Codes identifiants dans les graphes adjoints

Aline Parreau
Institut Fourier, Université de Grenoble

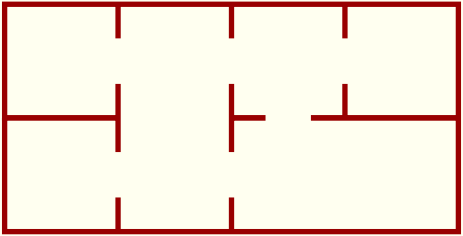
En collaboration avec :
Florent Foucaud, Sylvain Gravier, Reza Naserasr et Petru Valicov

4 juin 2012
Seminaire du LIFO, Université d'Orléans

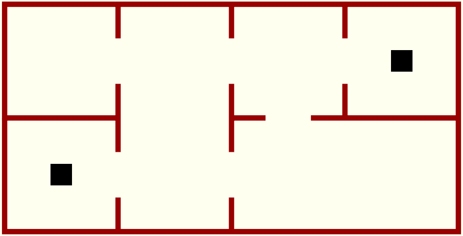
ANR IDEA

Plan

Détecter un incendie dans un musée

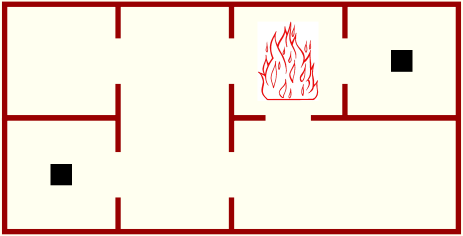


Détecter un incendie dans un musée



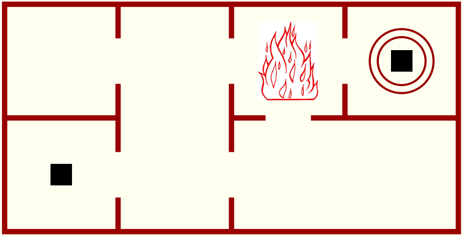
- Détécteurs qui s'allument si feu dans la pièce ou dans une pièce voisine

Détecter un incendie dans un musée



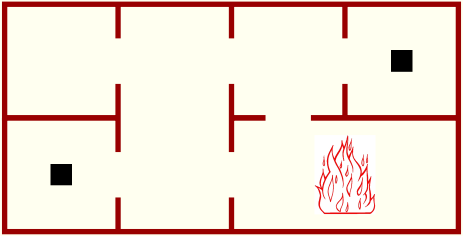
- Détécteurs qui s'allument si feu dans la pièce ou dans une pièce voisine

Détecter un incendie dans un musée



- Détécteurs qui s'allument si feu dans la pièce ou dans une pièce voisine

Détecter un incendie dans un musée

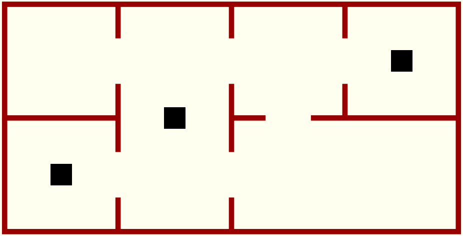


- Détécteurs qui s'allument si feu dans la pièce ou dans une pièce voisine

Détecter un incendie dans un musée

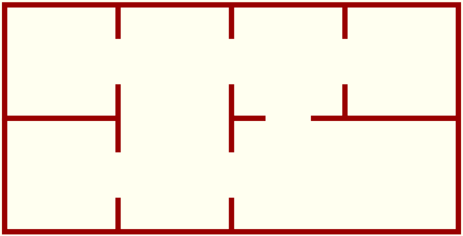
- Détécteurs qui s'allument si feu dans la pièce ou dans une pièce voisine

Détecter un incendie dans un musée

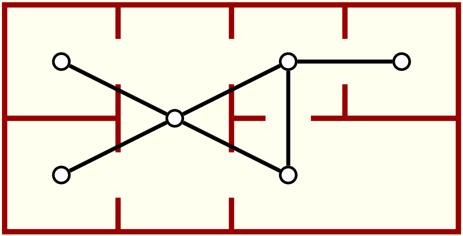


- Détécteurs qui s'allument si feu dans la pièce ou dans une pièce voisine
- Nombre minimum de détecteurs nécéssaire ?

Modélisation par un graphe :



Modélisation par un graphe :

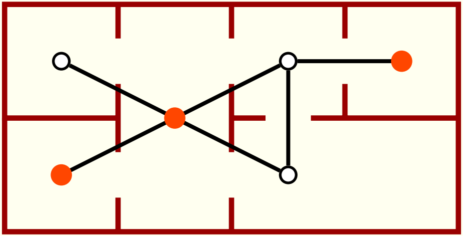


L'ensemble des détecteurs $C \subseteq V$ est un ensemble dominant :

$$\forall u \in V, N[u] \cap C \neq \emptyset$$

$\gamma(G)$: la taille du plus petit ensemble dominant de G.

Modélisation par un graphe :

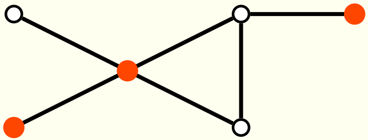


L'ensemble des détecteurs $C \subseteq V$ est un ensemble dominant :

$$\forall u \in V, N[u] \cap C \neq \emptyset$$

$\gamma(G)$: la taille du plus petit ensemble dominant de G.

Modélisation par un graphe :

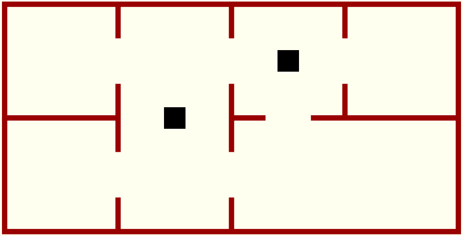


L'ensemble des détecteurs $C \subseteq V$ est un ensemble dominant :

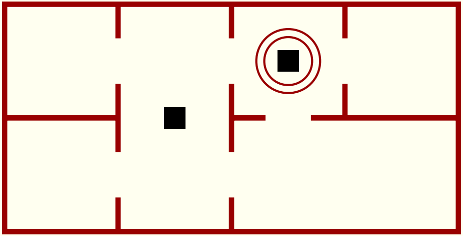
$$\forall u \in V, N[u] \cap C \neq \emptyset$$

$\gamma(G)$: la taille du plus petit ensemble dominant de G.

Retournons au musée.

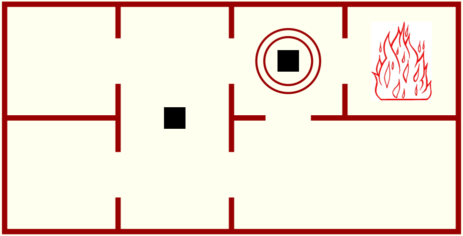


Retournons au musée.



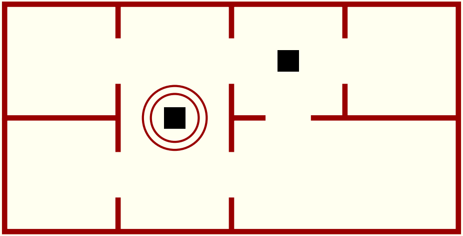
Peut-on dire où est le feu ?

Retournons au musée.



Peut-on dire où est le feu ? oui !

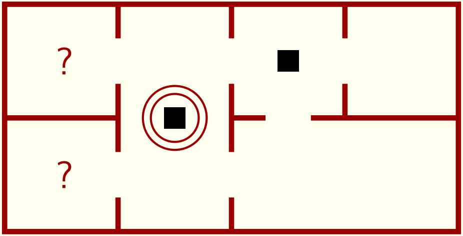
Retournons au musée.



Peut-on dire où est le feu ? oui !

Et maintenant ?

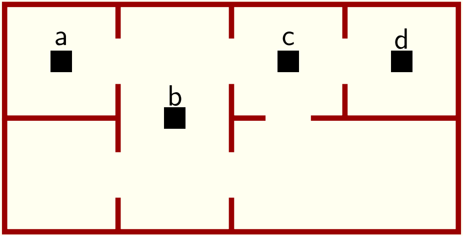
Retournons au musée.



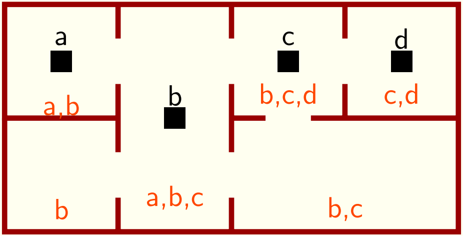
Peut-on dire où est le feu ? oui !
Et maintenant ? non !

Pour localiser le feu, il faut ajouter des détécteurs...

Identifier où est le feu



Identifier où est le feu



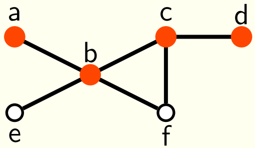
Pour chaque pièce, l'ensemble de détecteurs qui s'allument en cas de feu est unique.

L'ensemble des détécteurs forment un code identifiant.

En termes de graphes

Un code identifiant C est un sous-ensemble de sommets :

- dominant : $\forall u \in V, N[u] \cap C \neq \emptyset$,
- séparant : $\forall u, v \in V, N[u] \cap C \neq N[v] \cap C$



V \ C	a	b	c	d
a	•	•	-	-
b	•	•	•	-
c	-	•	•	•
d	-	-	•	•
e	-	•	-	-
f	-	•	•	-

$\gamma^{ID}(G)$: la taille du plus petit code identifiant de G.

$$\gamma(G) \leq \gamma^{ID}(G)$$

Introduit en 1998 par Karpovsky, Chakrabarty et Levitin

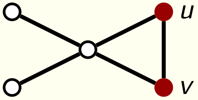
Un premier exemple

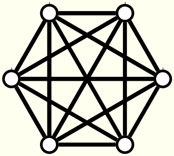
Chemin :

$$\gamma^{ID}(P_n) = \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil$$

Existence

Pour certains graphes, il n'existe pas de code identifiant :





Jumeaux : deux sommets u et v tels que $N[u] = N[v]$.

Proposition

Il existe un code identifiant dans G ssi G n'a pas de jumeaux.

Borne inférieure

- $|V|$ sommets à identifier,
- k éléments dans le code,
- Tous les $N[u] \cap C$ sont distincts et non vides, donc

$$|V| \leq 2^k - 1$$

Proposition Karpovsky *et al.*, 1998

$$\gamma^{ID}(G) \geq \log(|V| + 1)$$

La borne est atteinte :

Borne inférieure

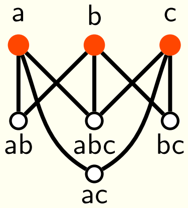
- $|V|$ sommets à identifier,
- k éléments dans le code,
- Tous les $N[u] \cap C$ sont distincts et non vides, donc

$$|V| \leq 2^k - 1$$

Proposition Karpovsky *et al.*, 1998

$$\gamma^{ID}(G) \geq \log(|V| + 1)$$

La borne est atteinte :



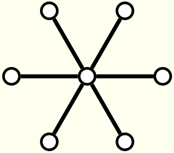
Borne supérieure

On peut enlever au moins un sommet :

Proposition Gravier, Moncel, 2007

Pour tout graphe G sans jumeaux : $\gamma^{ID}(G) \leq |V| - 1$.

Et c'est atteint :



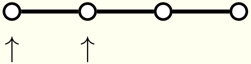
Borne supérieure

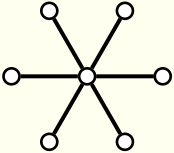
On peut enlever au moins un sommet :

Proposition Gravier, Moncel, 2007

Pour tout graphe G sans jumeaux : $\gamma^{ID}(G) \leq |V| - 1$.

Et c'est atteint :





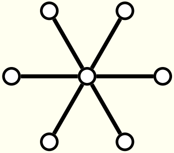
Borne supérieure

On peut enlever au moins un sommet :

Proposition Gravier, Moncel, 2007

Pour tout graphe G sans jumeaux : $\gamma^{ID}(G) \leq |V| - 1$.

Et c'est atteint :



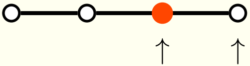
Borne supérieure

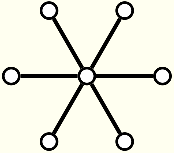
On peut enlever au moins un sommet :

Proposition Gravier, Moncel, 2007

Pour tout graphe G sans jumeaux : $\gamma^{ID}(G) \leq |V| - 1$.

Et c'est atteint :





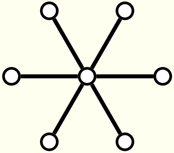
Borne supérieure

On peut enlever au moins un sommet :

Proposition Gravier, Moncel, 2007

Pour tout graphe G sans jumeaux : $\gamma^{ID}(G) \leq |V| - 1$.

Et c'est atteint :



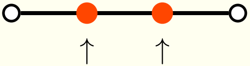
Borne supérieure

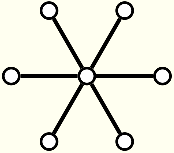
On peut enlever au moins un sommet :

Proposition Gravier, Moncel, 2007

Pour tout graphe G sans jumeaux : $\gamma^{ID}(G) \leq |V| - 1$.

Et c'est atteint :





Borne supérieure

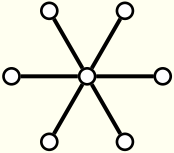
On peut enlever au moins un sommet :

Proposition Gravier, Moncel, 2007

Pour tout graphe G sans jumeaux : $\gamma^{ID}(G) \leq |V| - 1$.

Et c'est atteint :

$\gamma^{ID}(P_4) = 3$



Borne supérieure

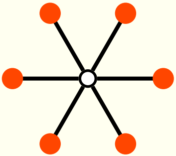
On peut enlever au moins un sommet :

Proposition Gravier, Moncel, 2007

Pour tout graphe G sans jumeaux : $\gamma^{ID}(G) \leq |V| - 1$.

Et c'est atteint :

$\gamma^{ID}(P_4) = 3$



$\gamma^{ID}(K_{1,6}) = 6$

Caractérisation des graphes atteignant la borne :
Foucaud, Gravier, Guerrini, Kovse, P., Valicov, 2011

C'est un problème difficile...

IDENTIFYING CODE : Étant donné un graphe G sans jumeaux et un entier k, est-ce que $\gamma^{ID}(G) \leq k$?

Proposition Cohen *et al.*, 2001

IDENTIFYING CODE est un problème NP-complet

- Polynomial pour : arbres
- NP-complet pour : graphes planaires, bipartis,...

C'est un problème difficile...

IDENTIFYING CODE : Étant donné un graphe G sans jumeaux et un entier k, est-ce que $\gamma^{ID}(G) \leq k$?

Proposition Cohen *et al.*, 2001

IDENTIFYING CODE est un problème NP-complet

- Polynomial pour : arbres
- NP-complet pour : graphes planaires, bipartis,...

... et difficile à approcher :

Proposition Laifenbled et Trachtenberg, 2006 & Suomela, 2007

Meilleure approximation polynomiale possible : facteur $\log(|V|)$

Étude sur des classes de graphes

- Chemins, cycles
- Arbres
- Grilles carrée, du roi, hexagonale,...
- Hypercube
- Poutre
- ...

Étude sur des classes de graphes

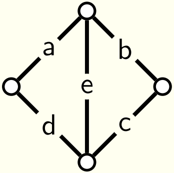
- Chemins, cycles
- Arbres
- Grilles carrée, du roi, hexagonale,...
- Hypercube
- Poutre
- ...

Ici : graphes adjoints

Graphe adjoint (line graph)

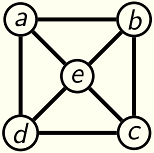
G graphe $\Rightarrow \mathcal{L}(G)$, graphe adjoint :

- Sommets de $\mathcal{L}(G)$: arêtes de G
- $e \sim e'$ dans $\mathcal{L}(G)$ si e et e' sont incidentes dans G



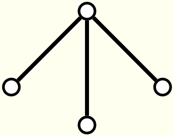
G

$\Rightarrow$



$\mathcal{L}(G)$

Tout graphe n'est pas le graphe adjoint d'un graphe :



Codes identifiants dans les graphes adjoints

Identifier les sommets de $\mathcal{L}(G)$

$\Leftrightarrow$

Identifier les arêtes de G avec ses arêtes

Codes identifiants dans les graphes adjoints

Identifier les sommets de $\mathcal{L}(G)$

$\Leftrightarrow$

Identifier les arêtes de G avec ses arêtes

$N[e]$: e + arêtes incidentes à e

Définition

Code arête-identifiant de G : ensemble d'arêtes C_E

- arête-dominant : $\forall e \in E, N[e] \cap C_E \neq \emptyset$
- arête-séparant : $\forall e, f \in E, N[e] \cap C_E \neq N[f] \cap C_E$

Codes identifiants dans les graphes adjoints

Identifier les sommets de $\mathcal{L}(G)$

$\Leftrightarrow$

Identifier les arêtes de G avec ses arêtes

$N[e]$: e + arêtes incidentes à e

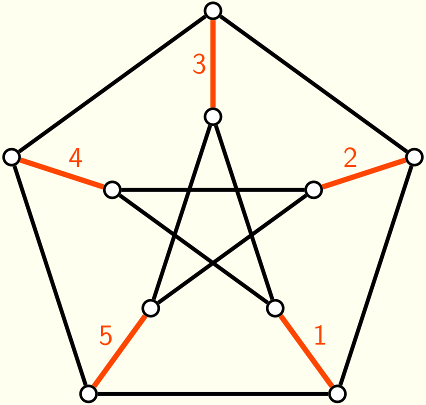
Définition

Code arête-identifiant de G : ensemble d'arêtes C_E

- arête-dominant : $\forall e \in E, N[e] \cap C_E \neq \emptyset$
- arête-séparant : $\forall e, f \in E, N[e] \cap C_E \neq N[f] \cap C_E$

- Code arête-identifiant de $G \Leftrightarrow$ Code identifiant de $\mathcal{L}(G)$
- $\gamma^{EID}(G) = \gamma^{ID}(\mathcal{L}(G))$: taille minimale d'un code arête-identifiant de G

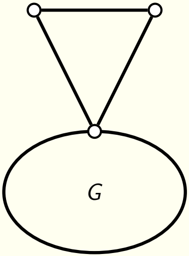
Un exemple : le graphe de Petersen

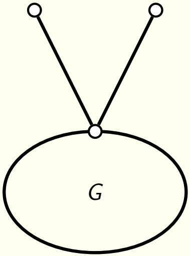


$$\gamma^{EID}(\mathcal{P}) \leq 5$$

Existence d'un code arête-identifiant

Jumeaux dans $\mathcal{L}(G) \Leftrightarrow$ arêtes pendantes dans G, $N[e] = N[f]$





Proposition

Un graphe possède un code arête-identifiant ssi il n'a pas d'arêtes pendantes

Borne inférieure

Proposition

$\gamma^{EID}(G) \geq \frac{|V(G)|}{2}$

Borne inférieure

Proposition

$\gamma^{EID}(G) \geq \frac{|V(G)|}{2}$

- $\gamma^{EID}(\mathcal{P}) = 5$
- En utilisant $|E(G)| \leq \frac{|V(G)|(|V(G)|-1)}{2}$:

Borne inférieure

Proposition

$\gamma^{EID}(G) \geq \frac{|V(G)|}{2}$

- $\gamma^{EID}(\mathcal{P}) = 5$
- En utilisant $|E(G)| \leq \frac{|V(G)|(|V(G)|-1)}{2}$:

Corollaire

$\gamma^{EID}(G) \geq \frac{\sqrt{2|E(G)|}}{2}$, se raffine en $\gamma^{EID}(G) \geq \frac{3\sqrt{2|E(G)|}}{4}$

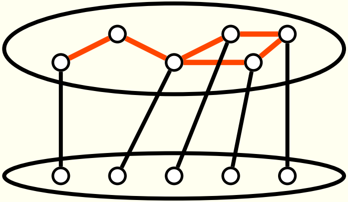
Borne inférieure - Idée de la preuve

Proposition

$\gamma^{EID}(G) \geq \frac{|V(G)|}{2}$

C_E, k arêtes sur n_1 sommets

$X = V(G) \setminus V(C_E)$



- Supposons C_E connexe
- Si C_E a un cycle, $|X| \leq n_1 \leq k$,
- Si C_E est un arbre, $|X| \leq n_1 - 2 = k - 1$
- Dans tous les cas, $|V(G)| = |X| + n_1 \leq 2k$

Conséquence en terme de code identifiant

Corollaire

$\gamma^{EID}(G) \geq \frac{3\sqrt{2|E(G)|}}{4}$

En terme de code identifiant dans les graphes adjoints :

Théorème

Soit G un graphe adjoint sans jumeaux. $\gamma^{ID}(G) \geq \frac{3\sqrt{2|V(G)|}}{4}$

La borne inférieure en $O(\log(|V(G)|)$ est améliorée dans les graphes adjoints !

Question ouverte

Peut-on élargir à des classes de graphes plus grandes ?

Borne supérieure

Graphe 2-dégénéré : graphe construit en ajoutant des sommets de degré au plus 2 à chaque étape.

Proposition

Un code arête identifiant minimal est 2-degénéré

Corollaire

$\gamma^{EID}(G) \leq 2|V(G)|-3$ et K_2, K_4 sont les seuls graphes atteignant la borne

Conjecture sur les codes identifiants

Conjecture Foucaud, Klasing, Kosowski, Raspaud, 2009

Soit G un graphe sans jumeaux avec n sommets, de degré maximum Δ, alors

$$\gamma^{ID}(G) \leq n - \frac{n}{\Delta} + O(1)$$

$\gamma^{EID}(G) \leq 2|V(G)| - 3$ implique que la conjecture est vérifiée pour les graphes adjoints de graphe de degré moyen au moins 5.

Complexité

EDGE-IDCODE : Etant donné un graphe G et un entier k, est-ce que $\gamma^{EID}(G) \leq k$?

Théorème

EDGE-IDCODE est un problème NP-complet pour les graphes planaires subcubiques, bipartis de maille arbitrairement grande

Complexité

EDGE-IDCODE : Etant donné un graphe G et un entier k, est-ce que $\gamma^{EID}(G) \leq k$?

Théorème

EDGE-IDCODE est un problème NP-complet pour les graphes planaires subcubiques, bipartis de maille arbitrairement grande

Un graphe adjoint $\mathcal{L}(G)$ est parfait s'il n'a pas de cycles induits de taille impaire strictement plus grande que 3.

Corollaire

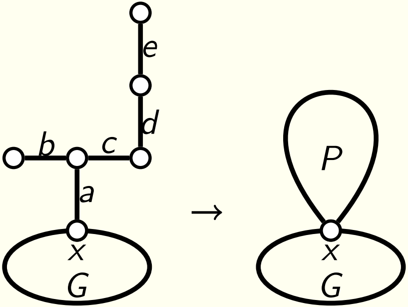
IDENTIFYING CODE est NP-complet pour les graphes adjoints planaires parfaits 3-coloriables de degré maximum 4.

Idées de la réduction

Réduction à partir de $\textsc{Planar}$ $(\leq 3, 3)$-SAT :

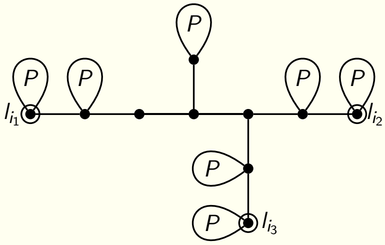
- chaque clause a entre 2 et 3 littéraux
- chaque variable apparaît une fois sous forme négative et deux fois sous forme positive
- le graphe biparti d'incidence est planaire
- problème NP-complet (Dahlhaus *et al.*, 1994)

Idées de la réduction

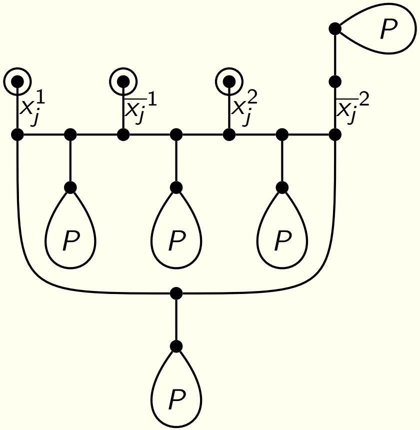


Idées de la réduction

Gadget de clause



Gadget de variable



$\mathcal{Q}$ est satisfaite ssi G contient un code arête-identifiant de taille $k = 25|\mathcal{Q}| + 22|X|$.

Approximation

Bornes pour les codes arête-identifiants :

$$\frac{|V(G)|}{2} \leq \gamma^{EID}(G) \leq 2|V(G)| - 3$$

Proposition

EDGE-IDCODE est 4-approximable en temps polynomial

Approximation

Bornes pour les codes arête-identifiants :

$$\frac{|V(G)|}{2} \leq \gamma^{EID}(G) \leq 2|V(G)| - 3$$

Proposition

EDGE-IDCODE est 4-approximable en temps polynomial

Proposition

EDGE-IDCODE est APX-complet

En conclusion

Problème des codes identifiants dans les graphes adjoints :

- Equivalent à un problème d'identification des arêtes
- Borne inférieure $O(\log(|V(G)|))$ devient $O(\sqrt{|V(G)|})$
- Reste NP-complet...
- ... mais devient 4-approximable

En conclusion

Problème des codes identifiants dans les graphes adjoints :

- Equivalent à un problème d'identification des arêtes
- Borne inférieure $O(\log(|V(G)|))$ devient $O(\sqrt{|V(G)|})$
- Reste NP-complet...
- ... mais devient 4-approximable

Perspectives :

- Élargir la classe des graphes vérifiant cette borne inférieure, à des classes de graphes définies par sous-graphe induits
- Résultats de complexité plus précis
- Algorithmes polynomiaux pour γ^{EID} ? (arbre...)

En conclusion

Problème des codes identifiants dans les graphes adjoints :

- Equivalent à un problème d'identification des arêtes
- Borne inférieure $O(\log(|V(G)|))$ devient $O(\sqrt{|V(G)|})$
- Reste NP-complet...
- ... mais devient 4-approximable

Perspectives :

- Élargir la classe des graphes vérifiant cette borne inférieure, à des classes de graphes définies par sous-graphe induits
- Résultats de complexité plus précis
- Algorithmes polynomiaux pour γ^{EID} ? (arbre...)

Merci !