Colorations localement identifiantes

Aline Parreau

LIFL, équipe Dolphin

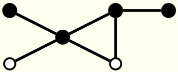
En collaboration avec :
Louis Esperet, Sylvain Gravier, Mickaël Montassier, Pascal Ochem
Florent Foucaud, Iiro Honkala, Tero Laihonen, Guillem Perarnau
Daniel Gonçalves, Alexandre Pinlou

Journées Graphes et Algorithmes 2012

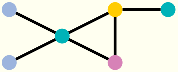
IDEA

Motivations

Code identifiant

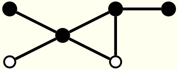


Coloration (propre)

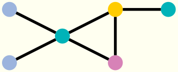


Motivations

Code identifiant



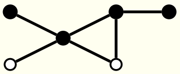
Coloration (propre)



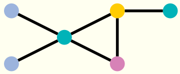
Coloration (localement) identifiante

Motivations

Code identifiant



Coloration (propre)



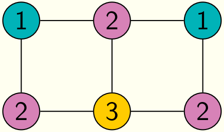
Coloration (localement) identifiante

Des antécédents : coloration des arêtes ou coloration totale distinguant les sommets (adjacents)

Définition

Coloration localement identifiante de G :

- coloration propre des sommets : $c(x) \neq c(y)$ pour $xy \in E$
- Si $N[x] \neq N[y]$, $c(N[x]) \neq c(N[y])$, pour $xy \in E$ (séparation des voisins)

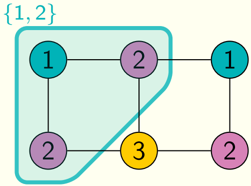


- $\chi_{lid}(G)$: nombre minimal de couleurs nécessaires.

Définition

Coloration localement identifiante de G :

- coloration propre des sommets : $c(x) \neq c(y)$ pour $xy \in E$
- Si $N[x] \neq N[y]$, $c(N[x]) \neq c(N[y])$, pour $xy \in E$ (séparation des voisins)

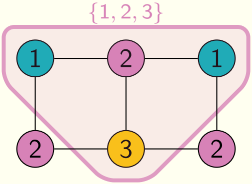


- $\chi_{lid}(G)$: nombre minimal de couleurs nécessaires.

Définition

Coloration localement identifiante de G :

- coloration propre des sommets : $c(x) \neq c(y)$ pour $xy \in E$
- Si $N[x] \neq N[y]$, $c(N[x]) \neq c(N[y])$, pour $xy \in E$ (séparation des voisins)

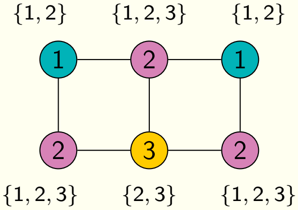


- $\chi_{lid}(G)$: nombre minimal de couleurs nécessaires.

Définition

Coloration localement identifiante de G :

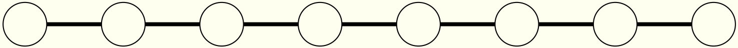
- coloration propre des sommets : $c(x) \neq c(y)$ pour $xy \in E$
- Si $N[x] \neq N[y]$, $c(N[x]) \neq c(N[y])$, pour $xy \in E$ (séparation des voisins)



- $\chi_{lid}(G)$: nombre minimal de couleurs nécessaires.

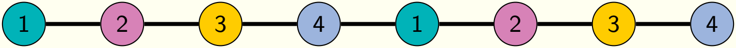
Exemple : le chemin

Rappel def: $\forall xy \in E$, $c(x) \neq c(y)$ et $c(N[x]) \neq c(N[y])$.



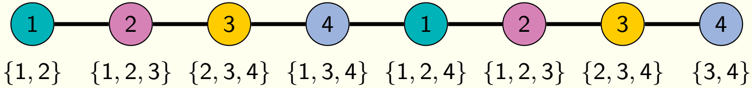
Exemple : le chemin

Rappel def: $\forall xy \in E$, $c(x) \neq c(y)$ et $c(N[x]) \neq c(N[y])$.



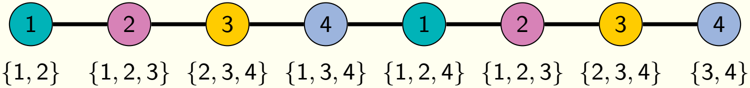
Exemple : le chemin

Rappel def: $\forall xy \in E$, $c(x) \neq c(y)$ et $c(N[x]) \neq c(N[y])$.



Exemple : le chemin

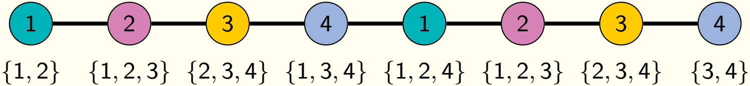
Rappel def: $\forall xy \in E$, $c(x) \neq c(y)$ et $c(N[x]) \neq c(N[y])$.



$$\chi_{lid}(P_k) \leq 4.$$

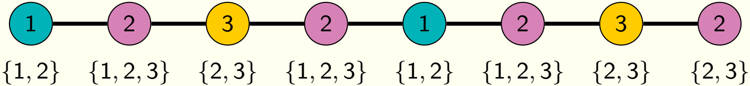
Exemple : le chemin

Rappel def: $\forall xy \in E$, $c(x) \neq c(y)$ et $c(N[x]) \neq c(N[y])$.



$$\chi_{lid}(P_k) \leq 4.$$

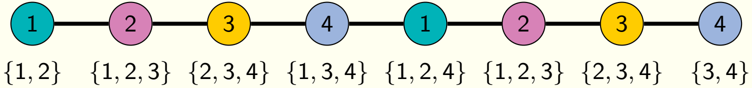
Avec trois couleurs :



$$\chi_{lid}(P_k) = 3 \Leftrightarrow k \text{ est impair.}$$

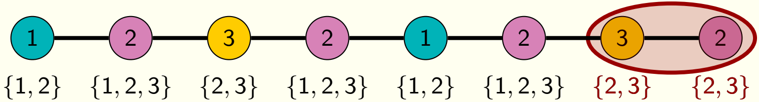
Exemple : le chemin

Rappel def: $\forall xy \in E$, $c(x) \neq c(y)$ et $c(N[x]) \neq c(N[y])$.



$$\chi_{lid}(P_k) \leq 4.$$

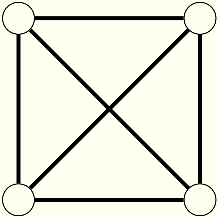
Avec trois couleurs :



$$\chi_{lid}(P_k) = 3 \Leftrightarrow k \text{ est impair.}$$

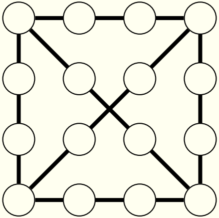
Comparaison avec les colorations propres

- $\chi_{lid} \geq \chi$.
- Pas borné supérieurement par χ.
  $\rightarrow$ Graphe complet K_p subdivisé deux fois :



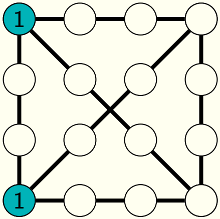
Comparaison avec les colorations propres

- $\chi_{lid} \geq \chi$.
- Pas borné supérieurement par χ.
  $\rightarrow$ Graphe complet K_p subdivisé deux fois :



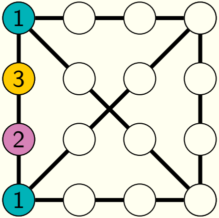
Comparaison avec les colorations propres

- $\chi_{lid} \geq \chi$.
- Pas borné supérieurement par χ.
  $\rightarrow$ Graphe complet K_p subdivisé deux fois :



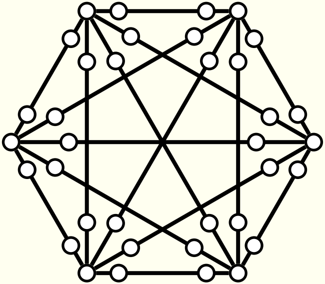
Comparaison avec les colorations propres

- $\chi_{lid} \geq \chi$.
- Pas borné supérieurement par χ.
  $\rightarrow$ Graphe complet K_p subdivisé deux fois : $\chi_{lid} = p$, $\chi = 3$.

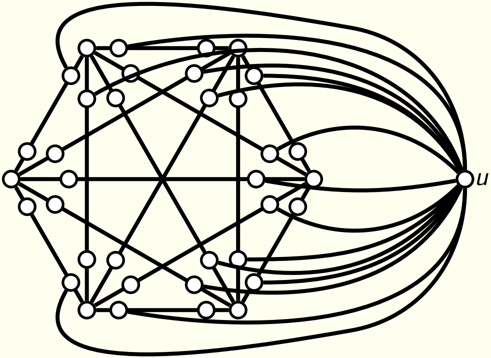


- Pas monotone: $\chi_{lid}(P_5) \leq \chi_{lid}(P_4)$.

χ_{lid} n'est pas du tout monotone



χ_{lid} n'est pas du tout monotone



$$\chi_{lid}(G) = 5 \ll p = \chi_{lid}(G - u)$$

Borne avec le degré maximum Δ

- Pour les colorations propres : $\chi \leq \Delta + 1$.

Borne avec le degré maximum Δ

- Pour les colorations propres : $\chi \leq \Delta + 1$.
- Pour les colorations localement identifiantes :

Théorème Foucaud,Honkala,Laihonen,P.,Perarnau, 2012

$$\chi_{lid} \leq 2\Delta^2 - 3\Delta + 3$$

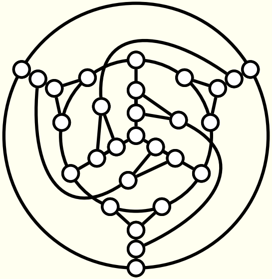
Borne avec le degré maximum Δ

- Pour les colorations propres : $\chi \leq \Delta + 1$.
- Pour les colorations localement identifiantes :

Théorème Foucaud,Honkala,Laihonen,P.,Perarnau, 2012

$$\chi_{lid} \leq 2\Delta^2 - 3\Delta + 3$$

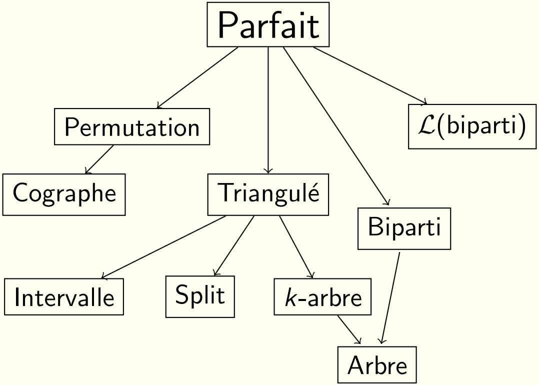
L'ordre est le bon :



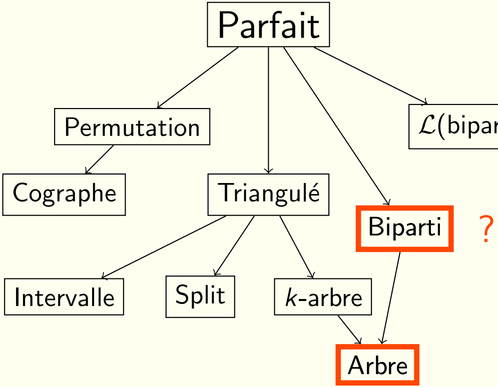
Question ouverte

$$\chi_{lid} \leq \Delta^2 + O(\Delta) \ ?$$

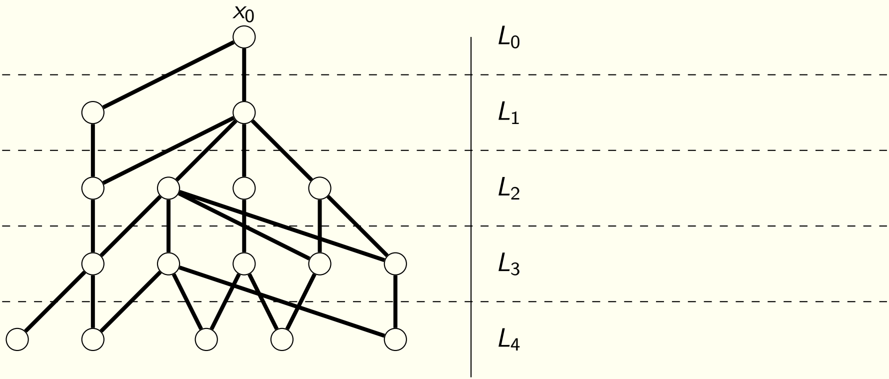
Étude dans les graphes parfaits



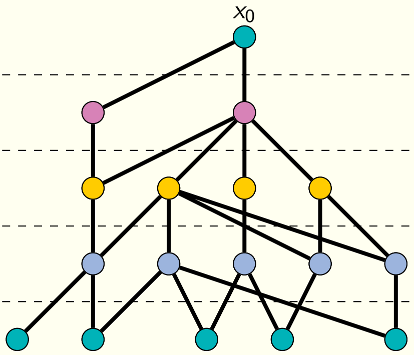
Étude dans les graphes parfaits



Étude dans les graphes parfaits : graphes bipartis



Étude dans les graphes parfaits : graphes bipartis

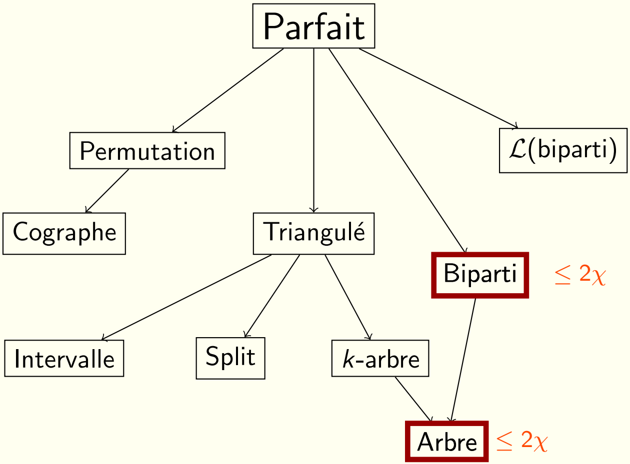


L_0	$\rightarrow$	1	$\{1,2\}$
L_1	$\rightarrow$	2	$\{1,2,3\}$
L_2	$\rightarrow$	3	$\{2,3,4\}$ ou$\{2,3\}$
L_3	$\rightarrow$	4	$\{1,3,4\}$ ou $\{3,4\}$
L_4	$\rightarrow$	1	$\{1,4\}$

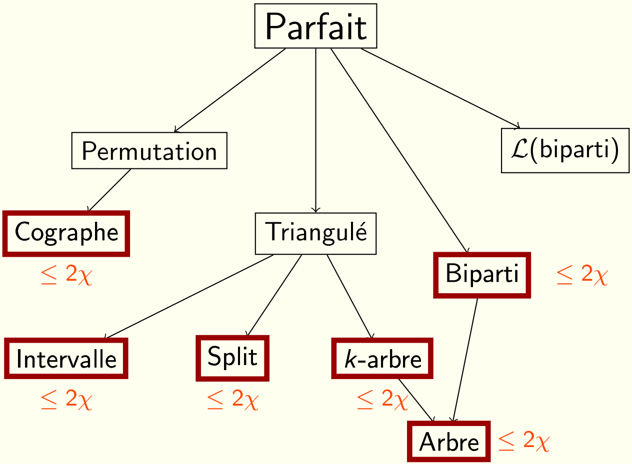
Théorème Esperet, Gravier, Montassier,Ochem, P., 2012

- Tout graphe biparti G est 4-lid-coloriable.
- Décider s'il est 3 ou 4-lid-coloriable est $\mathcal{NP}$-complet.

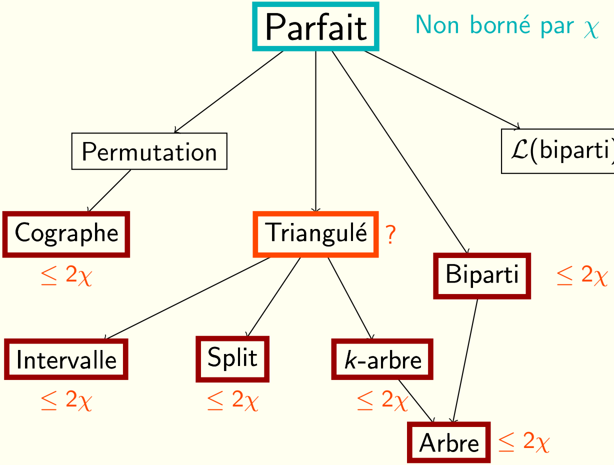
Bilan dans les graphes parfaits



Bilan dans les graphes parfaits



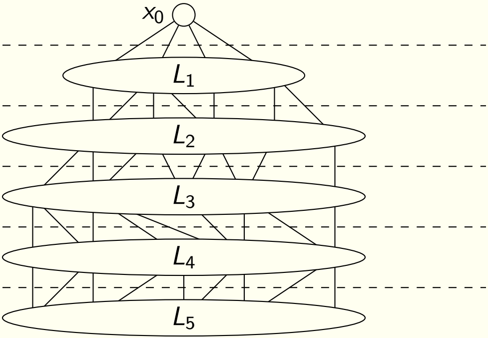
Bilan dans les graphes parfaits



Conjecture Esperet, Gravier, Montassier, Ochem, P., 2012

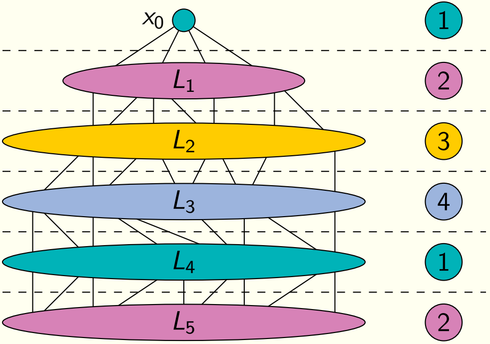
Tout graphe triangulé G a une lid-coloration avec $2\chi(G)$ couleurs.

Une bonne méthode pour colorer



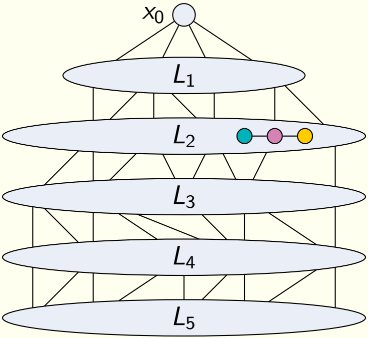
- Séparation des sommets par leur distance à un sommet x_0.

Une bonne méthode pour colorer



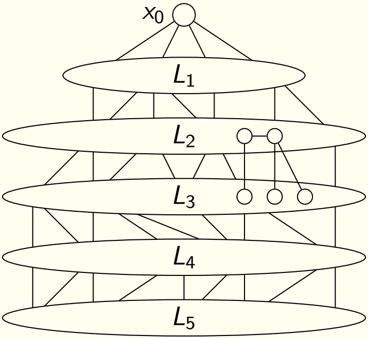
- Séparation des sommets par leur distance à un sommet x_0.
- Superposition de trois coloration :
  - c_1: identifie entre les L_i (4 couleurs)
  - c_2: identifie au sein d'un L_i ($\chi_{lid}(L_i)$ couleurs)
  - c_3: identifie les jumeaux d'un L_i avec L_{i-1} ou L_{i+1}, avec des colorations propres dans des mineurs de G

Une bonne méthode pour colorer



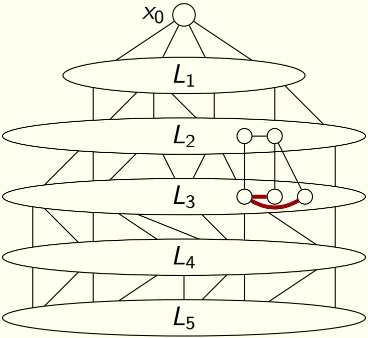
- Séparation des sommets par leur distance à un sommet x_0.
- Superposition de trois coloration :
  - c_1: identifie entre les L_i (4 couleurs)
  - c_2: identifie au sein d'un L_i ($\chi_{lid}(L_i)$ couleurs)
  - c_3: identifie les jumeaux d'un L_i avec L_{i-1} ou L_{i+1}, avec des colorations propres dans des mineurs de G

Une bonne méthode pour colorer



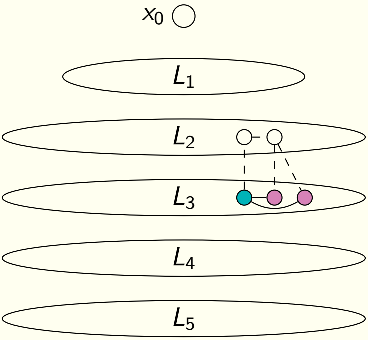
- Séparation des sommets par leur distance à un sommet x_0.
- Superposition de trois coloration :
  - c_1: identifie entre les L_i (4 couleurs)
  - c_2: identifie au sein d'un L_i ($\chi_{lid}(L_i)$ couleurs)
  - c_3: identifie les jumeaux d'un L_i avec L_{i-1} ou L_{i+1}, avec des colorations propres dans des mineurs

Une bonne méthode pour colorer



- Séparation des sommets par leur distance à un sommet x_0.
- Superposition de trois coloration :
  - c_1: identifie entre les L_i (4 couleurs)
  - c_2: identifie au sein d'un L_i ($\chi_{lid}(L_i)$ couleurs)
  - c_3: identifie les jumeaux d'un L_i avec L_{i-1} ou L_{i+1}, avec des colorations propres dans des mineurs

Une bonne méthode pour colorer



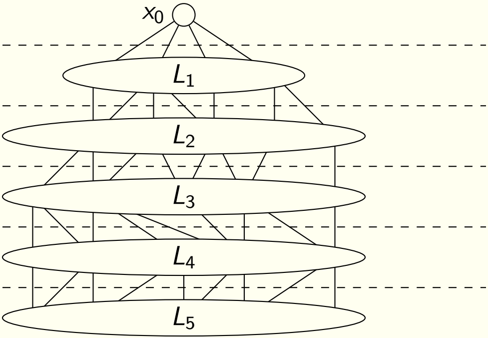
- Séparation des sommets par leur distance à un sommet x_0.
- Superposition de trois coloration :

  c_1: identifie entre les L_i (4 couleurs)

  c_2: identifie au sein d'un L_i ($\chi_{lid}(L_i)$ couleurs)

  c_3: identifie les jumeaux d'un L_i avec L_{i-1} ou L_{i+1}, avec des colorations propres dans des mineurs

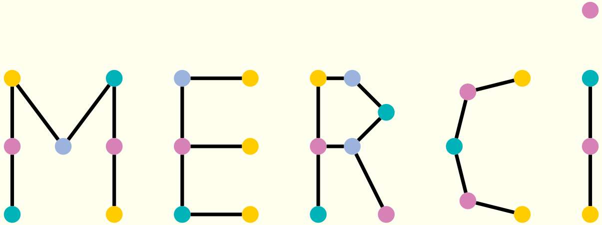
Une bonne méthode pour colorer



- Planaire extérieurs: L_i = union de chemins, 4 couleurs pour c_2 et 3 pour c_3 $\rightarrow 4 \times 4 \times 2 = 32$ couleurs (on peut faire 20)
- Planaires: L_i = planaire extérieur, 20 couleurs pour c_2 et 16 pour c_3 $\rightarrow 4 \times 20 \times 16 = 1280$ couleurs (Gonçalves, P., Pinlou, 2012)
- Graphes sans K_p: L_i sans K_{p-1} $\rightarrow$ borné (Gonçalves, P., Pinlou, 2012)

Perspectives et questions ouvertes

- Lien avec la profondeur d'arborescence ($\chi_{lid} \leq 2\text{td} + 1$)
- Borne optimale utilisant le degré maximum.
- Meilleure borne pour les graphes planaires (plus gros exemple avec 8 couleurs).
- Conjecture sur les graphes triangulés ($\chi_{lid} \leq 2\chi$?)
- Autres graphes pour lesquels $\chi_{lid} \leq 2\chi$?
- Graphes pour lesquels $\chi = \chi_{lid}$?
- Graphes pour lesquels $\chi_{lid} = |V|$?


MERCI