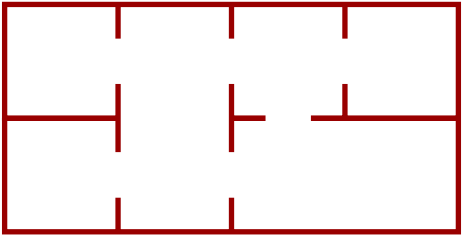
Problèmes de domination et d'identification dans les graphes

Aline Parreau

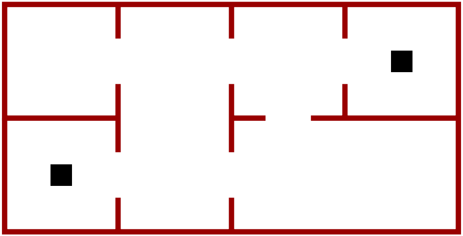
25 janvier 2012

Semaine Sport-Etude ENS Lyon 2012

Détecter un incendie dans un musée

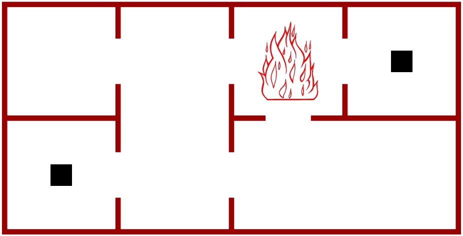


Détecter un incendie dans un musée



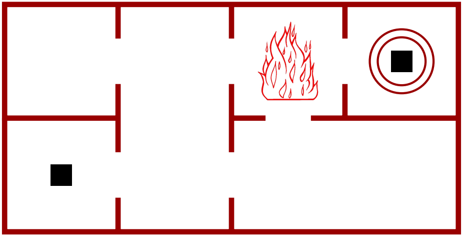
- Détécteurs qui s'allument si feu dans la pièce ou dans une pièce voisine

Détecter un incendie dans un musée



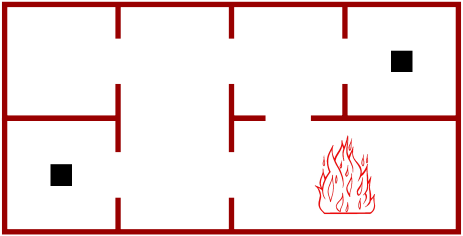
- Détécteurs qui s'allument si feu dans la pièce ou dans une pièce voisine

Détecter un incendie dans un musée



- Détécteurs qui s'allument si feu dans la pièce ou dans une pièce voisine

Détecter un incendie dans un musée

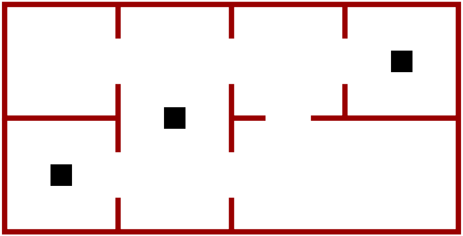


- Détécteurs qui s'allument si feu dans la pièce ou dans une pièce voisine

Détecter un incendie dans un musée

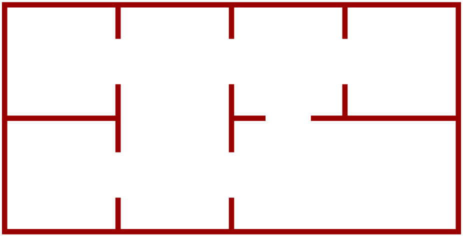
- Détécteurs qui s'allument si feu dans la pièce ou dans une pièce voisine

Détecter un incendie dans un musée

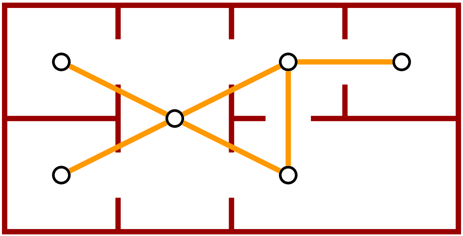


- Détécteurs qui s'allument si feu dans la pièce ou dans une pièce voisine
- Nombre minimum de détecteurs nécéssaire ?

Modélisation par un graphe :



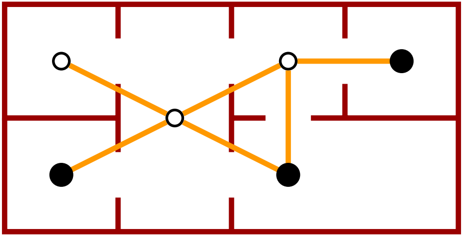
Modélisation par un graphe :



- Sommets : pièces du musée
- Arêtes : entre deux pièces voisines
- Détecteurs : sous-ensemble de sommets

L'ensemble des détecteurs est un ensemble dominant.

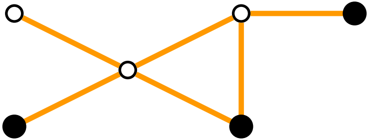
Modélisation par un graphe :



- Sommets : pièces du musée
- Arêtes : entre deux pièces voisines
- Détecteurs : sous-ensemble de sommets

L'ensemble des détecteurs est un ensemble dominant.

Modélisation par un graphe :



- Sommets : pièces du musée
- Arêtes : entre deux pièces voisines
- Détecteurs : sous-ensemble de sommets

L'ensemble des détecteurs est un ensemble dominant.

Définition formelle d'un ensemble dominant

- Graphe G : sommets V reliés par des arêtes $E \subseteq V^2$.
- Voisinage (fermé) d'un sommet $u \in V$:
  $N[u] = \{v \in V | uv \in E\} \cup \{u\}$

Ensemble dominant d'un graphe $G = (V, E)$ est :

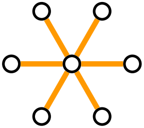
- Sous-ensemble de sommets $S \subseteq V$,
- Tout sommet du graphe est dans le voisinage d'un sommet de S :

$$\forall v \in V, N[v] \cap S \neq \emptyset$$

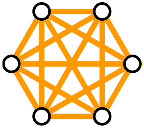
$\gamma(G)$: taille minimale d'un ensemble dominant de G.

Exemples d'ensembles dominants

Des graphes faciles à dominer :



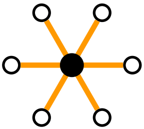
Etoile : $\gamma(G) =$



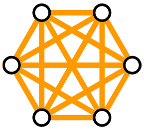
Graphe complet : $\gamma(G) =$

Exemples d'ensembles dominants

Des graphes faciles à dominer :



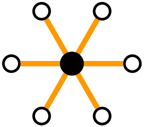
Etoile : $\gamma(G) = 1$



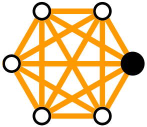
Graphe complet : $\gamma(G) =$

Exemples d'ensembles dominants

Des graphes faciles à dominer :

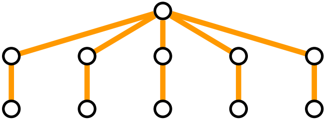


Etoile : $\gamma(G) = 1$



Graphe complet : $\gamma(G) = 1$

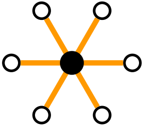
Des graphes moins faciles à dominer



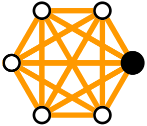
Etoile subdivisée : $\gamma(G) =$

Exemples d'ensembles dominants

Des graphes faciles à dominer :

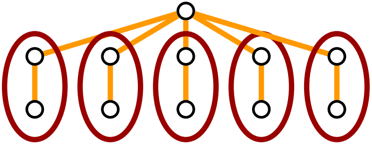


Etoile : $\gamma(G) = 1$



Graphe complet : $\gamma(G) = 1$

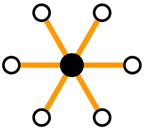
Des graphes moins faciles à dominer



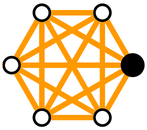
Etoile subdivisée : $\gamma(G) = \frac{|V|-1}{2}$

Exemples d'ensembles dominants

Des graphes faciles à dominer :

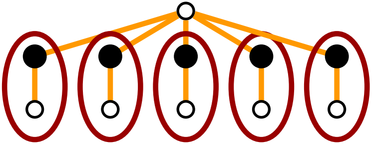


Etoile : $\gamma(G) = 1$



Graphe complet : $\gamma(G) = 1$

Des graphes moins faciles à dominer



Etoile subdivisée : $\gamma(G) = \frac{|V|-1}{2}$

Bornes générales

Proposition

Pour tout graphe G connexe :

$$1 \leq \gamma(G) \leq \frac{|V|}{2}$$

Les bornes sont atteintes.

Idée de la preuve :

- Pour un arbre : $\gamma(T) \leq \frac{|V|}{2}$.
- En enlevant des arêtes on augmente γ
- T arbre couvrant de G : $\gamma(G) \geq \gamma(T) \geq \frac{|V|}{2}$

Avec le degré maximum

- Δ : degré maximum du graphe
- Pour tout sommet u, $|N[u]| \leq \Delta + 1$
- $\cup_{u \in S} N[u] = V$

Proposition

$$\frac{|V|}{\Delta + 1} \leq \gamma(G) \leq \frac{|V|}{2}$$

C'est pas facile de dominer...

Dominating Set : Etant donné un graphe G et un entier k, est-ce que $\gamma(G) \leq k$?

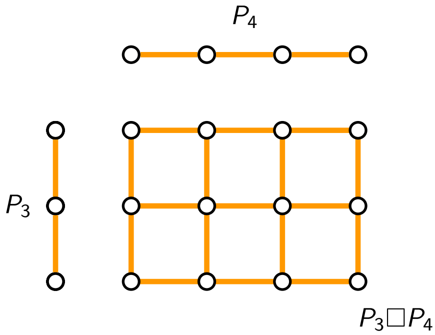
Proposition

Dominating Set est un problème NP-complet.

- Polynomial pour : arbres, graphes d'intervalles,...
- NP-complet pour : graphes planaires, triangulés, graphes bipartis, grilles partielles

Une petite conjecture

- $G_1 \Box G_2$ produit cartésien

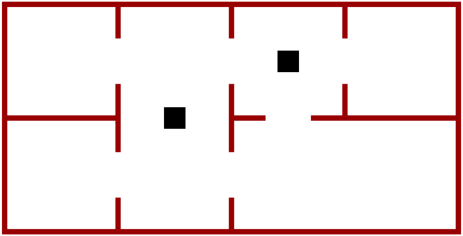


Une conjecture célèbre :

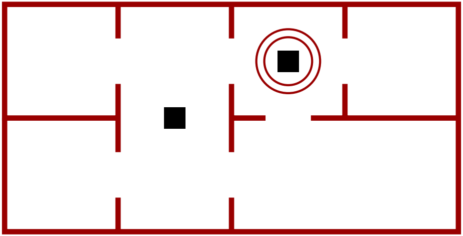
Conjecture Vizing, 1968

$$\gamma(G \Box H) \leq \gamma(G)\gamma(H)$$

Retournons au musée.

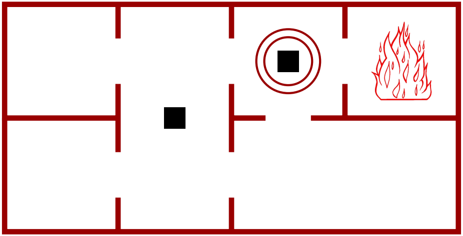


Retournons au musée.



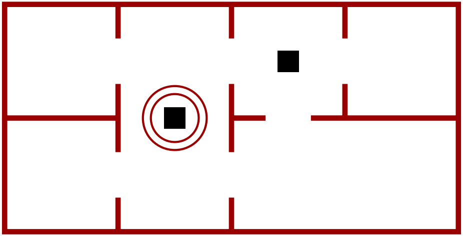
Peut-on dire où est le feu ?

Retournons au musée.



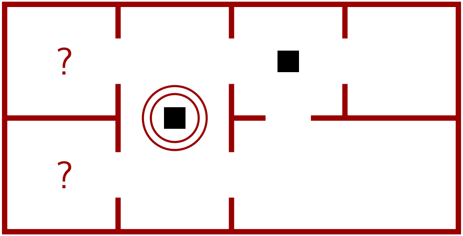
Peut-on dire où est le feu ? oui !

Retournons au musée.



Peut-on dire où est le feu ? oui !
Et maintenant ?

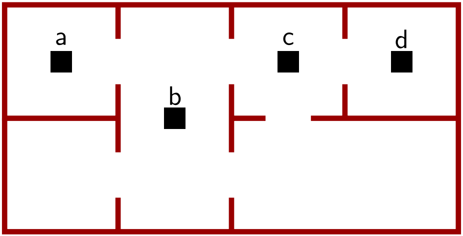
Retournons au musée.



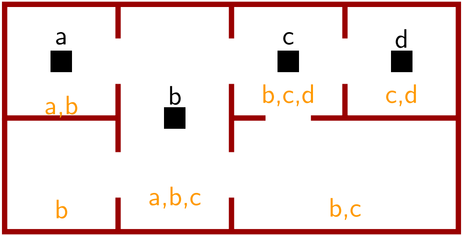
Peut-on dire où est le feu ? oui !
Et maintenant ? non !

Il faut ajouter des détécteurs...

Identifier où est le feu



Identifier où est le feu



Pour chaque pièce, l'ensemble de détecteurs qui s'allument en cas de feu est unique.

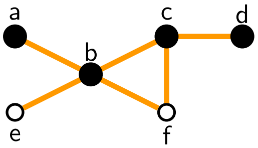
L'ensemble des détécteurs forment un code identifiant.

En termes de graphes

Un code identifiant C d'un graphe G :

- sous ensemble de sommets dominant et,
- tel que pour toute paire de sommets u et v :

$$N[u] \cap C \neq N[v] \cap C$$



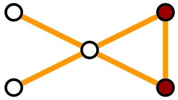
u \ C	a	b	c	d
a	•	•	-	-
b	•	•	•	-
c	-	•	•	•
d	-	-	•	•
e	-	•	-	-
f	-	•	•	-

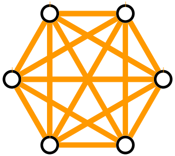
On note $\gamma^{ID}(G)$ la taille du plus petit code identifiant de G.

$$\gamma(G) \leq \gamma^{ID}(G)$$

Existence d'un code identifiant

Pour certains graphes, il n'existe pas de code identifiant :





Jumeaux : deux sommets u et v tels que $N[u] = N[v]$.

Proposition

Il existe un code identifiant dans G ssi G n'a pas de jumeaux.

Borne inférieure

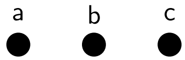
- $|V|$ sommets à identifier,
- k éléments dans le code,
- Tous les $N[u] \cap C$ sont non distincts et non vides, donc

$$|V| \leq 2^k - 1$$

Proposition

$$\gamma^{ID}(G) \geq \log(|V| + 1)$$

La borne est atteinte :



Borne inférieure

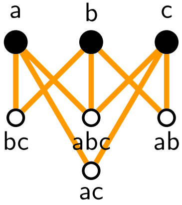
- $|V|$ sommets à identifier,
- k éléments dans le code,
- Tous les $N[u] \cap C$ sont non distincts et non vides, donc

$$|V| \leq 2^k - 1$$

Proposition

$$\gamma^{ID}(G) \geq \log(|V| + 1)$$

La borne est atteinte :



Borne supérieure

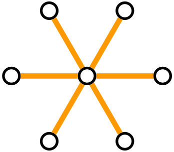
On peut enlever au moins un sommet :

Proposition

Pour tout graphe G sans jumeaux :

$$\gamma^{ID}(G) \leq |V| - 1.$$

Et c'est atteint :



$\gamma^{ID}(K_{1,6}) = 6$

Borne supérieure

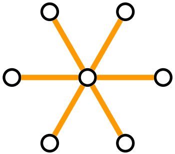
On peut enlever au moins un sommet :

Proposition

Pour tout graphe G sans jumeaux :

$$\gamma^{ID}(G) \leq |V| - 1.$$

Et c'est atteint :



$\gamma^{ID}(K_{1,6}) = 6$

Borne supérieure

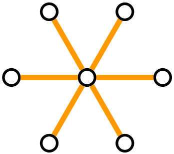
On peut enlever au moins un sommet :

Proposition

Pour tout graphe G sans jumeaux :

$$\gamma^{ID}(G) \leq |V| - 1.$$

Et c'est atteint :



$\gamma^{ID}(K_{1,6}) = 6$

Borne supérieure

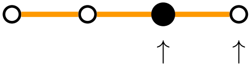
On peut enlever au moins un sommet :

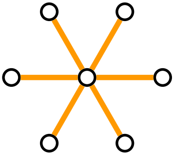
Proposition

Pour tout graphe G sans jumeaux :

$$\gamma^{ID}(G) \leq |V| - 1.$$

Et c'est atteint :





$\gamma^{ID}(K_{1,6}) = 6$

Borne supérieure

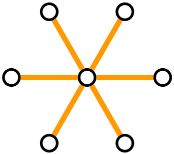
On peut enlever au moins un sommet :

Proposition

Pour tout graphe G sans jumeaux :

$$\gamma^{ID}(G) \leq |V| - 1.$$

Et c'est atteint :



$\gamma^{ID}(K_{1,6}) = 6$

Borne supérieure

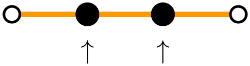
On peut enlever au moins un sommet :

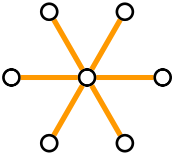
Proposition

Pour tout graphe G sans jumeaux :

$$\gamma^{ID}(G) \leq |V| - 1.$$

Et c'est atteint :





$\gamma^{ID}(K_{1,6}) = 6$

Borne supérieure

On peut enlever au moins un sommet :

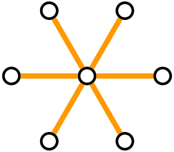
Proposition

Pour tout graphe G sans jumeaux :

$$\gamma^{ID}(G) \leq |V| - 1.$$

Et c'est atteint :

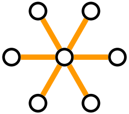
$\gamma^{ID}(P_4) = 3$



$\gamma^{ID}(K_{1,6}) = 6$

Caractérisation des graphes tels que $\gamma^{ID}(G) = |V| - 1$

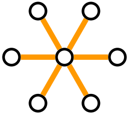
1. Étoile $K_{1,n}$,



(1) $K_{1,6}$

Caractérisation des graphes tels que $\gamma^{ID}(G) = |V| - 1$

1. Étoile $K_{1,n}$,
2. Graphe P_{2k}^{k-1},

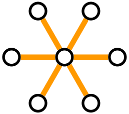


(1) $K_{1,6}$

(2) P_6^2

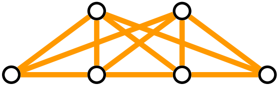
Caractérisation des graphes tels que $\gamma^{ID}(G) = |V| - 1$

1. Étoile $K_{1,n}$,
2. Graphe P_{2k}^{k-1},
3. Joints de (2) entre eux ou avec des $\overline{K_2}$,



(1) $K_{1,6}$

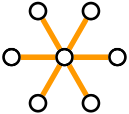
(2) P_6^2



(3) $P_4 \bowtie \overline{K_2}$

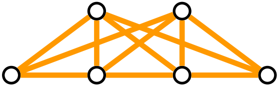
Caractérisation des graphes tels que $\gamma^{ID}(G) = |V| - 1$

1. Étoile $K_{1,n}$,
2. Graphe P_{2k}^{k-1},
3. Joints de (2) entre eux ou avec des $\overline{K_2}$,
4. Ajout à (3) d'un sommet universel.

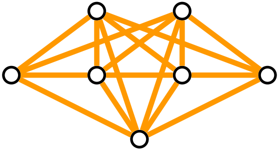


(1) $K_{1,6}$

(2) P_6^2



(3) $P_4 \bowtie \overline{K_2}$



(4) $P_4 \bowtie \overline{K_2} \bowtie K_1$

C'est toujours difficile...

Identifying Code : Etant donné un graphe G sans jumeaux et un entier k, est-ce que $\gamma^{ID}(G) \leq k$?

Proposition

Identifying Code est un problème NP-complet

- Polynomial pour : arbres
- NP-complet pour : graphes planaires, triangulés, bipartis,...

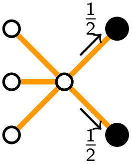
Ouvert : graphe d'intervalles ?

Que fait-on d'autre ?

- Chercher des bornes plus serrées pour des classes plus restreintes :
  Exemple : si G est un graphe d'intervalle $\gamma^{ID}(G) \geq \sqrt{2|V|}$
- Borner avec d'autres paramètres : le degré maximum Δ :
  Conjecture : Pour tout graphe G, $\gamma^{ID}(G) \leq n(1 - \frac{1}{\Delta})$
- Etudier des variantes : identifier les arêtes, identifier avec des couleurs...

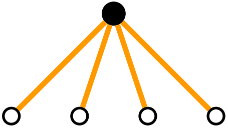
Borne inférieure avec le degré maximum

- Chaque sommet a une charge de 1 (charge totale $= |V|$)
- Règle de déchargement :



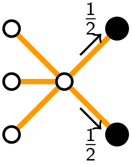
Un sommet donne aux voisins dans le code $\frac{1}{\text{nb voisins code}}$

- La somme totale des charges est inchangée
- A la fin, seuls les sommets du code ont de la charge, $\leq \frac{\Delta+2}{2}$ et donc $|C| \geq \frac{2|V|}{\Delta+2}$



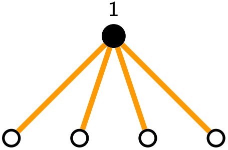
Borne inférieure avec le degré maximum

- Chaque sommet a une charge de 1 (charge totale $= |V|$)
- Règle de déchargement :



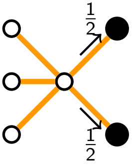
Un sommet donne aux voisins dans le code $\frac{1}{\text{nb voisins code}}$

- La somme totale des charges est inchangée
- A la fin, seuls les sommets du code ont de la charge, $\leq \frac{\Delta+2}{2}$ et donc $|C| \geq \frac{2|V|}{\Delta+2}$



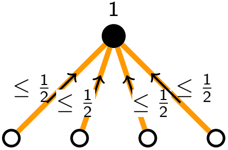
Borne inférieure avec le degré maximum

- Chaque sommet a une charge de 1 (charge totale $= |V|$)
- Règle de déchargement :



Un sommet donne aux voisins dans le code $\frac{1}{\text{nb voisins code}}$

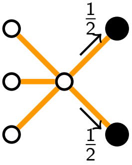
- La somme totale des charges est inchangée
- A la fin, seuls les sommets du code ont de la charge, $\leq \frac{\Delta+2}{2}$ et donc $|C| \geq \frac{2|V|}{\Delta+2}$



Charge finale $\leq 1 + \frac{\Delta}{2}$

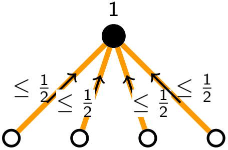
Borne inférieure avec le degré maximum

- Chaque sommet a une charge de 1 (charge totale $= |V|$)
- Règle de déchargement :

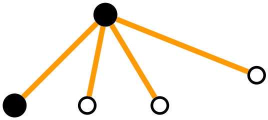


Un sommet donne aux voisins dans le code $\frac{1}{\text{nb voisins code}}$

- La somme totale des charges est inchangée
- A la fin, seuls les sommets du code ont de la charge, $\leq \frac{\Delta+2}{2}$ et donc $|C| \geq \frac{2|V|}{\Delta+2}$

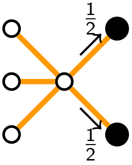


Charge finale
$\leq 1 + \frac{\Delta}{2}$



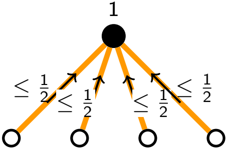
Borne inférieure avec le degré maximum

- Chaque sommet a une charge de 1 (charge totale $= |V|$)
- Règle de déchargement :

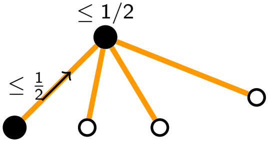


Un sommet donne aux voisins dans le code $\frac{1}{\text{nb voisins code}}$

- La somme totale des charges est inchangée
- A la fin, seuls les sommets du code ont de la charge, $\leq \frac{\Delta+2}{2}$ et donc $|C| \geq \frac{2|V|}{\Delta+2}$

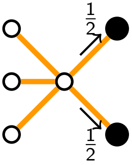


Charge finale $\leq 1 + \frac{\Delta}{2}$



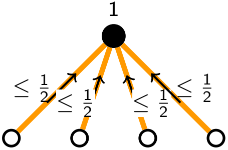
Borne inférieure avec le degré maximum

- Chaque sommet a une charge de 1 (charge totale $= |V|$)
- Règle de déchargement :

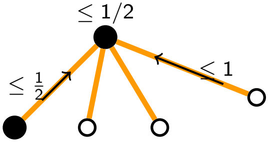


Un sommet donne aux voisins dans le code $\frac{1}{\text{nb voisins code}}$

- La somme totale des charges est inchangée
- A la fin, seuls les sommets du code ont de la charge, $\leq \frac{\Delta+2}{2}$ et donc $|C| \geq \frac{2|V|}{\Delta+2}$

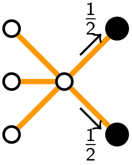


Charge finale $\leq 1 + \frac{\Delta}{2}$



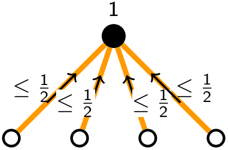
Borne inférieure avec le degré maximum

- Chaque sommet a une charge de 1 (charge totale $= |V|$)
- Règle de déchargement :

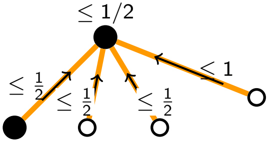


Un sommet donne aux voisins dans le code $\frac{1}{\text{nb voisins code}}$

- La somme totale des charges est inchangée
- A la fin, seuls les sommets du code ont de la charge, $\leq \frac{\Delta+2}{2}$ et donc $|C| \geq \frac{2|V|}{\Delta+2}$



Charge finale
$\leq 1 + \frac{\Delta}{2}$



Des codes identifiants cachés...

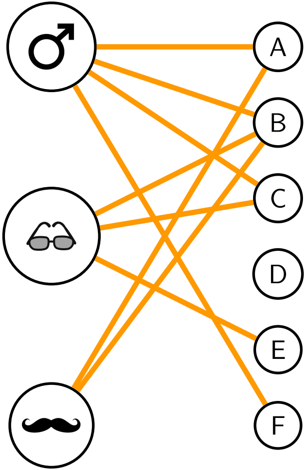
Jeu "Qui est-ce ?"

- Des personnes (A,B,C,...)
- Des caractéristiques (moustache, lunettes, homme,...)
- But : retrouver la personne choisie en posant des questions

Des codes identifiants cachés...

Jeu "Qui est-ce ?"

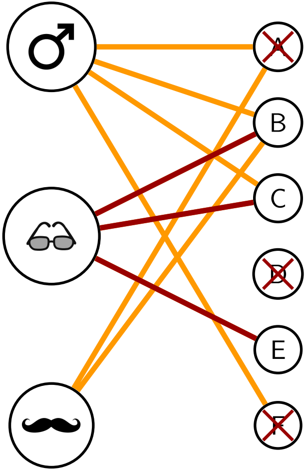
- Des personnes (A,B,C,...)
- Des caractéristiques (moustache, lunettes, homme,...)
- But : retrouver la personne choisie en posant des questions



Des codes identifiants cachés...

Jeu "Qui est-ce ?"

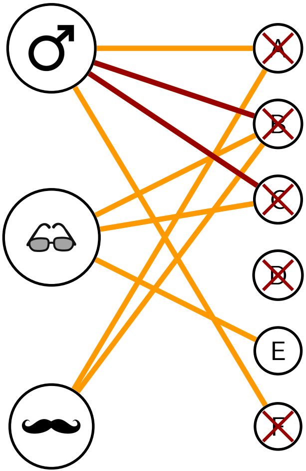
- Des personnes (A,B,C,...)
- Des caractéristiques (moustache, lunettes, homme,...)
- But : retrouver la personne choisie en posant des questions
- Les caractéristiques identifient les personnes (qui a des lunettes mais n'est pas un homme ?)



Des codes identifiants cachés...

Jeu "Qui est-ce ?"

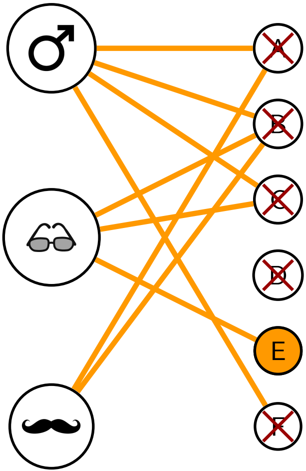
- Des personnes (A,B,C,...)
- Des caractéristiques (moustache, lunettes, homme,...)
- But : retrouver la personne choisie en posant des questions
- Les caractéristiques identifient les personnes (qui a des lunettes mais n'est pas un homme ?)



Des codes identifiants cachés...

Jeu "Qui est-ce ?"

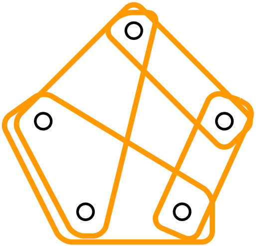
- Des personnes (A,B,C,...)
- Des caractéristiques (moustache, lunettes, homme,...)
- But : retrouver la personne choisie en posant des questions
- Les caractéristiques identifient les personnes (qui a des lunettes mais n'est pas un homme ?)
- Variante adaptative



Codes identifiants et dominants sont un peu pareil

Hypergraphe :

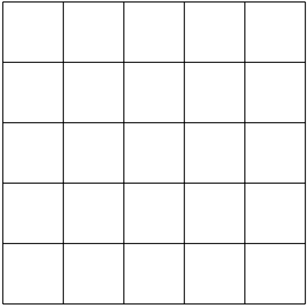
- des sommets V,
- des hyperarêtes $\mathcal{E}$, chaque hyperarête est un sous-ensemble de sommets



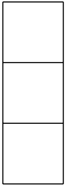
Ensemble dominant	Code identifiant
Couvrir N[u]	Couvrir N[u]
	Couvrir $N[u] \Delta N[v]$

Identifiant, Dominant = couverture d'hyperarêtes dans un hypergraphe

Jouons un peu pour finir



Jardin

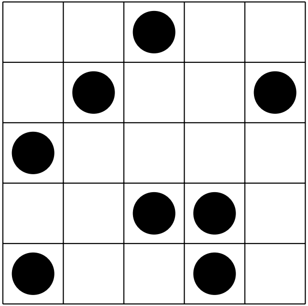


Taupe

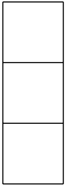
Piège

But : trouver le nombre minimum de pièges pour qu'on ne puisse plus placer la taupe

Jouons un peu pour finir



Jardin

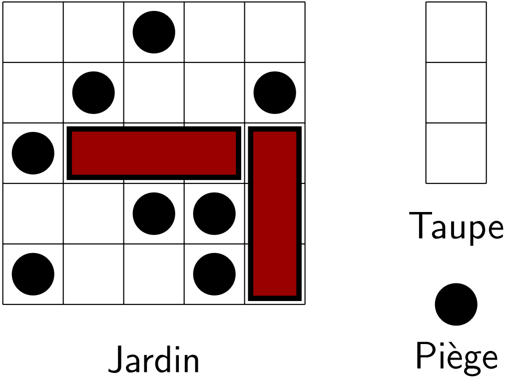


Taupe

Piège

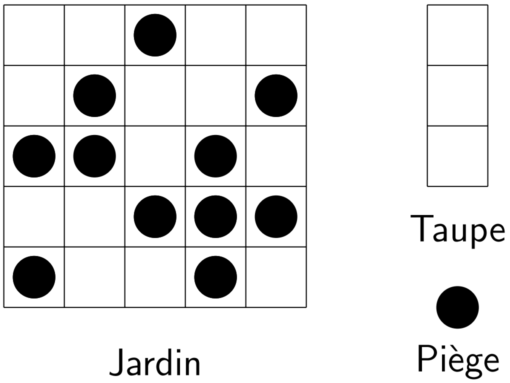
But : trouver le nombre minimum de pièges pour qu'on ne puisse plus placer la taupe

Jouons un peu pour finir



But : trouver le nombre minimum de pièges pour qu'on ne puisse plus placer la taupe

Jouons un peu pour finir

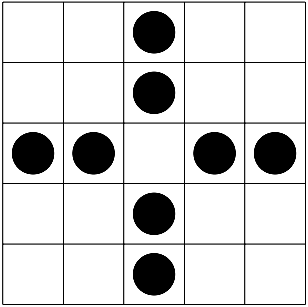


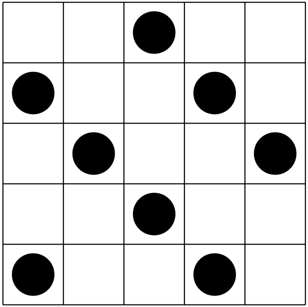
But : trouver le nombre minimum de pièges pour qu'on ne puisse plus placer la taupe

Solution en 11 pièges, qui dit mieux ?

Jouons un peu pour finir

Deux solutions avec huit pièges :

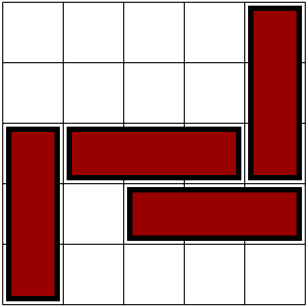




Peut-on faire mieux ? Comment montrer une borne minimum ?

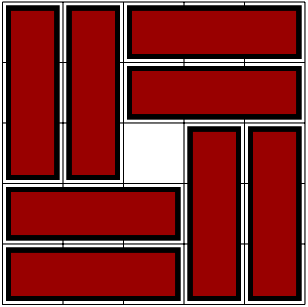
Passage au dual

Combien de taupes peut-on placer sur le jardin sans superposition ?



Passage au dual

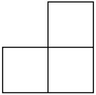
Combien de taupes peut-on placer sur le jardin sans superposition ?



Huit ! Et il faut au moins un piège par taupe...

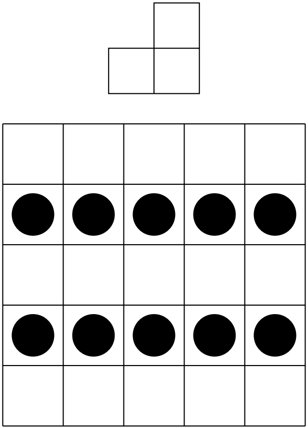
La taupe a muté

Combien de pièges pour la taupe suivante ?



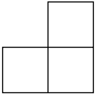
La taupe a muté

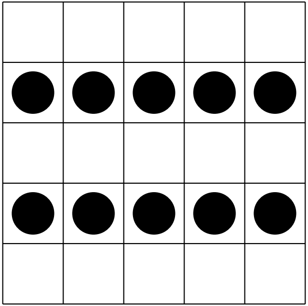
Combien de pièges pour la taupe suivante ?



La taupe a muté

Combien de pièges pour la taupe suivante ?





Solution à 10 pièges, borne inférieure par le dual à 8, alors ?

C'est bien de jouer mais... quel rapport ?

Modélistation par un hypergraphe :

- Sommets : cases du graphe
- Hyper-arêtes : position d'une taupe possible (trois cases alignées)
- Solution $\Leftrightarrow$ couverture des arêtes
- Problème dual : trouver le plus grand nombre d'arêtes qui ne s'intersectent pas.

En conclusion :

Domination/Identification dans les graphes :

- Problèmes de mathématiques discrètes assez récents, contenant beaucoup de problèmes ouverts,
- Accessibles, permettent de faire des jeux mathématiques
- Équipe Maths à Modeler : sensibiliser les élèves à la démarche de recherche en mathématiques à travers des jeux issu des mathématiqes discrètes
- Stage de licence proposé très prochainement !

Merci de votre attention !