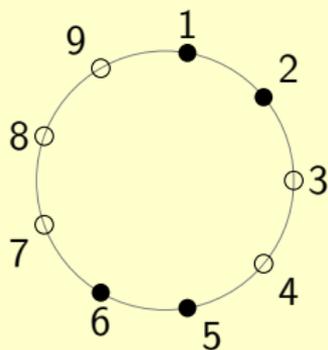
$$\forall x \in V, \exists r_x \in [0, r], \forall y \in V, B_{r_x}(x) \cap C \neq B_{r_x}(y) \cap C$$

Codes r -identifiants faibles

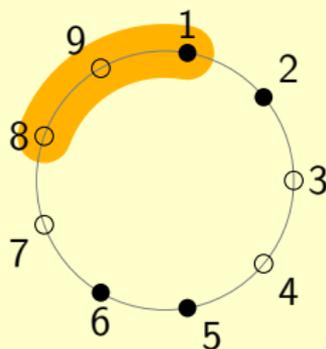


Codes r -identifiants faibles

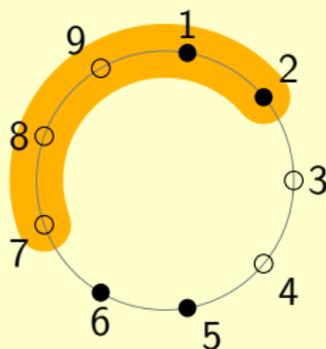


Codes r -identifiants faibles

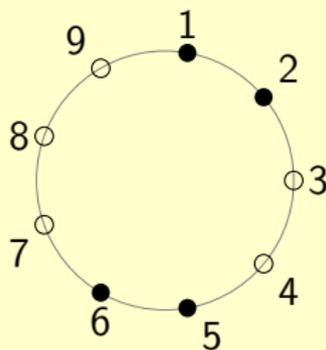
x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$B_0(x) \cap C$	1	2	\emptyset	\emptyset	5	6	\emptyset	\emptyset	\emptyset

Codes r -identifiants faibles

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$B_0(x) \cap C$	1	2	\emptyset	\emptyset	5	6	\emptyset	\emptyset	\emptyset
$B_1(x) \cap C$	1, 2	1, 2	2	5	5, 6	5, 6	6	\emptyset	1

Codes r -identifiants faibles

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$B_0(x) \cap C$	1	2	\emptyset	\emptyset	5	6	\emptyset	\emptyset	\emptyset
$B_1(x) \cap C$	1, 2	1, 2	2	5	5, 6	5, 6	6	\emptyset	1
$B_2(x) \cap C$	1, 2	1, 2	1, 2, 5	2, 5, 6	5, 6	5, 6	5, 6	1, 6	1, 2

Codes r -identifiants faibles

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$B_0(x) \cap C$	1	2	\emptyset	\emptyset	5	6	\emptyset	\emptyset	\emptyset
$B_1(x) \cap C$	1, 2	1, 2	2	5	5, 6	5, 6	6	\emptyset	1
$B_2(x) \cap C$	1, 2	1, 2	1, 2, 5	2, 5, 6	5, 6	5, 6	5, 6	1, 6	1, 2
r_x	0	0	1	1	0	0	1	2	1

Une deuxième variante

$G = (V, E)$ un graphe, $r \in \mathbb{N}$.

$C \subseteq V$ est un **code r -identifiant faible** si :

- C est un ensemble dominant :

$$\forall x \in V, B_r(x) \cap C \neq \emptyset$$

- C r -sépare faiblement tous les sommets :

$$\forall x \in V, \exists r_x \in [0, r], \forall y \in V, B_{r_x}(x) \cap C \neq B_{r_x}(y) \cap C$$

Une deuxième variante

$G = (V, E)$ un graphe, $r \in \mathbb{N}$.

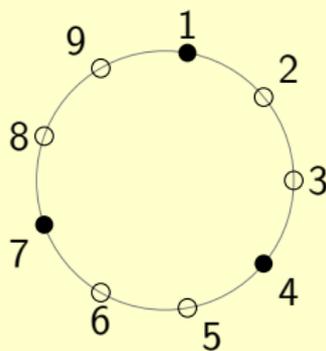
$C \subseteq V$ est un **code r -identifiant allégé** si :

- C est un ensemble dominant :

$$\forall x \in V, B_r(x) \cap C \neq \emptyset$$

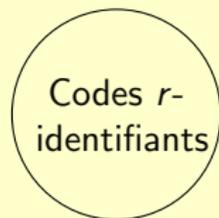
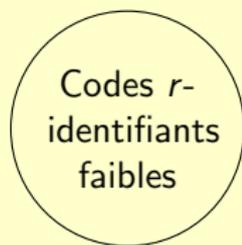
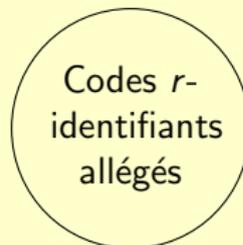
- C r -sépare **légèrement** tous les sommets :

$$\forall x, y \in V^2, \exists r_{xy} \in [0, r], B_{r_{xy}}(x) \cap C \neq B_{r_{xy}}(y) \cap C$$

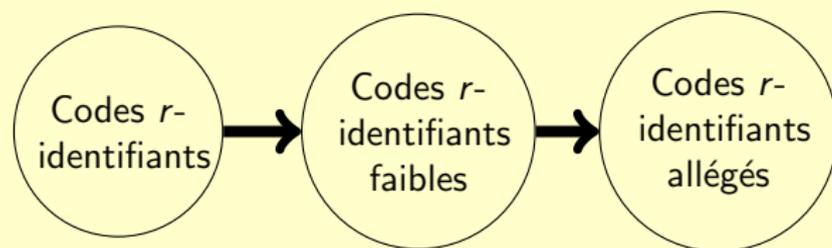
Codes r -identifiants allégés

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$B_0(x) \cap C$	1	\emptyset	\emptyset	4	\emptyset	\emptyset	7	\emptyset	\emptyset
$B_1(x) \cap C$	1	1	4	4	4	7	7	7	1
$B_2(x) \cap C$	1	1,4	1,4	4	4,7	4,7	7	1,7	1,7

Inclusions

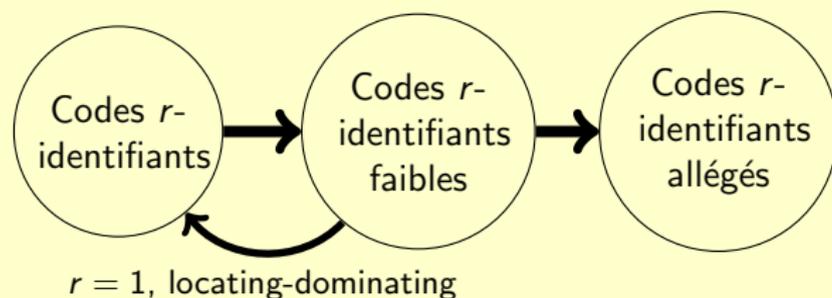
 $IC_r(G)$  $WC_r(G)$  $LC_r(G)$

Inclusions

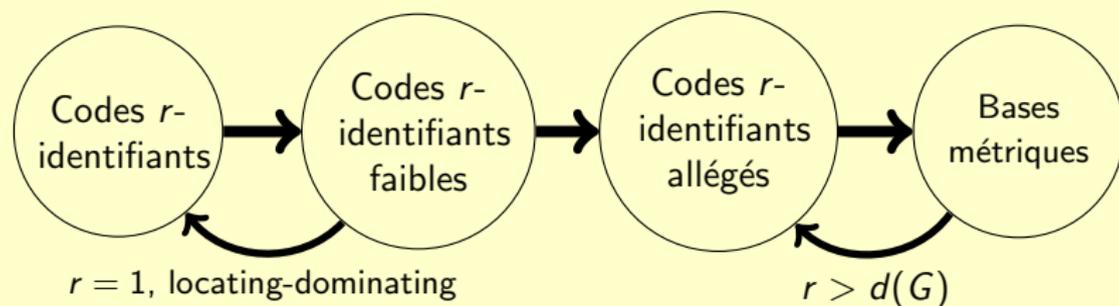


$$IC_r(G) \geq WC_r(G) \geq LC_r(G)$$

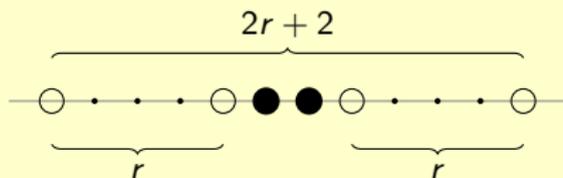
Inclusions



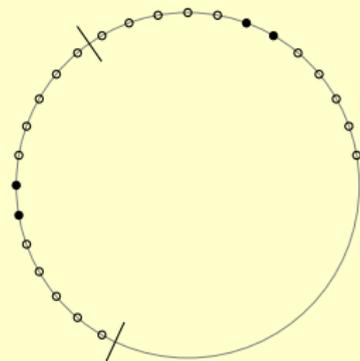
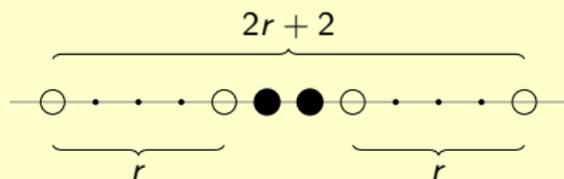
Inclusions



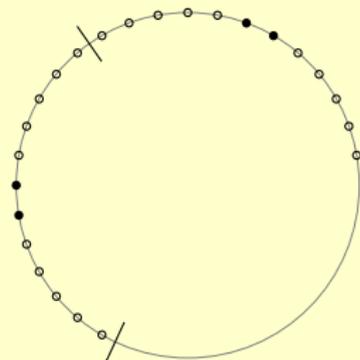
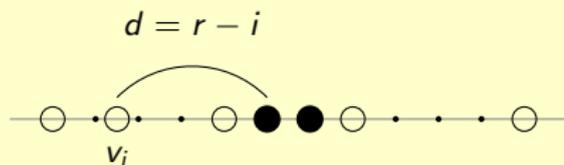
Codes faibles sur les cycles



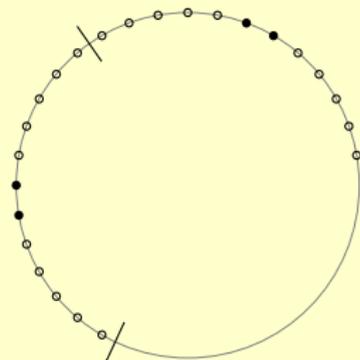
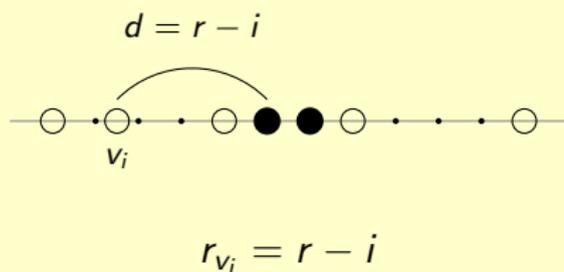
Codes faibles sur les cycles



Codes faibles sur les cycles



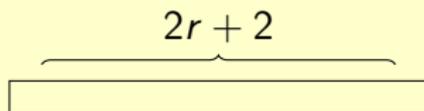
Codes faibles sur les cycles



Si $n = (2r + 2)p$, il y a un code r -identifiant faible de taille $2p$.

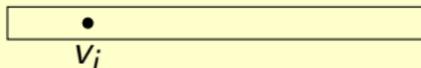
Optimalité

Dans $2r + 2$ sommets consécutifs, il y a au moins deux sommets du code



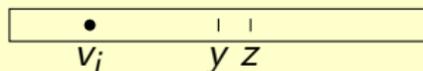
Optimalité

Dans $2r + 2$ sommets consécutifs, il y a au moins deux sommets du code



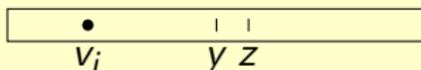
Optimalité

Dans $2r + 2$ sommets consécutifs, il y a au moins deux sommets du code



Optimalité

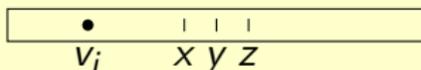
Dans $2r + 2$ sommets consécutifs, il y a au moins deux sommets du code



$$r_y = r_z = d(y, v_i)$$

Optimalité

Dans $2r + 2$ sommets consécutifs, il y a au moins deux sommets du code

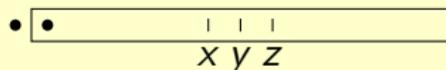


$$r_y = r_z = d(y, v_i)$$

$$r_x = r_y = r$$

Optimalité

Dans $2r + 2$ sommets consécutifs, il y a au moins deux sommets du code

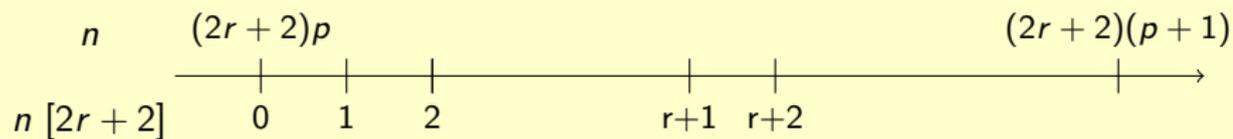


$$r_y = r_z = d(y, v_i)$$

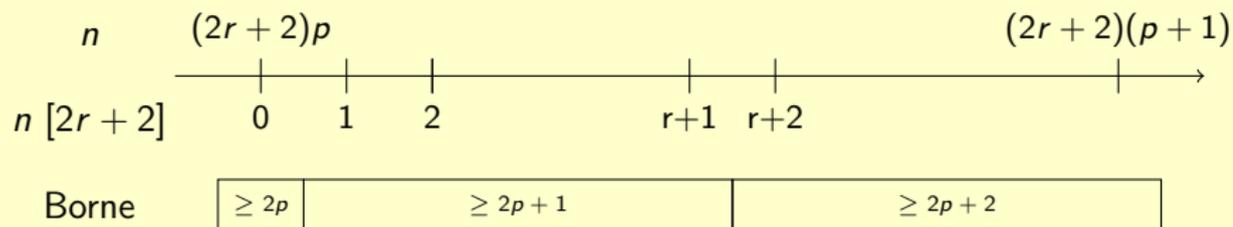
$$r_x = r_y = r$$

z n'est pas dominé !

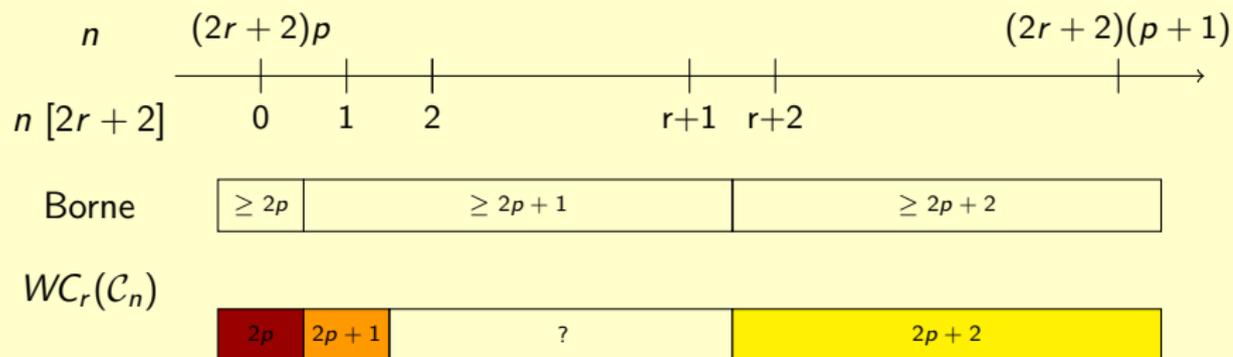
Pour les autres cycles ?



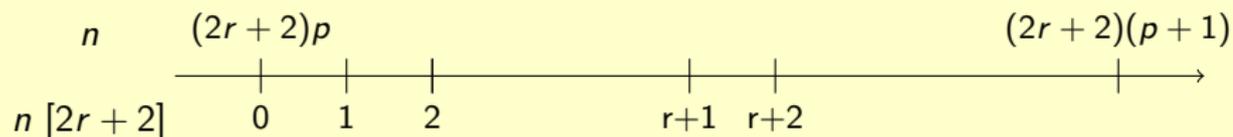
Pour les autres cycles ?



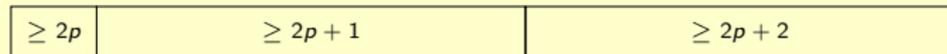
Pour les autres cycles ?



Pour les autres cycles ?

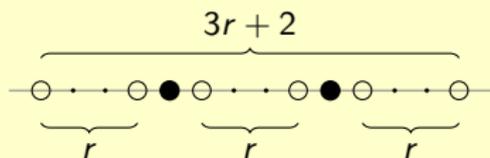


Borne

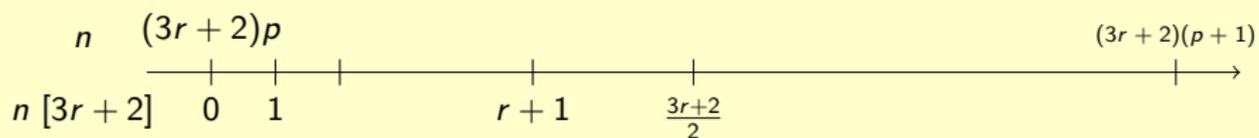
 $WC_r(C_n)$ $r \leq 2$  $r > 2$ 

Codes allégés

Les périodes sont de $3r + 2$ sommets :



Borne exacte :



$LC_r(C_n)$

$2p$

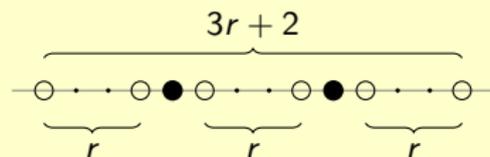
$2p + 1$

?

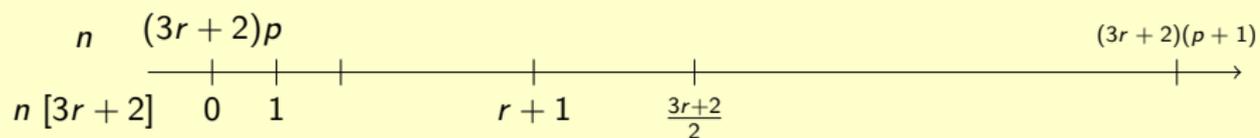
$2p + 2$

Codes allégés

Les périodes sont de $3r + 2$ sommets :



Borne exacte :



$LC_r(C_n)$

$2p$

$2p + 1$

$2p + 2$

En conclusion

- Résultats complets pour les cycles, contrairement aux codes identifiants
- Variantes qui pourraient permettre de trouver de nouvelles bornes ?

Pour continuer :

- Uniformiser toutes les définitions
- Etudier ces variantes sur d'autres graphes