INF233 TD13 : Arbres

22 novembre 2011

Exercice 1 : **Arbres à 6 sommets**

Trouver tous les arbres à 6 sommets.

Exercice 2 : **Arbre à au moins trois feuilles**

Soit T un arbre comportant au moins 3 sommets de degré 1.

Question 1 – Montrer que T contient au moins un sommet de degré au moins 3.

Exercice 3 : **Cycles dans un graphe et son complémentaire**

Soit G un graphe dont le nombre de sommets est supérieur ou égal à 5.

Question 1 – Montrer que G ou $\overline{G}$ contient un cycle.

Exercice 4 : **Le château d'eau**

Une communauté de commune veut desservir un ensemble de villages en eau potable à partir d'un château d'eau placé dans l'un des villages. Selon des paramètres législatifs, géologiques, etc., le coût d'installation des canalisations pour transporter l'eau est estimé pour certaines paire de villages. Certains villages ne peuvent pas être reliés directement à cause du relief. On suppose que les capacités des canalisations sont illimitées. Il faut déterminer un réseau qui puisse acheminer de l'eau dans chaque village, et ce au moindre coût.

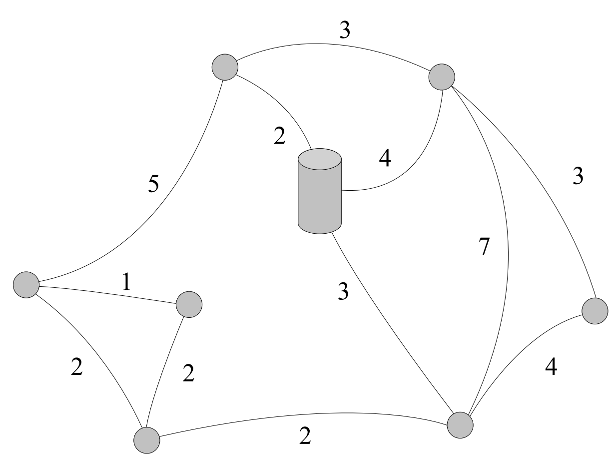

Figure 1 – Le château d'eau est représenté par le cyclindre, les disques étant les villages à desservir. Les chiffres représentent les coûts de liaison entre deux villages.

Question 1 – Trouvez une solution pour ce problème en utilisant l'algorithme de Kruskal.

Exercice 5 : **L'algorithme de Prim**

On considère l'algorithme de marquage suivant :

```
ALGORITHME Prim
ENTREES G=(V,E) un graphe connexe et une fonction de poids sur E
SORTIE T un arbre couvrant de poids minimum

F : ENSEMBLE des arêtes de l'arbre
Initialiser F à vide

Marquer arbitrairement un sommet
tant que il existe un sommet non marqué adjacent à un sommet marqué
  Sélectionner un sommet y non marqué adjacent à un sommet marqué x
  tel que (x,y) est une arête de plus faible poids
  F := F union (x,y)
  Marquer y
fin tant que

Retourner T=(V,F)
```

Question 1 – Démontrer que le graphe T retourné par l'algorithme `Prim` est un arbre couvrant de G.

Question 2 – Montrer par récurrence qu'à chaque étape de l'algorithme, il existe un arbre couvrant de poids minimum de G comportant les arêtes contenues dans l'ensemble F courant. On pourra utiliser le fait qu'ajouter une arête à un arbre crée nécessairement un cycle.

Question 3 – Appliquer cet algorithme au problème du château d'eau.