

20 septembre 2011

Exercice 1 :

Dans un village de 400 habitants, y a-t-il deux personnes qui sont nées le même jour (pas forcément de la même année) ?

Exercice 2 :

Peut-on choisir 51 nombres parmi $1, 2, \dots, 100$, sans avoir aucune paire de nombres consécutifs ?

Exercice 3 :

Déterminer le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments, pour $n = 0, 1, 2, 3, 4$ et 5 .

Exercice 4 :

Décider si les relations suivantes sur \mathbb{R} sont réflexives, symétriques, antisymétriques, transitives :

Question 1 – xRy ssi $x = y$;

Question 2 – xRy ssi $x \geq y$;

Question 3 – xRy ssi $x > y$.

Exercice 5 :

Soit $X = \{1, 2, 5, 6, 7, 9, 11\}$ et xRy ssi $x - y$ est divisible par 5. Vérifier que R est une relation d'équivalence et décrire la partition de X en classes d'équivalence.

Exercice 6 :

Soient R et S des relations d'équivalence sur un ensemble X . Décider lesquelles des relations suivantes sont aussi des relations d'équivalence :

Question 1 – $R \cap S$;

Question 2 – $R \cup S$;

Question 3 – $R \setminus S$.

Exercice 7 :

Dire si les relations suivantes sur X sont réflexives, symétriques, antisymétriques, transitives :

Question 1 – $X = \mathbb{N}$ et xRy ssi $x = -y$;

Question 2 – $X = \mathbb{R}$ et xRy ssi $\cos^2 x + \sin^2 y = 1$;

Question 3 – $X = \mathbb{N}$ et xRy ssi $\exists p, q \geq 1, y = px^q$ (p et q sont des entiers).

Question 4 – Quelles sont parmi les exemples précédents les relations d'ordre et les relations d'équivalence ?

Exercice 8 :

On définit sur \mathbb{R} la relation xRy si et seulement si $x^2 - y^2 = x - y$.

Question 1 – Montrer que R est une relation d'équivalence.

Question 2 – Calculer la classe d'équivalence d'un élément x de \mathbb{R} . Combien y-a-t-il d'éléments dans cette classe ?

Exercice 9 :

On définit sur \mathbb{Z} la relation xRy si et seulement si $x + y$ est pair. Montrer qu'on définit ainsi une relation d'équivalence. Quelles sont les classes d'équivalence de cette relation ?