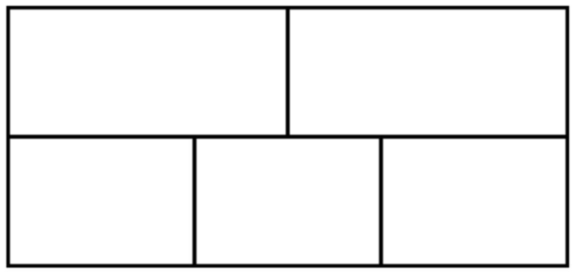
INF233 TD14 : Chemins eulériens et hamiltoniens

23 novembre 2011

Exercice 1 : Est-il possible de tracer une courbe, sans lever le crayon, qui coupe chacun des 16 segments de la figure suivante exactement une fois ?



Exercice 2 : Soit G un graphe non Eulérien. Est-il toujours possible de rendre G Eulérien en lui rajoutant un sommet et quelques arêtes ?

Exercice 3 :

On considère des dominos dont les faces sont numérotées 1, 2, 3, 4 ou 5.

Question 1 – En excluant les dominos doubles, de combien de dominos dispose-t-on ?

Question 2 – Montrez que l'on peut arranger ces dominos de façon à former une boucle fermée (en utilisant la règle habituelle de contact entre les dominos).

Question 3 – Pourquoi n'est-il pas nécessaire de considérer les dominos doubles ?

Question 4 – Si l'on prend maintenant des dominos dont les faces sont numérotées de 1 à n, est-il possible de les arranger de façon à former une boucle fermée ?

Exercice 4 : On dispose d'un fil de fer de 120 cm. Est-il possible de préparer une carcasse de cube de 10 cm d'arête sans couper le fil ? Sinon, combien de fois au minimum faut-il couper le fil de fer pour fabriquer cette carcasse ?

Exercice 5 : Un postier nouvellement nommé en milieu rural se demande comment organiser sa tournée pour pédaler le moins possible sur sa bicyclette, préférant se réserver pour le Tour de France. Il dispose de la carte de la zone à couvrir, et de vagues souvenirs de ses cours de théorie des graphes. Bien évidemment, pour assurer la distribution du courrier, il doit passer par toutes les rues. Le postier part de la poste pour commencer sa tournée et doit reposer sa bicyclette à la poste à la fin de la tournée.

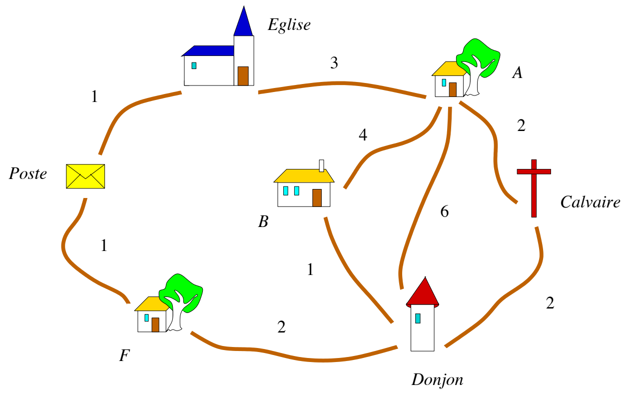
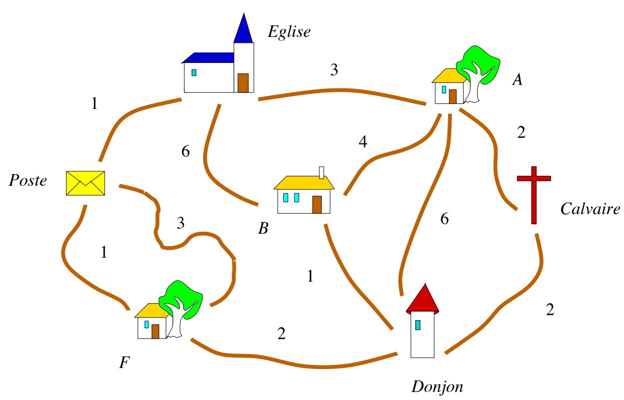


Figure 1 – Les valuations sur les chemins indiquent leur longueur en kilomètre.

Question 1 – Comment le postier peut-il trouver une tournée de distance minimale dans ce cas ?

De nouvelles maisons viennent de se construire sur la route entre l'église et le hameau B, et sur le chemin des aiguilles entre la poste et le lieu dit F. Les routes que doit maintenant desservir notre postier sont représentées ci-dessous.

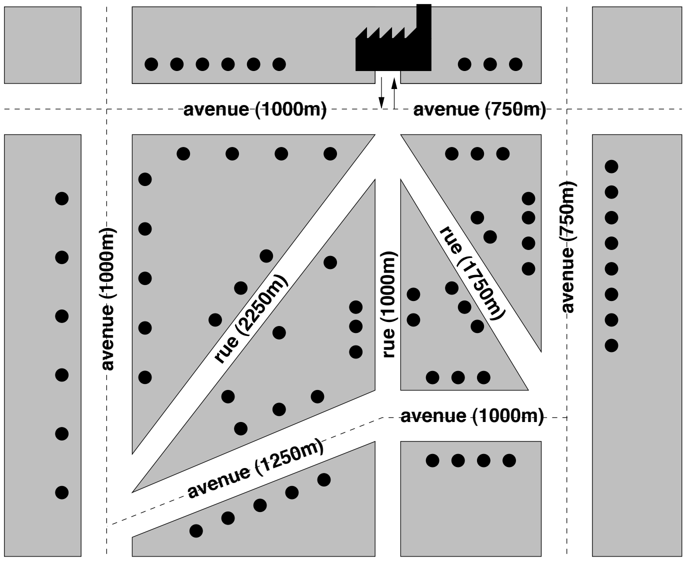


Supposons que notre postier ait opté pour une tournée T. On peut alors associer à cette tournée la graphe multiple $G_T = (V, E_T)$ où chaque arête est représentée autant de fois que la rue correspondante est parcourue par le postier.

Question 2 – Que peut on dire de la tournée du postier dans G_T ? Quelle est sa longueur ?

Exercice 6 : **Ramassage des poubelles**

Voici le plan simplifié d'un quartier de Propreville. Une benne venant de l'usine d'incinération doit vider les 70 conteneurs indiqués sur le croquis et revenir à l'usine.



La circulation sur les avenues et sur les rues est dans les deux sens. La vitesse du camion-benne à vide (ou entre deux ramassages) est de 30km/h et il est le même dans les deux sens. Il faut compter 30 secondes pour vider un conteneur. Chaque avenue a deux voies et il faut réaliser le ramassage indépendament de chaque coté, ce qui nécessite deux passages de la benne (un dans chaque sens). Le ramassage sur les trois rues se fait des deux cotés en même temps.

Question 1 – Trouver le trajet optimal qui minimise le temps total du parcours nécessaire pour ramasser toutes les ordures.

Exercice 7 : **Hypercubes**

L'hypercube de dimension $n \geq 1$ est un graphe ayant pour sommets l'ensemble de tous les mots binaires de longueur n. Par exemple, $00, 01, 10, 11$ sont les 4 sommets de l'hypercube de dimension 2. Deux sommets sont liés par une arête si et seulement si les mots correspondants diffèrent en exactement une coordonnée (c'est-à-dire en un bit). Par exemple, il y a une arête entre 00 et 10, mais pas entre 00 et 11. L'hypercube de dimension n est un graphe généralement noté Q_n.

Question 1 – Pour tout $n \geq 1$, quel est le nombre de sommets de l'hypercube de dimension n ? Quel est le nombre d'arêtes ?

Question 2 – Représenter Q_1, Q_2, Q_3 et Q_4.

Question 3 – Démontrer que l'hypercube Q_n est un graphe biparti pour tout $n \geq 1$.

Question 4 – Démontrer que Q_2, Q_3, et Q_4 sont hamiltoniens.

Une construction récursive de Q_n en fonction de Q_{n-1} consiste à considérer deux copies de Q_{n-1} que l'on connecte entre elles par un ensemble d'arêtes particulier, que l'on appelle un *couplage*.

Question 5 – Expliciter cette construction pour Q_3 et Q_4. Donner la construction générale pour n quelconque.

Cette vision des choses permet d'appliquer un principe de récurrence pour démontrer des propriétés intéressantes de l'hypercube.

Question 6 – Démontrer que Q_n est hamiltonien pour tout $n \geq 2$. On pourra faire une preuve par récurrence en utilisant la question précédente, qui donne à la fois le cas de base de la récurrence et le principe de décomposition permettant d'appliquer l'hypothèse de récurrence.