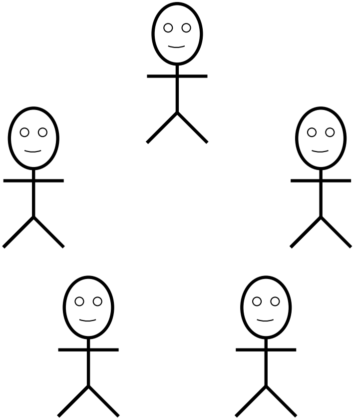
De quelle couleur est mon chapeau ?

Aline Parreau

26 octobre 2011

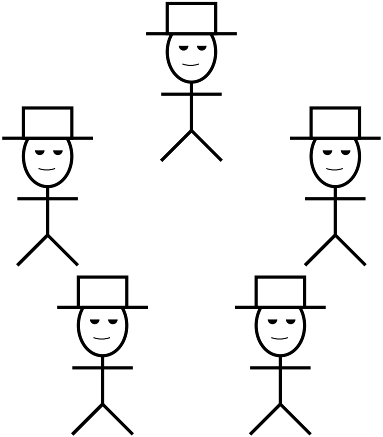
Journées Maths à Modeler 2011

Exposé du problème (Ebert, 1998)



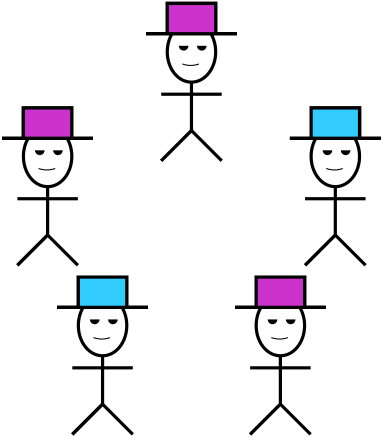
- N personnes

Exposé du problème (Ebert, 1998)



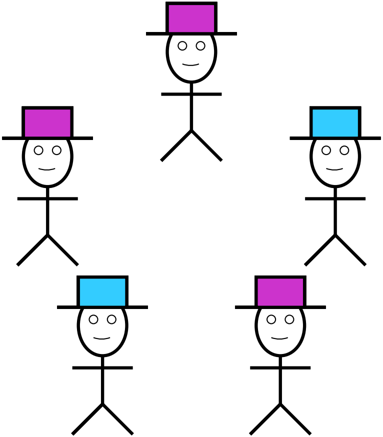
- N personnes

Exposé du problème (Ebert, 1998)



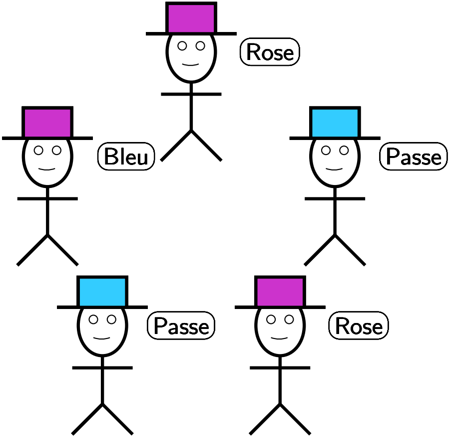
- N personnes
- Chapeau Rose(R) ou Bleu(B) (proba 1/2)

Exposé du problème (Ebert, 1998)



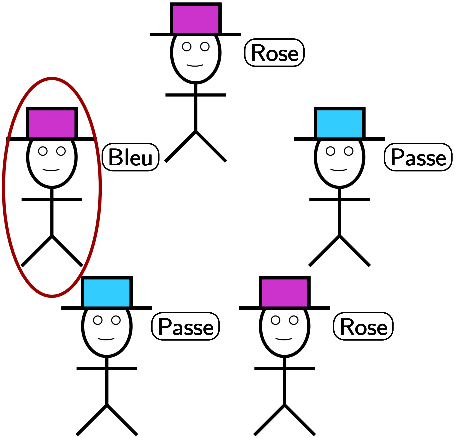
- N personnes
- Chapeau Rose(R) ou Bleu(B) (proba 1/2)
- Tout le monde parle en même temps :
  - soit une couleur,
  - soit passe

Exposé du problème (Ebert, 1998)



- N personnes
- Chapeau Rose(R) ou Bleu(B) (proba 1/2)
- Tout le monde parle en même temps :
  - soit une couleur,
  - soit passe
- L'équipe gagne si :
  - au moins une personne parle
  - personne ne se trompe

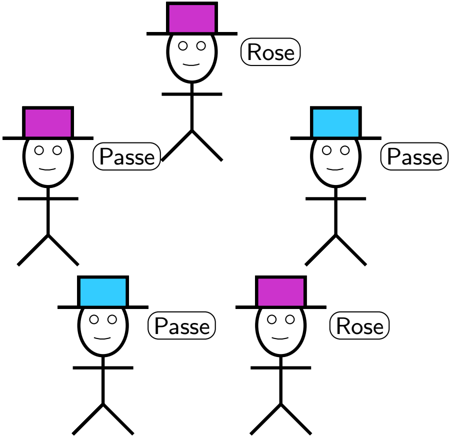
Exposé du problème (Ebert, 1998)



Perdu !

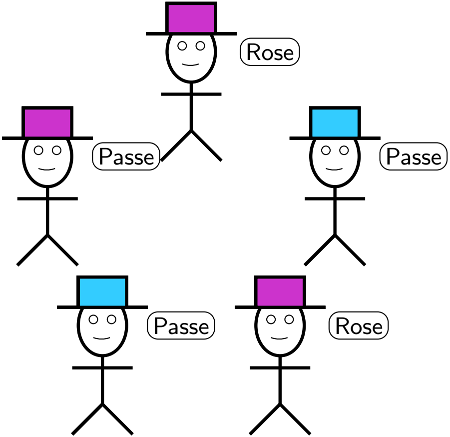
- N personnes
- Chapeau Rose(R) ou Bleu(B) (proba 1/2)
- Tout le monde parle en même temps :
  - soit une couleur,
  - soit passe
- L'équipe gagne si :
  - au moins une personne parle
  - personne ne se trompe

Exposé du problème (Ebert, 1998)



- N personnes
- Chapeau Rose(R) ou Bleu(B) (proba 1/2)
- Tout le monde parle en même temps :
  - soit une couleur,
  - soit passe
- L'équipe gagne si :
  - au moins une personne parle
  - personne ne se trompe

Exposé du problème (Ebert, 1998)

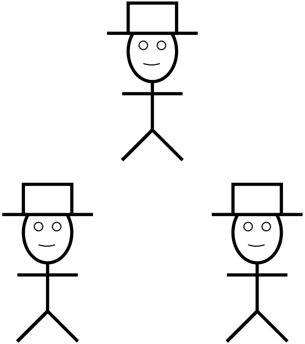


- N personnes
- Chapeau Rose(R) ou Bleu(B) (proba 1/2)
- Tout le monde parle en même temps :
  - soit une couleur,
  - soit passe
- L'équipe gagne si :
  - au moins une personne parle
  - personne ne se trompe

Gagné !

Comment gagner le plus souvent possible ?

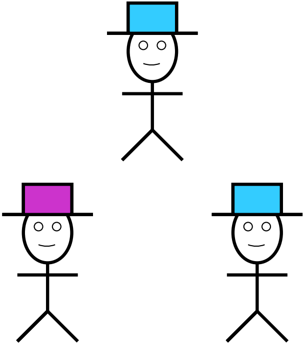
Avec trois personnes



Stratégie 1 :

- Deux joueurs passent tout le temps, le troisième dit toujours Rose

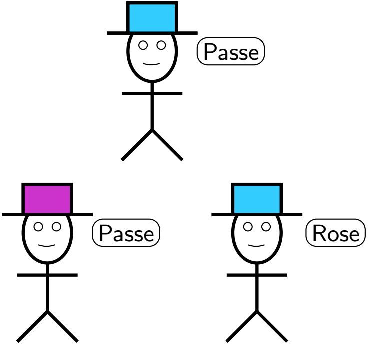
Avec trois personnes



Stratégie 1 :

- Deux joueurs passent tout le temps, le troisième dit toujours Rose

Avec trois personnes

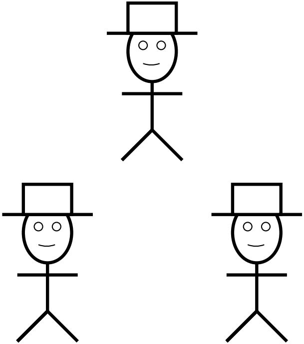


Perdu !

Stratégie 1 :

- Deux joueurs passent tout le temps, le troisième dit toujours Rose
- Gagne une fois sur deux.

Avec trois personnes



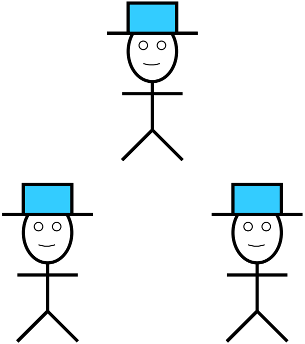
Stratégie 1 :

- Deux joueurs passent tout le temps, le troisième dit toujours Rose
- Gagne une fois sur deux.

Stratégie 2 :

- Même rôle pour tous les joueurs
- Si voit deux Bleus dit Rose. Si voit deux Roses dit Bleu

Avec trois personnes



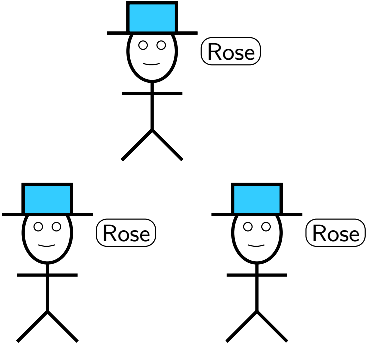
Stratégie 1 :

- Deux joueurs passent tout le temps, le troisième dit toujours Rose
- Gagne une fois sur deux.

Stratégie 2 :

- Même rôle pour tous les joueurs
- Si voit deux Bleus dit Rose. Si voit deux Roses dit Bleu

Avec trois personnes



Perdu !

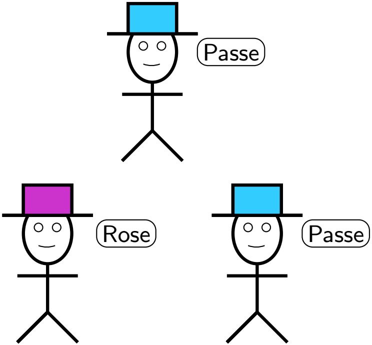
Stratégie 1 :

- Deux joueurs passent tout le temps, le troisième dit toujours Rose
- Gagne une fois sur deux.

Stratégie 2 :

- Même rôle pour tous les joueurs
- Si voit deux Bleus dit Rose. Si voit deux Roses dit Bleu
- Perdu $\Leftrightarrow$ BBB ou RRR

Avec trois personnes



Gagné !

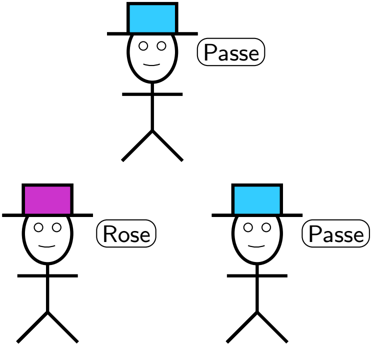
Stratégie 1 :

- Deux joueurs passent tout le temps, le troisième dit toujours Rose
- Gagne une fois sur deux.

Stratégie 2 :

- Même rôle pour tous les joueurs
- Si voit deux Bleus dit Rose. Si voit deux Roses dit Bleu
- Perdu $\Leftrightarrow$ BBB ou RRR

Avec trois personnes



Gagné !

Stratégie 1 :

- Deux joueurs passent tout le temps, le troisième dit toujours Rose
- Gagne une fois sur deux.

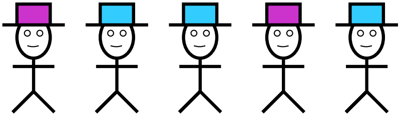
Stratégie 2 :

- Même rôle pour tous les joueurs
- Si voit deux Bleus dit Rose. Si voit deux Roses dit Bleu
- Perdu $\Leftrightarrow$ BBB ou RRR
- Probabilité de gain : $\frac{3}{4}$

Peut-on faire mieux ?

Formalisation

- Configuration : mot de $\{R, B\}^N$



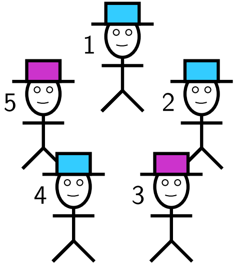
$= RBBRB$

- 2^N configurations
- Pour une stratégie donnée :
  - C_G : ensemble des configurations gagnantes
  - C_P : ensemble des configurations perdantes car quelqu'un se trompe
  - C_N : ensemble des configuations perdantes car tout le monde passe
- Probabilité de gain : $\frac{|C_G|}{2^N}$.
- $h(N)$ probabilité meilleure stratégie

$$h(N) \geq \frac{1}{2}$$

Cas général

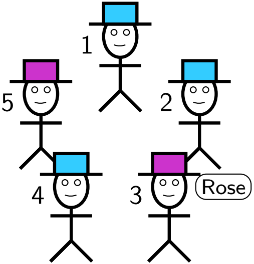
- Supposons que la configuration BBRBR soit gagnante.



BBRBR gagnante

Cas général

- Supposons que la configuration BBRBR soit gagnante.

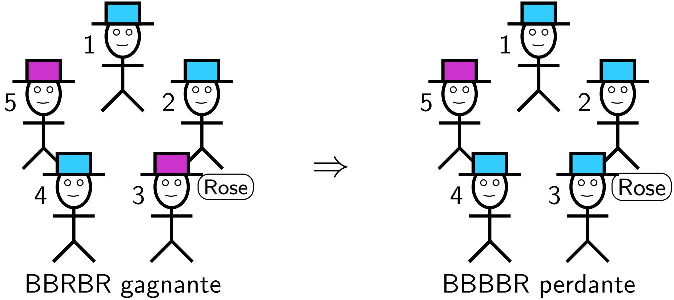


BBRBR gagnante

- Un joueur devine juste, supposons que ce soit le joueur 3.

Cas général

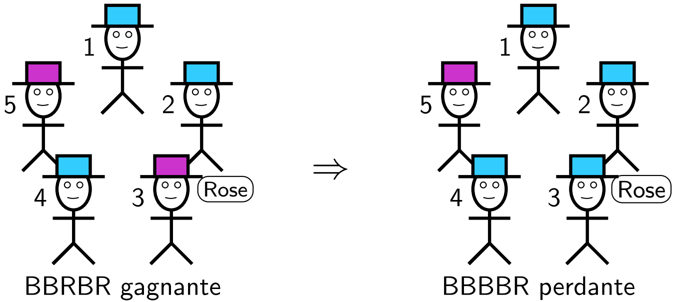
- Supposons que la configuration BBRBR soit gagnante.



- Un joueur devine juste, supposons que ce soit le joueur 3.
- Alors BBBBR est perdante

Cas général

- Supposons que la configuration BBRBR soit gagnante.



- Un joueur devine juste, supposons que ce soit le joueur 3.
- Alors BBBBR est perdante
- Toute configuration gagnante est "voisine" d'une situation perdante !

Configurations voisines

- Deux configurations sont voisines si un seul chapeau change de couleur.
  - *Exemple :* RRBRR et RRBRB sont voisines

Configurations voisines

- Deux configurations sont voisines si un seul chapeau change de couleur.
  - *Exemple :* RRBRR et RRBRB sont voisines
- Une configuration gagnante est toujours voisine d'une configuration perdante

Configurations voisines

- Deux configurations sont voisines si un seul chapeau change de couleur.
  - *Exemple :* RRBRR et RRBRB sont voisines
- Une configuration gagnante est toujours voisine d'une configuration perdante
- Une configuration a N configurations voisines
- Une configuration perdante a au plus N voisines gagnantes

Configurations voisines

- Deux configurations sont voisines si un seul chapeau change de couleur.
  - *Exemple :* RRBRR et RRBRB sont voisines
- Une configuration gagnante est toujours voisine d'une configuration perdante
- Une configuration a N configurations voisines
- Une configuration perdante a au plus N voisines gagnantes
- Il y a au plus N fois plus de configurations gagnantes que perdantes !

$$|C_G| \leq N|C_P| \;\Rightarrow\; h(N) \leq \frac{N}{N+1}$$

- En particulier : $h(3) = \frac{3}{4}$, notre stratégie était optimale !

Peut-on en dire plus ?

Borne obtenue si chaque configuration perdante a exactement N voisines gagnantes. $\rightarrow$ Est-ce toujours possible ?

Peut-on en dire plus ?

Borne obtenue si chaque configuration perdante a exactement N voisines gagnantes. $\rightarrow$ Est-ce toujours possible ?

Ensemble des configurations représenté par un graphe :

- Sommets : configurations
- Arêtes : configurations voisines

Peut-on en dire plus ?

Borne obtenue si chaque configuration perdante a exactement N voisines gagnantes. $\rightarrow$ Est-ce toujours possible ?

Ensemble des configurations représenté par un graphe :

- Sommets : configurations
- Arêtes : configurations voisines

$$\begin{tikzcd} \mathrm{R} \arrow[d, dash] \\ \mathrm{B} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathrm{RB} \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & \mathrm{RR} \arrow[d, dash] \\ \mathrm{BB} \arrow[r, dash] & \mathrm{BR} \end{tikzcd}$$

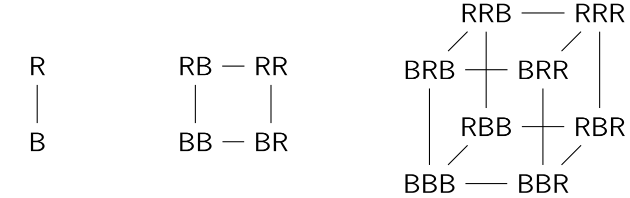
$N = 1$ $\qquad$ $N = 2$

Peut-on en dire plus ?

Borne obtenue si chaque configuration perdante a exactement N voisines gagnantes. → Est-ce toujours possible ?

Ensemble des configurations représenté par un graphe :

- Sommets : configurations
- Arêtes : configurations voisines



$N = 1$ $\quad$ $N = 2$ $\quad$ $N = 3$

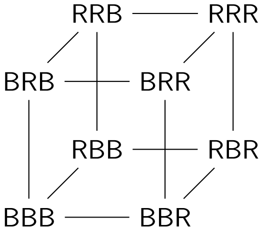
C'est l'hypercube !

Arête : 2 possibilités d'un joueur pour une situation donnée

Construction d'une stratégie

Idée : faire perdre tout le monde en même temps.

- On fixe des configurations perdantes



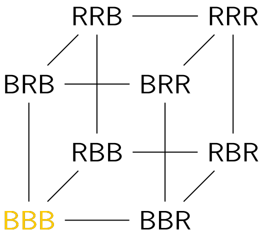
Construction d'une stratégie

Idée : faire perdre tout le monde en même temps.

- On fixe des configurations perdantes

C_P : perdu

C_G : gagne



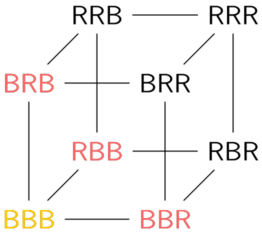
Construction d'une stratégie

Idée : faire perdre tout le monde en même temps.

- On fixe des configurations perdantes
- Toutes les voisines non perdantes sont gagnantes

C_P : perdu

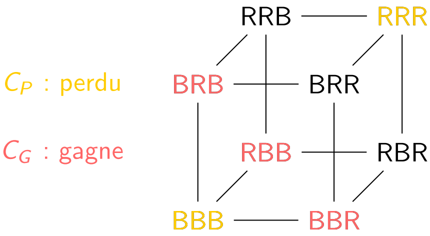
C_G : gagne



Construction d'une stratégie

Idée : faire perdre tout le monde en même temps.

- On fixe des configurations perdantes
- Toutes les voisines non perdantes sont gagnantes
- On continue pour que toutes les configurations soit gagnantes ou perdantes.



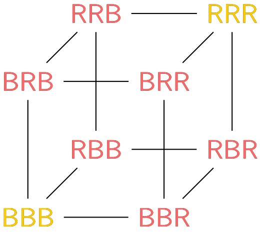
Construction d'une stratégie

Idée : faire perdre tout le monde en même temps.

- On fixe des configurations perdantes
- Toutes les voisines non perdantes sont gagnantes
- On continue pour que toutes les configurations soit gagnantes ou perdantes.
- But : avoir le moins de configurations perdantes possible

C_P : perdu

C_G : gagne



Lien avec la domination dans l'hypercube

Trouver le meilleur ensemble de situations perdantes $\Leftrightarrow$
Trouver le plus petit ensemble "dominant" de l'hypercube

Lien avec la domination dans l'hypercube

Trouver le meilleur ensemble de situations perdantes $\Leftrightarrow$
Trouver le plus petit ensemble "dominant" de l'hypercube

$\gamma(N)$: taille du plus petit ensemble dominant de l'hypercube de dimension N. $\gamma(3) = 2$

Lien avec la domination dans l'hypercube

Trouver le meilleur ensemble de situations perdantes $\Leftrightarrow$
Trouver le plus petit ensemble "dominant" de l'hypercube

$\gamma(N)$: taille du plus petit ensemble dominant de l'hypercube de dimension N. $\gamma(3) = 2$

$$h(N) = \frac{|C_G|}{|C_G| + |C_P| + |C_N|} = 1 - \frac{\gamma(N)}{2^N}$$

Lien avec la domination dans l'hypercube

Trouver le meilleur ensemble de situations perdantes $\Leftrightarrow$
Trouver le plus petit ensemble "dominant" de l'hypercube

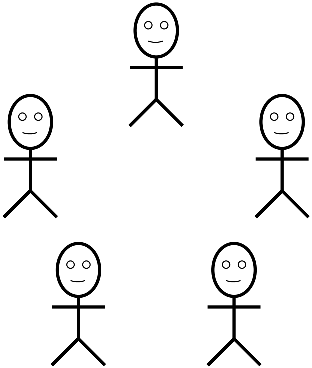
$\gamma(N)$: taille du plus petit ensemble dominant de l'hypercube de dimension N. $\gamma(3) = 2$

$$h(N) = \frac{|C_G|}{|C_G| + |C_P| + |C_N|} = 1 - \frac{\gamma(N)}{2^N}$$

- $\gamma(N) = \frac{2^N}{N+1}$ si $N + 1$ puissance de 2 (Codes correcteurs d'erreurs). Sinon ... ! ?
- $\gamma(4) = 4$ donc $h(4) = \frac{3}{4}$: à 4 joueurs, on ne fait pas mieux que $\frac{3}{4}$!

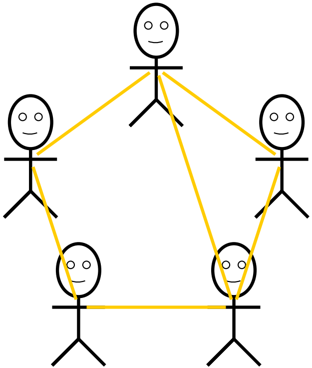
Visibilité réduite

Variante : un joueur ne voit qu'une partie des autres joueurs, graphe G de visibilité.



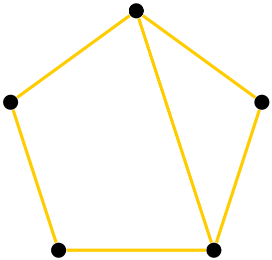
Visibilité réduite

Variante : un joueur ne voit qu'une partie des autres joueurs, graphe G de visibilité.



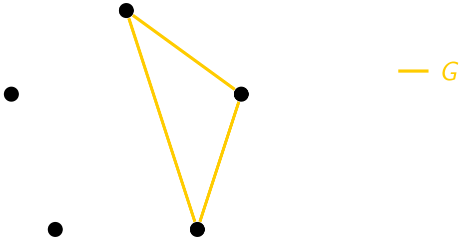
Visibilité réduite

Variante : un joueur ne voit qu'une partie des autres joueurs, graphe G de visibilité.

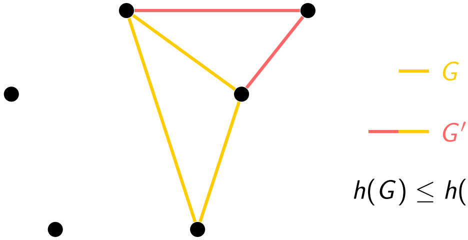


$h(G)$: probabilité de gagner dans la meilleure stratégie.
Si $G = K_N$ (toutes les arêtes possibles), $h(G) = h(N)$.

Première observation



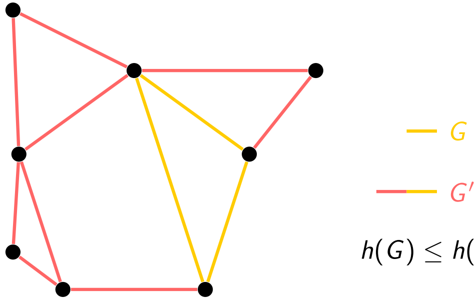
Première observation



$h(G) \leq h(G')$

Si on ajoute des sommets ou des arêtes, $h(G)$ ne peut qu'augmenter.

Première observation



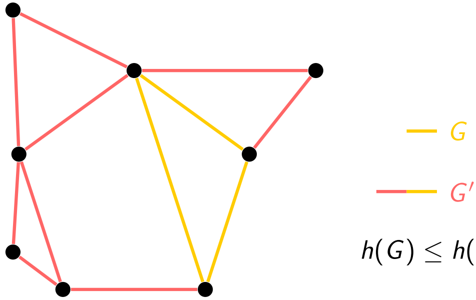
$h(G) \leq h(G')$

Si on ajoute des sommets ou des arêtes, $h(G)$ ne peut qu'augmenter.

$\omega(G)$: nombre maximum de sommets dans G tous reliés entre eux.

$$h(\omega(G)) \leq h(G)$$

Première observation



$h(G) \leq h(G')$

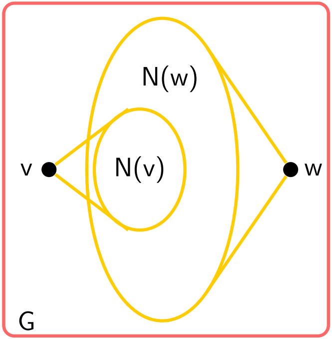
Si on ajoute des sommets ou des arêtes, $h(G)$ ne peut qu'augmenter.

$\omega(G)$: nombre maximum de sommets dans G tous reliés entre eux.

$$h(\omega(G)) \leq h(G)$$

Conjecture : il y a égalité !

Enlever un sommet

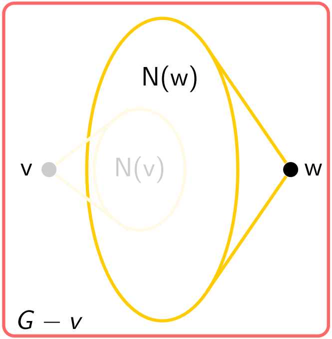


Si $N(v) \subseteq N(w)$, alors on peut supprimer v :

$$h(G - v) = h(G)$$

.

Enlever un sommet

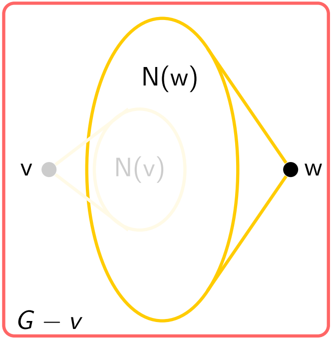


Si $N(v) \subseteq N(w)$, alors on peut supprimer v :

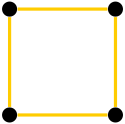
$$h(G - v) = h(G)$$

.

Enlever un sommet



Exemple : C_4



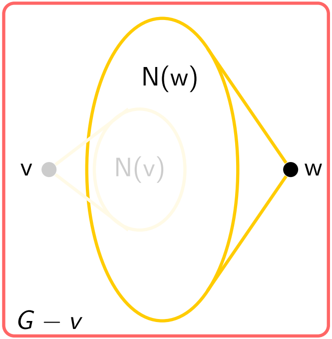
Si $N(v) \subseteq N(w)$, alors on peut supprimer v :

$$h(G - v) = h(G)$$

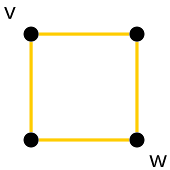
.

$h(C_4)$

Enlever un sommet



Exemple : C_4



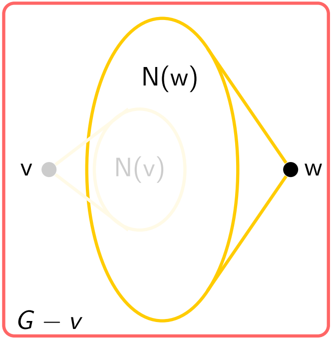
Si $N(v) \subseteq N(w)$, alors on peut supprimer v :

$$h(G - v) = h(G)$$

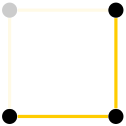
.

$h(C_4)$

Enlever un sommet



Exemple : C_4



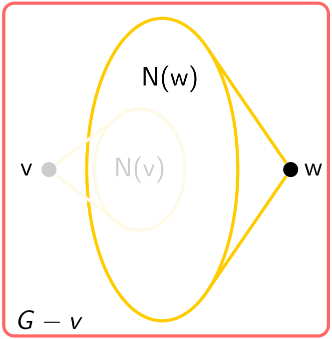
Si $N(v) \subseteq N(w)$, alors on peut supprimer v :

$$h(G - v) = h(G)$$

.

$$h(C_4) = h(P_3)$$

Enlever un sommet

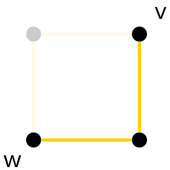


Si $N(v) \subseteq N(w)$, alors on peut supprimer v :

$$h(G - v) = h(G)$$

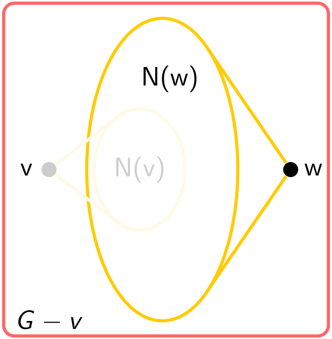
.

Exemple : C_4



$h(C_4) = h(P_3)$

Enlever un sommet

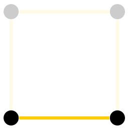


Si $N(v) \subseteq N(w)$, alors on peut supprimer v :

$$h(G - v) = h(G)$$

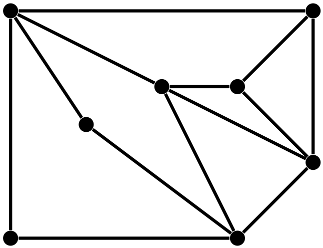
.

Exemple : C_4



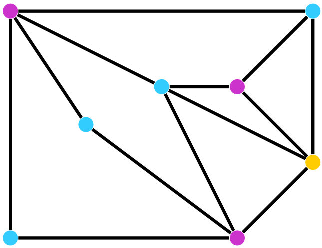
$h(C_4) = h(P_3) = h(2) = \frac{1}{2}$

Lien avec la coloration



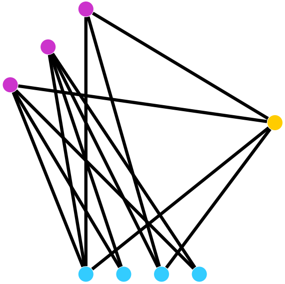
- Colorier les sommets de G avec χ couleurs sans que deux sommets adjacents n'aient la même couleur.

Lien avec la coloration



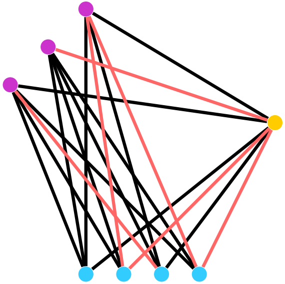
- Colorier les sommets de G avec χ couleurs sans que deux sommets adjacents n'aient la même couleur.

Lien avec la coloration



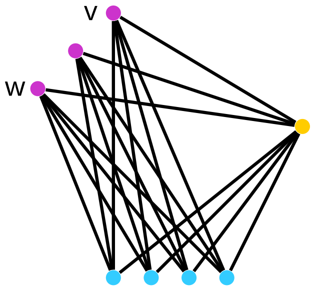
- Colorier les sommets de G avec χ couleurs sans que deux sommets adjacents n'aient la même couleur.
- Regrouper les sommets par couleur

Lien avec la coloration



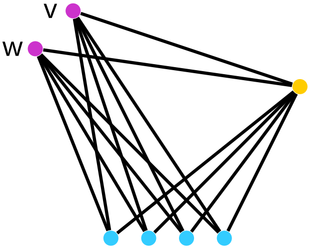
- Colorier les sommets de G avec χ couleurs sans que deux sommets adjacents n'aient la même couleur.
- Regrouper les sommets par couleur
- Ajouter toutes les arêtes entre deux sommets de couleur différentes. On obtient G' et $h(G) \leq h(G')$

Lien avec la coloration



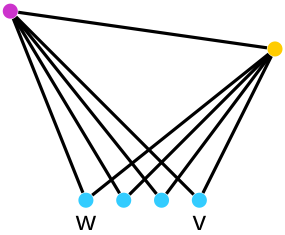
- Colorier les sommets de G avec χ couleurs sans que deux sommets adjacents n'aient la même couleur.
- Regrouper les sommets par couleur
- Ajouter toutes les arêtes entre deux sommets de couleur différentes. On obtient G' et $h(G) \leq h(G')$

Lien avec la coloration



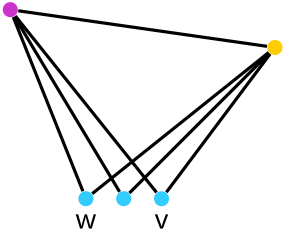
- Colorier les sommets de G avec χ couleurs sans que deux sommets adjacents n'aient la même couleur.
- Regrouper les sommets par couleur
- Ajouter toutes les arêtes entre deux sommets de couleur différentes. On obtient G' et $h(G) \leq h(G')$
- On enlève un sommet s'il y a un sommet de même couleur jusqu'à n'avoir plus que χ sommets. $h(G') = h(\chi)$.

Lien avec la coloration



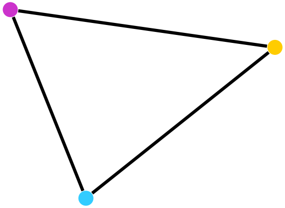
- Colorier les sommets de G avec χ couleurs sans que deux sommets adjacents n'aient la même couleur.
- Regrouper les sommets par couleur
- Ajouter toutes les arêtes entre deux sommets de couleur différentes. On obtient G' et $h(G) \leq h(G')$
- On enlève un sommet s'il y a un sommet de même couleur jusqu'à n'avoir plus que χ sommets. $h(G') = h(\chi)$.

Lien avec la coloration



- Colorier les sommets de G avec χ couleurs sans que deux sommets adjacents n'aient la même couleur.
- Regrouper les sommets par couleur
- Ajouter toutes les arêtes entre deux sommets de couleur différentes. On obtient G' et $h(G) \leq h(G')$
- On enlève un sommet s'il y a un sommet de même couleur jusqu'à n'avoir plus que χ sommets. $h(G') = h(\chi)$.

Lien avec la coloration



- Colorier les sommets de G avec χ couleurs sans que deux sommets adjacents n'aient la même couleur.
- Regrouper les sommets par couleur
- Ajouter toutes les arêtes entre deux sommets de couleur différentes. On obtient G' et $h(G) \leq h(G')$
- On enlève un sommet s'il y a un sommet de même couleur jusqu'à n'avoir plus que χ sommets. $h(G') = h(\chi)$.

$$h(G) \leq h(\chi)$$

Bilan

Pour un graphe G :

$$h(\omega(G)) \leq h(G) \leq h(\chi(G))$$

On connait donc h(G) dès que $h(\chi(G)) = h(\omega(G))$: graphes planaires avec triangle, graphes parfaits,...

Pour les autres ? Ouvert, on ne sait presque rien

Bilan

Pour un graphe G :

$$h(\omega(G)) \leq h(G) \leq h(\chi(G))$$

On connait donc h(G) dès que $h(\chi(G)) = h(\omega(G))$: graphes planaires avec triangle, graphes parfaits,...

Pour les autres ? Ouvert, on ne sait presque rien

Merci !