M1 Recherche Opérationnelle

1 Programmation Linéaire

1.1 Définition

On considère le problème suivant :

Exemple 1. *À l'approche des fêtes de Pâques, un artisan chocolatier décide de confectionner des oeufs en chocolat. En allant inspecter ses réserves, il constate qu'il lui reste 18 kilos de cacao, 8 kilos de noisettes et 14 kilos de lait. Il a deux spécialités : l'oeuf Extra et l'oeuf Sublime. Un oeuf Extra nécessite 1 kilo de cacao, 1 kilo de noisettes et 2 kilos de lait. Un oeuf Sublime nécessite 3 kilos de cacao, 1 kilo de noisettes et 1 kilo de lait. Il fera un profit de 20 euros en vendant un oeuf Extra, et de 30 euros en vendant un oeuf Sublime. Combien d'oeufs Extra et Sublime doit-il fabriquer pour faire le plus grand bénéfice possible ?*

Résolution : On met en équation en définissant des variables. Ici ce sont les quantités d'oeufs sublimes et extra x_e et x_s.

On considère le programme linéaire suivant

$maxz \ = 20x_e + 30x_s$ s.c.

$$\begin{aligned} x_e + 3x_s &\leq 18 \\ x_e + x_s &\leq 8 \\ 2x_e + x_s &\leq 14 \\ x_c &\geq 0 \\ x_n &\geq 0 \end{aligned}$$

Définition 1. *Un programme linéaire, c'est :*

- *Un ensemble de n variables réelles $x_1, \ldots, x_n$*
- *Un ensemble de m contraintes $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j(\leq, \geq, =)b_i$ pour $i = 1, \ldots m$.*
- *Une fonction d'optimisation $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ à minimiser ou maximiser*

1.2 Résolution

La résolution d'un P.L. se fait en temps polynomial(méthode des points intérieurs). L'algorithme du simplexe, plus connu, est en temps exponentiel dans le pire des cas.

Définition 2. *Une solution est dite réalisable si elle vérifie l'ensemble des contraintes. Par exemple $(x_e = 3, x_s = 3)$ est réalisable dans l'exercice 1.*
Une solution est dite optimale si elle est réalisable et qu'elle optimise la

fonction objectif.
Le domaine réalisable est l'ensemble des solutions réalisables.

Interprétation géométrique dans le plan à partir de l'exo des oeufs de Paques.

Chaque inégalité du P.L. correspond à un demi-plan. L'ensemble des solutions réalisables correspond à l'intersection des demi-plans. La fonction objectif est obtenue par les lignes de niveau $20x + 30y = cte$.

En dimension n (càd avec n variables), l'ensemble des solutions réalisables est un polyèdre (intersection de demi-espaces). Les lignes de niveau sont des hyperplans affines.

Théorème 3. *L'optimum, s'il existe, est obtenu en au moins un sommet du polyèdre.*

Raisonnement sur le nombre de solutions optimales :

— Si le domaine est vide, alors aucune solution optimale.
— Si le domaine est non vide, borné : 1 ou une infinité de solutions optimales (donner l'illustration graphique)
— Si le domaine est non vide, non borné : 0 ou 1 ou une infinité de solutions optimales ou solution infinie

Un algo de résolution pourrait alors s'intéresser aux sommets du polyèdre uniquement. C'est ce que fait l'algorithme du *simplexe*.

1.3 Forme normale d'un P.L.

Définition 4. *Un P.L est sous forme normale si :*

— *Les n variables sont toutes ≥ 0.*
— *Les m contraintes sont $\leq$ si c'est un problème de maximisation, elles sont $\geq$ si c'est un problème de minimisation.*

En d'autres termes, on peut écrire un P.L. en forme normale comme :

$$\max z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \text{ s.c.}$$

$$\begin{array}{rcll} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j & \leq & b_i & \forall i = 1 \dots m \\ x_j & \geq & 0 & \forall j = 1 \dots n \end{array}$$

ou alors

$$\min z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \text{ s.c.}$$

$$\begin{array}{rcll} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j & \geq & b_i & \forall i = 1 \dots m \\ x_j & \geq & 0 & \forall j = 1 \dots n \end{array}$$

1.4 Dualité

La transformation d'un P.L primal en forme normale en son dual est donc automatique, on échange contraintes et variables.

$$\max z \;= \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \text{ s.c.}$$

$$\begin{array}{rcll} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j & \leq & b_i & i = 1 \dots m \\ x_j & \geq & 0 & j = 1 \dots n \end{array}$$

a pour dual

$$\min z' \;= \sum_{i=1}^{m} b_i w_i \text{ s.c.}$$

$$\begin{array}{rcll} \sum_{i=1}^{m} a_{j,i} w_i & \geq & c_j & j = 1 \dots n \\ w_i & \geq & 0 & i = 1 \dots m \end{array}$$

Théorème 5 (Dualité faible)**.** *Pour un P.L en forme normale, toute solution réalisable w_D du dual est une borne supérieure de n'importe quelle solution réalisable du P.L. primal. Cela est vrai en particulier pour les solutions optimales w_D^* et w_P^*, si elles existent :*

$$f(w_P^*) \leq f(w_D^*)$$

Théorème 6. *Le dual du dual est le primal.*

Théorème 7 (Dualité forte)**.** *Si le primal et le dual admettent des solutions réalisables, leurs solutions optimales respectives w_P^* et w_D^* satisfont $f(w_P^*) = f(w_D^*)$.*

Par conséquent, si le dual est plus facile à résoudre que le primal, on peut l'utiliser pour trouver la solution du primal.

2 Programmation linéaire en nombre entier (PLNE)

C'est un PL où les variables sont entières. Le nombre de solutions réalisables devient fini, mais potentiellement exponentiel par rapport au nombre de contraintes/variables. On ne connait aucun algorithme de résolution (et pour cause, c'est NP-complet).

2.1 Relaxation linéaire et résolution graphique

On peut toujours considérer le PL associé en enlevant les contraintes entières (en bornant éventuellement : $x_i \in \{0, 1\}$ devient $0 \leq x_i \leq 1$). On appelle cela une version relaxée du PLNE. Le polyèdre correspondant contient alors toutes les solutions réalisables du PLNE, et on ne considère que celles qui sont entières.

La solution optimale du PL associé donne une borne (supérieure si max, inférieure si min) sur la solution optimale du PLNE :

Proposition 1. *Soit w^*_{PLNE} la solution optimale d'un PLNE (de maximisation), et w^*_R la solution optimale de ce PLNE relaxé. Alors on a $w_{PLNE} \leq w_R$.*

Attention :
- L'optimum relaxé peut être très loin de l'optimum entier.
- Il se peut qu'il n'y ait aucune solution réalisable entière alors qu'il y a des solutions réalisables réelles.

2.2 Dualité et PLNE

Théorème 8 (Dualité faible)**.** *Si P est le PLNE primal qui admet une solution réalisable et est un problème de maximisation, on a :*

$$f(w^*_P) \leq opt(w^*_{PR}) = f(w^*_{DR}) \leq f(w^*_D)$$

où PR est la relaxation linéaire de P, DR le dual de PR et D la version entière de DR.

Par contre, on n'a pas toujours dualité forte !

2.3 Résolution exacte

2.3.1 Branch and Bound

Principe : prendre la relaxation linéaire P_L et obtenir une solution optimale. Cela donne une borne haute et une solution fractionnaire. Choisir une des variables x_i égale à α non entier dans la solution et traiter deux problèmes P_1 et P_2 en ajoutant respectivement les contraintes $x_i \leq \lfloor \alpha \rfloor$ et $x_i \geq \lceil \alpha \rceil$.

On recommence sur P_1 et P_2 récursivement.

Si l'on tombe sur une solution entière pour un P_i, alors cela donne une solution réalisable avec une valeur optimale. On prend cette solution comme la solution meilleure connue que l'on met à jour lorsqu'on rencontre de meilleure solution optimale.

Si pour un P_i, la solution fractionnaire a une valeur plus petite que la solution optimale entière courante, on supprime la branche.