Programmation linéaire

Eric Duchêne

Laboratoire LIRIS, Université Lyon 1

Recherche Opérationnelle, cours de M1

Exemple

À l'approche des fêtes de Pâques, un artisan chocolatier décide de confectionner des oeufs en chocolat. En allant inspecter ses réserves, il constate qu'il lui reste 18 kilos de cacao, 8 kilos de noisettes et 14 kilos de lait. Il a deux spécialités : l'oeuf Extra et l'oeuf Sublime. Un oeuf Extra nécessite 1 kilo de cacao, 1 kilo de noisettes et 2 kilos de lait. Un oeuf Sublime nécessite 3 kilos de cacao, 1 kilo de noisettes et 1 kilo de lait. Il fera un profit de 20 euros en vendant un oeuf Extra, et de 30 euros en vendant un oeuf Sublime. Combien d'oeufs Extra et Sublime doit-il fabriquer pour faire le plus grand bénéfice possible ?

Programme linéaire

$$\max z = 20x_e + 30x_s$$

s.c.

$$\begin{aligned} x_e + 3x_s &\leq 18\text{cacao} \\ x_e + x_s &\leq 8 \\ 2x_e + x_s &\leq 14 \\ x_e &\geq 0 \\ x_s &\geq 0 \end{aligned}$$

Programme linéaire : définition

Définition

Un **programme linéaire**, *c'est :*

- *Un ensemble de* n *variables réelles* $x_1, \ldots, x_n$
- *Un ensemble de* m *contraintes* $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j (\leq, \geq, =) b_i$ *pour* $i = 1, \ldots m$.
- *Une fonction d'optimisation* $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ *à minimiser ou maximiser*

Programme linéaire : définition

Définition

Une solution est dite **réalisable** *si elle vérifie l'ensemble des contraintes. Par exemple* $(x_e = 3, x_s = 3)$ *est réalisable dans l'exercice 1.*
Une solution est dite **optimale** *si elle est réalisable et qu'elle optimise la fonction objectif.*
Le **domaine réalisable** *est l'ensemble des solutions réalisables.*

Programme linéaire : définition

Définition

Une solution est dite **réalisable** *si elle vérifie l'ensemble des contraintes. Par exemple* $(x_e = 3, x_s = 3)$ *est réalisable dans l'exercice 1.*
Une solution est dite **optimale** *si elle est réalisable et qu'elle optimise la fonction objectif.*
Le **domaine réalisable** *est l'ensemble des solutions réalisables.*

Forme normale

Définition

Un programme linéaire est sous forme normale si :

- *Les* n *variables sont toutes* ≥ 0.
- *Les* m *contraintes sont* $\leq$ *si c'est un problème de maximisation, elles sont* $\geq$ *si c'est un problème de minimisation.*

Forme normale

En d'autres termes, on peut écrire un P.L. en forme normale comme :

$$\max z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \text{ s.c.}$$

$$\begin{array}{rcll} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j & \leq & b_i & \forall i = 1 \dots m \\ x_j & \geq & 0 & \forall j = 1 \dots n \end{array}$$

ou alors

$$\min z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \text{ s.c.}$$

$$\begin{array}{rcll} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j & \geq & b_i & \forall i = 1 \dots m \\ x_j & \geq & 0 & \forall j = 1 \dots n \end{array}$$

Dualité

Problème primal

$\max z \ = 20x + 30y$ s.c.

$$
\begin{array}{rcl}
x + 3y & \leq & 18 \ (w_1) \\
x + y & \leq & 8 \ (w_2) \\
2x + y & \leq & 14 \ (w_3) \\
x & \geq & 0 \\
y & \geq & 0
\end{array}
$$

Problème dual

$\min z' \ = 18w_1 + 8w_2 + 14w_3$ s.c.

$$
\begin{array}{rcl}
w_1 + w_2 + 2w_3 & \geq & 20 \\
3w_1 + w_2 + w_3 & \geq & 30 \\
w_1 & \geq & 0 \\
w_2 & \geq & 0 \\
w_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

Dualité

Passage du primal au dual

- Le primal doit être sous forme normale.
- Chaque contrainte du primal devient une variable du dual.
- Chaque variable du primal devient une contrainte du dual.
- On inverse les coefficients de la fonction objectif et des contraintes.
- On prend la transposée de la matrice des contraintes.
- Les inégalités au niveau des contraintes changent de sens.

Théorème (Dualité faible)

Pour un P.L de maximisation sous forme normale, toute solution réalisable w_D du dual est une borne supérieure de n'importe quelle solution réalisable du P.L. primal. Cela est vrai en particulier pour les solutions optimales w_D^* et w_P^*, si elles existent :

$$f_P(w_P^*) \leq f_D(w_D^*)$$

où f_P et f_D sont respectivement les fonctions objectifs du primal et du dual.

Dualité

Théorème (Dualité faible)

Pour un P.L de maximisation sous forme normale, toute solution réalisable w_D du dual est une borne supérieure de n'importe quelle solution réalisable du P.L. primal. Cela est vrai en particulier pour les solutions optimales w_D^* et w_P^*, si elles existent :

$$f_P(w_P^*) \leq f_D(w_D^*)$$

où f_P et f_D sont respectivement les fonctions objectifs du primal et du dual.

Théorème (Dualité forte)

Si le primal et le dual admettent des solutions réalisables, leurs solutions optimales respectives w_P^* et w_D^* satisfont $f_P(w_P^*) = f_D(w_D^*)$.

Dualité

Pour une solution réalisable donnée d'un P.L., on dit qu'une contrainte est saturée s'il y a égalité entre partie gauche et droite de cette contrainte.

Théorème (Ecarts complémentaires)

Soient w_P^* et w_D^* des solutions optimales du primal et dual respectivement. Si une contrainte du dual est non saturée dans w_D^*, alors la variable associée dans w_P^* est nulle. Si une variable de w_D^* est non nulle, alors la contrainte associée dans le primal est saturée.

Programmation linéaire en nombre entiers : toutes les variables sont entières. Résoudre un PLNE est un problème NP-complet.

Définition

Etant donné un P.L. en nombre entiers, on appelle P.L. **relaxé** *le P.L. privé de ses contraintes d'intégrité, càd les variables sont réelles.*

PLNE

Programmation linéaire en nombre entiers : toutes les variables sont entières. Résoudre un PLNE est un problème NP-complet.

Définition

Etant donné un P.L. en nombre entiers, on appelle P.L. **relaxé** *le P.L. privé de ses contraintes d'intégrité, càd les variables sont réelles.*

Théorème

Soit w^*_{PLNE} une solution optimale d'un PLNE (de maximisation), et w^*_R une solution optimale de ce PLNE relaxé. Alors on a

$$f(w^*_{PLNE}) \leq f(w^*_R)$$

.

Programmation linéaire en nombre entiers : toutes les variables sont entières. Résoudre un PLNE est un problème NP-complet.

Définition

Etant donné un P.L. en nombre entiers, on appelle P.L. **relaxé** *le P.L. privé de ses contraintes d'intégrité, càd les variables sont réelles.*

Théorème

Soit w^*_{PLNE} une solution optimale d'un PLNE (de maximisation), et w^*_R une solution optimale de ce PLNE relaxé. Alors on a

$$f(w^*_{PLNE}) \leq f(w^*_R)$$

.

Le théorème de dualité faible reste vrai pour un PLNE, mais la dualité forte n'est plus garantie.