Programmation linéaire, programmation dynamique et Branch Bound

eric.duchene@univ-lyon1.fr, aline.parreau@univ-lyon1.fr

Exercice 1 : **Chocolaterie**

Une chocolaterie peut produire du chocolat noir, du chocolat au lait ou du chocolat blanc à partir de cacao et de lait. L'entreprise dispose de 500 kilos de cacao et de 1000 litres de lait. Les quantités d'ingrédients nécessaires et le prix de vente par kilo de chocolat produit sont donnés dans le tableau suivant pour chaque type :

	Cacao (g)	Lait (l)	Prix de vente (€)
Un kilo de chocolat noir	800	0	8
Un kilo de chocolat au lait	400	0.4	5
Un kilo de chocolat blanc	200	0.6	3

On cherche à maximiser les profits de l'entreprise.

Question 1 – Modélisez ce problème sous forme d'un programme linéaire.

Un kilo de chocolat au lait peut également être produit à partir de 500 grammes de chocolat noir et de 0,3 litre de lait. Le coût d'une telle transformation est de 0.25 euro par kilo de chocolat au lait fabriqué ainsi.

Question 2 – En ajoutant cette nouvelle possibilité, modélisez ce problème sous forme d'un programme linéaire.

Exercice 2 : **Usine**

Une usine fabrique deux produits P_1 et P_2. Le marché est porteur et toute la production de la semaine sera vendue. Chacun de ces produits demande des heures de fabrication sur les machines A, B et C comme indiqué dans le tableau ci-dessous. Ce tableau indique également la disponibilité totale de chaque machine par semaine.

	Machine A	Machine B	Machine C
Produit P_1	2h	0h	1h
Produit P_2	5h	1h	0h
Disponibilité	24h	3h	5h

On cherche à maximiser les profits de l'entreprise, sachant que la vente du produit P_1 rapporte (en terme de marge) 1000 € à l'entreprise, et la vente du produit P_2 rapporte 2000 €.

Question 1 – Modélisez ce problème sous forme d'un PL. Pensez à bien décrire à quoi correspondent vos variables (et les unités choisies).

Question 2 – Résolvez graphiquement votre PL (on supposera les variables réelles - la fabrication d'un même produit pouvant être réalisée sur deux semaines consécutives). Donnez les valeurs des variables et de la fonction d'optimisation lorsque l'optimum est atteint.

Question 3 – On suppose maintenant que les quantités de produits vendus sont entières. Donnez la valeur de la solution optimale

Exercice 3 :

Reprendre les sept problèmes énoncés dans le TD1 et les exprimer sous forme d'un programme linéaire en nombre entiers. Pour Ordonnancement, on considèrera le problème avec m machines, n jobs non découpables et où l'on veut minimiser le temps final d'éxécution.

Conseil : On pourra traiter les problèmes dans l'ordre suivant : Sac-à-dos, Flots, Couplage, Bin Packing, Ordonnancement, Voyageur de commerce, Coloration

Exercice 4 : Soit le programme linéaire suivant.

$$\begin{array}{lrcrcrcrcl}
\min & 30x & - & y & + & 3z & + & 5t & & \\
s.c. & 4x & - & y & + & z & & & \geq & 5 \\
 & 5x & - & y & - & z & + & t & \geq & 3 \\
 & x, & & y, & & z, & & t & \geq & 0
\end{array}$$

Question 1 – Expliquer pourquoi le problème dual est plus simple à résoudre.

Question 2 – Ecrire le problème dual.

Question 3 – Résoudre graphiquement le problème dual. Donner la solution optimale et la valeur de l'objectif à l'optimal.

Question 4 – Quelle est la valeur de la fonction objectif du primal ?

Question 5 – Comment faire pour retrouver la solution optimale du primal ?

Exercice 5 : **Sac-à-dos en programmation dynamique**

On considère l'instance de Sac-à-Dos suivante, avec capacité du sac $W = 18$.

objets	1	2	3	4	5	6
poids w_i	4	2	6	8	1	6
utilité u_i	10	3	5	12	1	6

Pour résoudre ce problème on va utiliser la programmation dynamique. Celle-ci consiste à calculer des solutions partielles optimales de proche en proche jusqu'à atteindre la solution finale.

Soit $f(i, w)$ la valeur optimale d'un sac-à-dos de taille w utilisant les objets 1 à i. La valeur que l'on recherche est $f(n, W)$. Pour calculer cette valeur de f, on va calculer les différentes valeurs de f pour tous les paramètres plus petit. Pour plus de lisibilité, on va stocker toutes ces valeurs dans un tableau 2D de taille $n \times W$.

$i \backslash w$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
0																			
1																			
2																			
3																			
4																			
5																			
6																			

Question 1 – Quelles valeurs de $f(w, i)$ sont triviales ? Les remplir dans le tableau

Question 2 – Exprimer $f(w, i)$ à l'aide des valeurs pour $i - 1$ en considérant le cas où l'objet i est choisi et le cas où il n'est pas choisi.

Question 3 – Remplir le tableau à l'aide de cette formule et en déduire la valeur optimale du sac à dos.

Question 4 – Retrouver les objets utilisés dans ce sac à dos.

Exercice 6 : **Rendu de pièces de monnaire**

On dispose d'un ensemble de pièces de monnaie de valeur entière dans $P = \{p_1, ..., p_n\}$. Chaque pièce est disponible en quantité suffisante. On veut déterminer pour une somme fixée S le nombre minimum de pièces nécessaire pour pouvoir faire exactement la somme S. On veut résoudre ce problème à l'aide de la programmation dynamique.

Question 1 – On note $M(s, i)$ le nombre de pièces minimum utilisées pour faire la somme s en utilisant les pièces 1 à i. Donner la valeur de la fonction recherchée, les cas de bases et la relation de récurrence.

Question 2 – Expliquer la méthode générale pour résoudre ce problème.

Question 3 – Appliquer cette méthode pour $P = \{1, 5, 7, 13\}$ et $S = 17$. Donnez l'assemblage final de pièces.

Exercice 7 :

On considère le problème du sac-à-dos de capacité $X = 22$ avec les objets suivants :

objets	a	b	c	d	e
poids	3	4	3	3	13
utilité	12	12	9	15	26

Résoudre ce problème avec un algorithme de *Branch and Bound*.

Exercice 8 : **Dépôts d'entreprise**

Une entreprise nationale souhaite installer des dépôts afin d'approvisionner les magasins de sa chaîne. Ses magasins (au nombre de n) sont localisés sur toute la France. Pour les dépôts, l'entreprise a retenu un ensemble de m sites potentiels. On dispose des données suivantes :

- $c_{i,j}$: coût unitaire (par m^3) de transport entre le dépôt i et le magasin j.
- f_i : coût d'installation du dépôt i
- K_i : capacité du dépôt i (en m^3)
- d_j : demande du magasin j (en m^3) par semaine.

Un magasin peut être fourni par plusieurs dépôts.

Question 1 – Formuler un programme linéaire en nombre entier qui permet de minimiser les coûts sur une horizon de 4 ans.

Question 2 – Pour simplifier l'approvisionnement, les magasins souhaitent être fournis par au plus deux dépôts. Intégrer cette contrainte dans la formulation.