Algorithme d'unification

1 - Introduction

Généralisation du principe de résolution à la logique des prédicats
==> Etendre définitions de "littéraux complémentaires" et de "résolvant"

Soient $C1 = P(X) \vee Q(a,X)$
$C2 = \neg P(g(Y)) \vee R(Y,b)$
Peut-on dire des littéraux P et $\neg$P qu'ils sont complémentaires ?
Peut-on définir un résolvant ?

Si [g(a)/X] et [a/Y] on obtient :
$C1' = P(g(a)) \vee Q(a,g(a))$
$C2' = \neg P(g(a)) \vee R(a,b)$
C1' et C2' ont un résolvant $C = Q(a,g(a))\ R(a,b)$
C est conséquence logique de C1' et de C2' et donc de C1 et C2.
On peut trouver d'autres instances de C1 et C2 [g(g(b))/X] et [g(b)/Y] ...
On peut continuer sur d'autres instances C1 et C2 dont les littéraux en P sont complémentaires.
Tous les résolvants obtenus sont des instances de $C = Q(a,X)\ R(Y,b)$

Objectifs :

Essayer de produire directement C qui paraît plus général. Il peut être obtenu comme résolvant de
$D1 = P(g(Y)) \vee Q(a,g(Y))$ instance de C1 [g(Y)/X]
et $D2 = \neg P(g(Y)) \vee R(Y,b)$ instance de C2
La substitution de [g(Y)/X] a permis de rendre les deux expressions en P symboliquement complémentaires.

L'unification est donc le procédé qui consiste à trouver des affectations de variables de façon à rendre des expressions identiques symboliquement.

2 - Les substitutions

Une substitution θ est un ensemble fini de couples (ti,Vi) où chaque Vi est une variable, chaque ti un différent de Vi et où aucun couple d'éléments de l'ensemble n'a la même variable Vi

Exemple :

θ1 = {f(Z)/X,t/Y}
θ2 = {a/X,f(g(a))/Y,g(t)/Z}

Définition d'instance

Soit θ une substitution, E une expression.
L'expression obtenue à partir de E en remplaçant simultanément toute occurence de Vi par ti pour tout i est **notée** E.θ et est **appelée instance de** E.

Exemple :

E = P(X,Y) Q(g(X),Z)
θ = {f(a)/X,g(t)/Y,t/Z }
E.θ = P(f(a),g(t)) Q(g(f(a)),t)

Composition de substitutions

Soit θ = {t1/X1, t2/X2, ..., tn/Xn}
σ ={u1/Y1, u2/Y2, ..., um/Ym}
la composition de θ **et** σ **(notée** σ°θ**)** est la substitution obtenue à partir de {t1.σ/X1, t2.σ/X2, ..., tn.σ/Xn, u1/Y1, u2/Y2, ..., um/Ym} en éliminant les couples :
a) ui/Yi si Yi ∈ {X1, X2, ..., Xn}
b) tj.σ/Xj si Xj = tj.σ

Exemple :

θ = {f(T)/X, Z/Y}
σ = {a/X, b/T, Y/Z}
σ°θ = {f(T).σ/X, Z.σ/Y, a/X, b/T, Y/Z}
= {f(b)/X, Y/Y, a/X, b/T, Y/Z}
= {f(b)/X, b/T, Y/Z}

E.(σ°θ) = (E.θ).σ

Substitutions interdites : ?/constante, f(X)/X, ?/fonction
La composition est associative et possède un élément neutre (substitution vide notée ?)

Exemple :

E = P(X,Y) ∨ Q(Y,Z) ∨ R(Y,X)
θ = {f(T)/X, Z/Y}
σ = {a/X, b/T, Y/Z}
E. θ = P(f(T),Z) ∨ Q(Z,Z) ∨ R(Z,f(T))
(E. θ).σ = P(f(b),Y) ∨ Q(Y,Y) ∨ R(Y,f(b))
σ°θ = {ϕ(b)/X, b/T, Y/Z}
E.(σ°θ) = P(f(b),Y) ∨ Q(Y,Y) ∨ R(Y,f(b))

Exercice 1

Calculer la substitution S = Sa°Sb dans les trois cas suivants :

a) Sa = {Y/X, f(Z)/W, b/V} et Sb = {X/Y, g(W)/V, f(V)/U}
b) Sa = {c/Z, f(W)/X, T/Y} et Sb = {b/Z, g(a,X)/Y}
c) Sa = {f(a)/Z, f(b)/Y} et Sb = {a/X, b/Y, T/W}

Les corrections sont uniquement accessibles sur Internet

3 - L'unification

Définition de l'unifieur :

Une substitution θ est un unifieur de l'ensemble W des expressions {E1, ..., Ek}
<==> $E1.\theta = E2.\theta = \dots = Ek.\theta$
W est dit unifiable

Définition de l'unifieur le plus général ou upg :

Un unifieur σ de W = {E1, ..., Ek} est dit **upg** (unifieur le plus général)
si et seulement si pour tout unifieur θ **de W, il existe** δ **tel que :** $\theta = \delta°\sigma$

W = {P(X,Y), P(f(T)),Z}
$\sigma 1$ = {f(T)/X, Z/Y} et $\sigma 2$ = {f(T)/X, Y/Z} **upgs**
θ = {f(a)/X, g(g(a))/Y, g(g(a))/Z, a/T} **unifieur**
$\delta 1$ tel que $\theta 1 = \delta 1°\sigma 1$ est {a/T, g(g(a)/Z}
$\delta 2$ tel que $\theta 2 = \delta 2°\sigma 2$ est {a/T, g(g(a)/Y}

L'algorithme d'unification consiste en la recherche d'un upg d'un ensemble d'expressions.

Voyons quelques notions qui vont être utilisées au cours de l'algorithme d'unification, tout d'abord l'ensemble de discordance.
L'ensemble de discordance d'un ensemble non vide d'expressions est obtenu en localisant la première position à partir de la gauche pour laquelle toutes les expressions n'ont pas le même symbole et en extrayant dans chaque expression, la sous-expression qui commence en cette position

W1 = {P(X, g(X), f(X, Y)), P(X, g(X), f(g(t,Y), Z))}
Ensemble de discordance : D1 = {X, g(t,Y)}
W2 = {P(Y, X, Z), P(Y, f(t), h(Y)), P(Y, b, U)}
Ensemble de discordance : D2 = {X, f(t), b}
W3 = {Q(Y), P(Y)}

Voici maintenant l'algorithme d'unification :

Soit W l'ensemble fini à unifier

- **Etape 1 :** k = 0 ; Wk = W ; σκ = ε
- **Etape 2 : SI** Wk est un singleton
  ALORS σk upg de W
  SINON trouver Dk l'ensemble de discordance de Wk ;
- **Etape 3 : SI** il existe des éléments Vk et tk de Dk tels que :
  _ Vk soit une variable
  _ tk soit un terme ne contenant pas Vk
  ALORS aller à l'étape 4
  SINON W non unifiable
- **Etape 4 :** σk+1 = {tk/Vk}°σk ;
  Wk+1 = Wk.{tk/Vk}
- **Etape 5 :** k = k+1 ;
  Aller à l'étape 2

SI W est ensemble fini non vide unifiable alors l'algorithme s'arrête toujours à l'étape 2 et σk est upg.

Exemple :

W = {P(a,X,f(g(Y))), P(Z,f(Z),f(U))}

1. k = 0 ; W0 = W ; σ0 = ε ;
2. D0 = {a,Z} avec Z variable et a terme ne contenant pas Z ;
3. s1 = {a,Z}°σ0 = {a/Z}
   W1 = W0.{a/Z} = {P(a,X,f(g(Y))), P(a,f(a),f(U))}
4. D1 = {X,f(a)}, V1 = X, t1 = f(a) terme ne contenant pas X ;
5. σ2 = {f(a)/X}°{a/Z} = {f(a)/X, a/Z}
   W2 = W1.{f(a)/X} = {P(a,f(a),f(g(Y))), P(a,f(a),f(U))}
6. D2 = {g(Y)/U}, V2 = U, t2 = g(Y) terme ne contenant pas U ;
7. s3 = {g(Y)/U}°σ2 = {g(Y)/U, f(a)/X, a/Z}
   W3 = W2.{g(Y)/U } = {P(a,f(a),f(g(Y)))}
8. W3 est un singleton ==> σ3 est l'upg de W
   donc W est unifiable.

Exercice 2

Donner les upgs (s'ils existent) des ensembles d'expressions suivants :

a) W = {P(T,T), P(f(V),V)}
b) W = {P(a,T), P(X,Y)}
c) W = {P(f(X),Y,X), P(Z,X,g(T))}
d) W = {P(f(X),X), P(Y,g(Y))}

Les corrections sont uniquement accessibles sur Internet