TD BIA 2013
TD3 + TD4 Logique révisions

Nadia Kabachi, Marie Lefevre, Alain Mille, Aurélien Tabard

3 et 17 octobre 2013

L'expérience des années précédentes a montré une grande variabilité de réalisation de ces TD et nous proposons un seul sujet (un peu long) à réaliser sur 2 séances avec un travail personnel entre les deux séances et une répartition entre les deux séances qui peut dépendre du déroulement avec chaque groupe.

Le TD se concentre plus particulièrement sur la logique d'ordre 1, qui introduit les mécanismes mis en oeuvre pour permettre la résolution similaire à l'ordre 0 avec un principe d'unification qui sera aussi celui utilisé en "programmation logique". Ces éléments ont été présentés dans leur principe en cours, il s'agit maintenant de vous les approprier pendant les TD. Des éléments de cours sont rappelés dans l'énoncé pour vous faciliter la vie, mais ils ne seront pas re-expliqués pendant le TD. Utilisez les pour répondre aux questions et faire les exercices.

ATTENTION : pour des raisons d'organisation, la séance 2 du TD est le 17 octobre 2013. Le TD du 10 octobre est assuré par A. Mille sur l'ingénierie des connaissances.

1 Formules atomiques (atomes), variables, termes, formules du premier ordre (formules)

Lorsqu'il s'agit de la logique des prédicats et selon les auteurs, on trouvera indifféremment atome pour désigner une "formule atomique" et formules pour désigner les "formules du premier ordre".

Dans les formules suivantes, qu'est-ce qui est atomes, variables, termes, formules ?

$(\forall x \exists y \forall t R(x, z, y)) \rightarrow (\exists x \forall y \exists t S(x, z, t))$

$(\forall x \exists y \forall t R(x, z, t)) \rightarrow (\exists x \forall y \exists t S(x, z, t))$

Mettre ces formules sous forme prénexe.

Rappels sur atomes, termes, variables liées et libres, formules

Un atome (ou formule atomique) est un prédicat directement valuable à Vrai ou Faux

Un terme est soit une variable, soit une constante, soit une fonction. Un terme prend sa valeur dans le domaine des variables.

Une variable peut être liée ou libre selon qu'elle est quantifiée (par un quantificateur ou non).

Une formule, est soit un atome, soit une composition de formules avec les connecteurs et les quantificateurs.

Rappels sur la forme prénexe

Une formule F est **prénexe** si elle est de la forme $Q_1 x_1 Q_2 x_2 \ldots Q_n x_n G$ avec G sans quantificateur et chaque Q_i étant soit $\forall$ soit $\exists$.

Les régles à appliquer sont (si Q est un quantificateur et Q' l'autre quantificateur) :

1. $\neg Q x F \equiv Q' x \neg F$
2. $Q x F \wedge G \equiv Q x (F \wedge G)$ si x n'a pas d'occurence dans F
3. $G \wedge Q x F \equiv Q x (G \wedge F)$ si x n'a pas d'occurence dans G
4. $Q x F \vee G \equiv Q x (F \vee G)$ si x n'a pas d'occurence dans F
5. $G \vee Q x F \equiv Q x (G \vee F)$ si x n'a pas d'occurence dans G

Attention, $\exists x \forall y (P(x, y))$ n'est en général pas équivalent à $\forall y \exists x (P(x, y))$

Pour mettre sous forme prénexe une formule quelconque :

- Eliminer les connecteurs $\rightarrow$ et $\leftrightarrow$ en appliquant les lois d'équivalence $((P \rightarrow Q) \equiv (\neg P \vee Q)$ et $(P \leftrightarrow Q) \equiv ((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)))$.
- Transporter les symboles de négation $\neg$ devant les formules atomiques (lois de de Morgan, lois de double négation, et la régle 1)
- Renommer si nécessaire les variables pour pouvoir appliquer les régles d'équivalence en cas de déplacement des quantificateurs
  - $\forall x(A(x) \wedge B(x)) \equiv \forall x A(x) \wedge \forall x B(x)$ mais pas vrai pour le $\vee$!
  - $\exists x(A(x) \vee B(x)) \equiv \exists x A(x) \vee \exists x B(x)$ mais pas vrai pour le $\wedge$!
- Transporter les quantificateurs devant la formule de façon à obtenir une formule prénexe. Utiliser les règles 2 à 5 citées plus haut)

2 Révision 2 : Skolemisation, formes clausales

Pour les rappels sur la skolémisation, nécessaire pour mettre sous forme clausale, voir le cours en ligne (cours Pastre), page 11.

Considérons les énoncés suivants :

1. *Tous les descendants d'un pigeon peuvent voler*
2. *Joe a au moins un parent gris ou blanc*
3. *Un pigeon quelconque est satisfait si tous ses descendants peuvent voler*
4. *Les pigeons gris peuvent voler*
5. *Un pigeon est gris s'il a au moins un parent gris ou blanc*

Mettre les énoncés 1 à 5 sous forme de formules, puis mettre sous forme clausale la conjonction des formules 3 à 5. On se place dans l'univers des pigeons.

3 Monde de Herbrand

Pour les rappels sur l'unification, voir le cours en ligne (Pastre) page 12.

3.1 Montrer que $\exists x \forall y(((U(x) \rightarrow U(y)) \rightarrow T(x)) \rightarrow T(y))$ est universellement valide.

3.2 Déduction

Pour une déduction, on établit d'abord ce qui est vrai (conjonction de prédicats) et pour établir la conclusion, on nie cette conclusion et on l'ajoute à la conjonction. Si la formule ainsi formée est impossible à satisfaire, c'est qu'il n'est pas possible de nier la conclusion en présence des prémisses et que donc la conclusion est une déduction logique des prémisses.

Valider le raisonnement suivant :

1. *Quelques chandelles éclairent très mal*
2. *Les chandelles sont faites pour éclairer*
3. *donc : quelques objets qui sont fait pour éclairer le font très mal*