INF233-TD5 : Récurrence

27 septembre 2011

Exercice 1 :

Montrer par récurrence les résultats suivants :

Question 1 – La somme des entiers de 1 à n vaut $\frac{n(n+1)}{2}$.

Question 2 – $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$.

Question 3 – La somme des n premiers cubes est $\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

Question 4 – $(a + b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$.

Exercice 2 : **Nombre de partitions d'un ensemble à n éléments.**

Une *partition* de $\{1, ..., n\}$ est un ensemble de sous ensembles $U_1, ..., U_k$ de $\{1, ..., n\}$ tels que $U_i \cap U_j = \emptyset$ pour tous $i \neq j$ et tels que tout élément de $\{1, ...n\}$ est dans un des ensembles. (Par exemple les classes d'équivalence d'une relation d'équivalence sur $\{1, ...n\}$ sont une partition de $\{1, ..., n\}$.

Question 1 – Ecrire toutes les partitions de $\{1, ..., 4\}$. Comptez combien il y a de partitions avec un élément, deux éléments, trois éléments, quatre éléments.

On dénote par B_n^k le nombre de partition de $\{1, ..., n\}$ avec k éléments (non vide).

Question 2 – Donner les valeurs de B_n^0, B_n^1, B_n^n.

Question 3 – Montrer que pour $0 < k < n$, $B_n^k = kB_{n-1}^k + B_{n-1}^{k-1}$.

Question 4 – Montrer de deux manières que $B_n^2 = 2^{n-1} - 1$, pour $n \geq 1$.

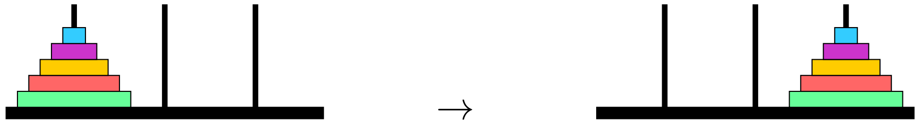
Question 5 – Montrer que pour tout $1 \leq k \leq n$: $B_n^k = \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \frac{(k-i)^n}{(k-i)!i!}$.

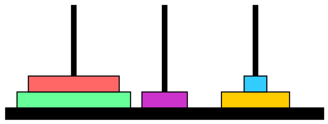
On dénote par B_n le nombre de partitions totales de $\{1, .., n\}$.

Question 6 – Montrer que $B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$.

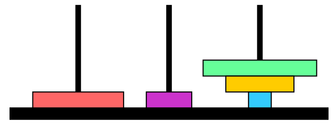
Exercice 3 : Montrer qu'avec des timbres de 3 et 5 euros, on peut faire des affranchissements pour toutes les sommes entières de plus de 8 euros. (Indice : il faut faire une récurrence à 3 crans).

Exercice 4 : Dans le jeu des tours de Hanoi, il y a 3 pics et n disques. Les disques ont toutes des tailles différentes et on supposera que les disques sont dans l'ordre des tailles (le disque 1 est le plus petit, le disque n est le plus grand). Au départ tous les disques sont disposés du plus grand au plus petit sur un des pics. Il faut déplacer tous les disques pour les mettre sur un autre pic. On ne peut deplacer les disques que un par un, on ne peut prendre qu'un disque qui est au dessus, et on ne peut pas mettre un disque sur un disque plus petit.





Autorisée



Interdite

Montrer par récurrence qu'il faut au moins $2^n - 1$ coups pour pouvoir déplacer toute la pile.