

Feuille exercices 3 : Flots et couplages

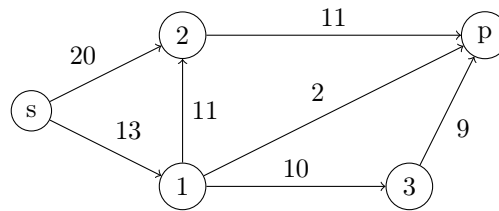
eric.duchene@univ-lyon1.fr, aline.parreau@univ-lyon1.fr

Exercice 1 : Pour choisir les sommets à marquer et les chemins, on effectuera des parcours en profondeur en choisissant en priorité p puis les sommets dans l'ordre croissant.

Question 1 – Déterminer un flot complet pour le graphe ci-dessous.

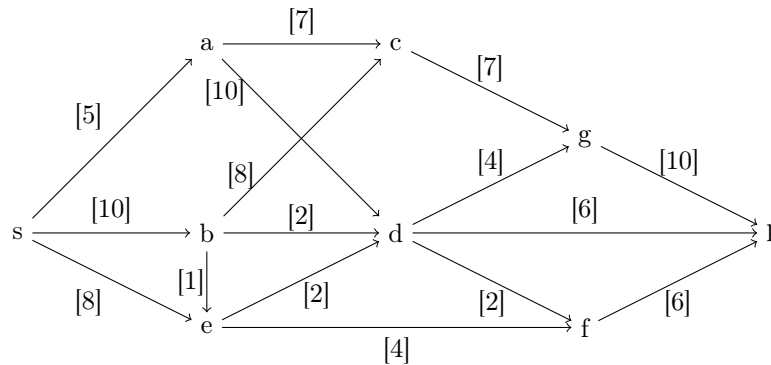
Question 2 – Déterminer un flot maximal pour le graphe ci-dessous.

Question 3 – Donner une coupe minimale



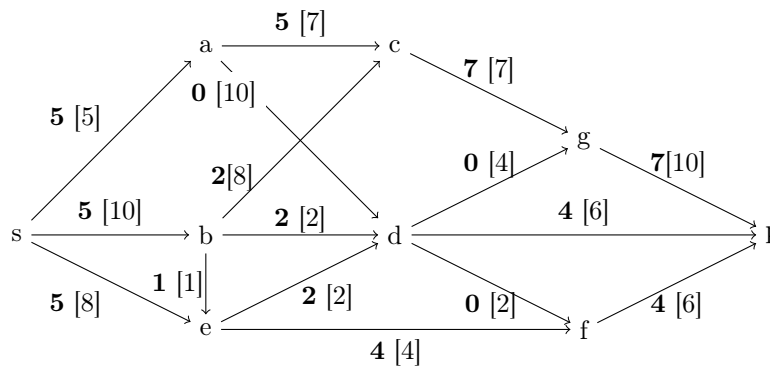
Exercice 2 : Capacité d'un réseau routier

Avant d'établir un projet de construction d'autoroute, on désire étudier la capacité d'un réseau routier reliant la ville s à la ville p représentée par le graphe ci-dessous. Pour cela on a évalué chaque route le nombre maximal de véhicules qu'elle peut écouler par heure. Ces évaluations sont indiquées entre crochet en centaines de véhicules par heure sur les arcs du graphe.



Question 1 – Expliquer pourquoi ce problème revient à calculer un flot dans un graphe.

Une première estimation de la capacité maximale de ce réseau a été faite. Elle est représentée par le flot suivant (les valeurs du flot sont indiquées sur chaque arc en gras).



Question 2 – Ce flot est-il complet ? Est-il maximal ? Justifier, et améliorer éventuellement le flot pour obtenir un flot maximal. Quel est le débit maximal de véhicules susceptibles de s'écouler de la ville s à la ville p ?

Question 3 – Donner une coupe de capacité minimale.

Question 4 – Un stagiaire remarqua que le débit maximal entre les villes s et p prédit pour le réseau routier, à savoir 2000 véhicules par heure, surestimait largement ses observations effectuées sur le terrain. Ses observations mesuraient un débit légèrement inférieur à 1700 véhicules par heure. Il se rendit compte que le débit horaire du réseau urbain des villes traversées n'avait pas été pris en compte. Le débit horaire durant la traversée des villes est donné par le tableau ci-dessous en centaines de véhicules par heure.

villes	a	b	c	d	e	f	g
débits	6	7	8	6	6	5	9

Il eut alors l'idée d'éclater en 2 sommets chacun des sommets correspondant aux villes traversées, afin d'y faire figurer les contraintes de débit urbain. Donnez le réseau ainsi obtenu et vérifiez que le flot maximal dans le réseau est de 1700 véhicules par heure.

Exercice 3 : Une société organise le transport de céréales entre les villes A , B et C disposant respectivement de stocks de 8, 12 et 5 tonnes de céréales et les villes D , E et F ayant besoin de respectivement 11, 9 et 4 tonnes de céréales.

Question 1 – Modéliser ce problème à l'aide d'un flot. Est-il possible de satisfaire la demande de toutes les villes ?

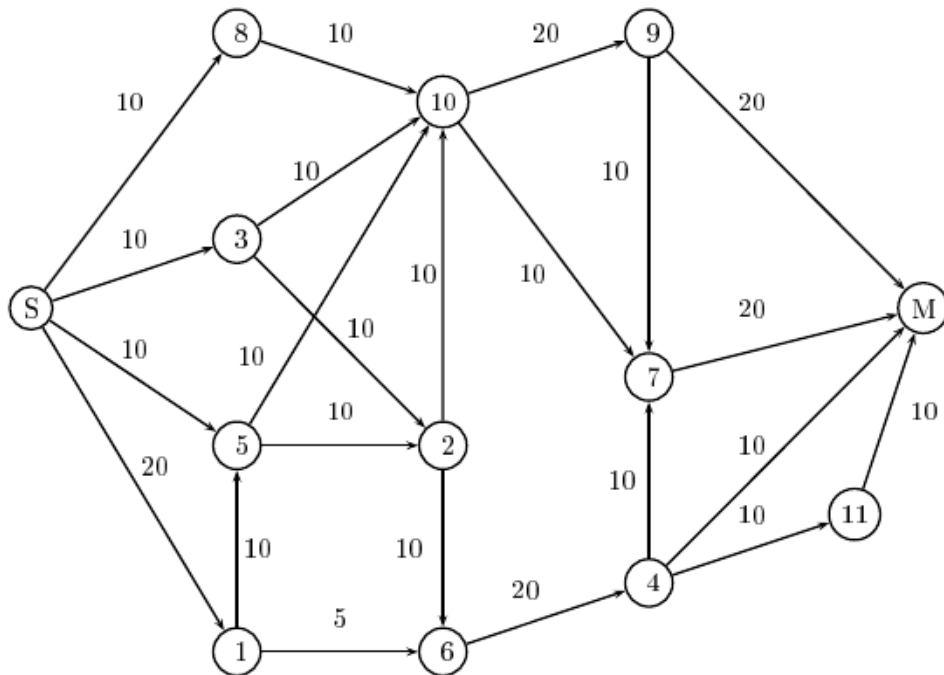
En pratique, certaines villes sont très loin entre elles ou ne permettent un transport que d'une certaine quantité de marchandise. Le tableau suivant donne les capacités de transport, en tonnes, entre les différentes villes :

	A	B	C
D	6	3	1
E	2	9	0
F	0	0	5

Question 2 – Intégrer cette contrainte dans votre modèle. Peut-on toujours satisfaire la demande ?

Exercice 4 : Réseau Internet

On a un serveur S qui souhaite envoyer des données à un client M . On suppose que les deux postes sont connectés par le réseau télécom décrit dans le graphe de la figure ci-dessous. Les valuations des arcs représentent un débit en Mo/s. Les sommets allant de 1 à 11 sont des routeurs. On suppose qu'un routeur est capable de recevoir plusieurs parties d'un même message par des voisins différents et de le redécouper pour l'envoyer sur plusieurs voisins à la fois.



Question 1 – Quelle quantité d’information peut-on faire passer de S à M par seconde ?

Question 2 – Déterminez le nombre minimum de câbles sectionnés qui peuvent empêcher l’ordinateur S d’être connecté à l’ordinateur M. Quelle est la propriété des câbles que l’on peut ajouter pour permettre une meilleure fiabilité du réseau ?

Question 3 – Déterminez le nombre minimum de routeurs en panne qui peuvent empêcher l’ordinateur S d’être connecté à l’ordinateur M.

Exercice 5 : L’équipe lyonnaise de patinage artistique doit former des couples mixtes de patinage en vue des championnats de France. Elle dispose de six filles et six garçons prêts pour la compétition. Cependant, certaines incompatibilités (humeur, style,...) existent entre certaines filles et certains garçons. Ces incompatibilités sont recensées dans le tableau suivant (une croix désigne une incompatibilité).

	F1	F2	F3	F4	F5	F6
G1		x		x	x	
G2	x	x		x	x	
G3	x		x			x
G4		x		x	x	x
G5	x		x			x
G6		x	x	x	x	

Question 1 – Combien de couples peut-on former au maximum ?

Exercice 6 : Avec un jeu de 52 cartes, on crée aléatoirement 13 paquets de 4 cartes. On veut choisir dans chaque paquet une carte de sorte à obtenir à la fin 13 cartes de valeurs différentes.

Question 1 – Modéliser ce problème à l’aide d’un graphe.

Question 2 – Démontrer que cela est toujours possible en utilisant le théorème de Hall.