Systèmes de preuves en logique des propositions

1 - Introduction

Comme nous l'avons dit au chapitre 1, la logique consiste à étudier la validité des raisonnements. Un **raisonnement** (ou inférence) est le passage de l'assertion d'une proposition ou d'un groupe de propositions (**prémisses**) à l'assertion d'une autre proposition (**conclusion**). On va s'intéresser à montrer que les raisonnement sont valides.

2 - Preuve par les tables de vérité, ou la méthode des tableaux matriciels

La preuve par la méthode des tableaux matriciels permet de manière mécanique de dire si une formule est valide, consistante, inconsistante ou invalide (Peirce, Wittgenstein).

1. Une fbf peut être à la fois invalide et consistante
2. G est valide si et seulement si ($\neg$G) est inconsistante
3. G est valide implique que G est consistante
   G est inconsistante implique que G est invalide
4. Il existe une procédure effective pour déterminer si une fbf est valide: la table de vérité

Pour construire la table de vérité :

- on peut décomposer la formule en sous-formules en procédant de l'intérieur vers l'extérieur.
- on fait une colonne par atomes présents dans la formule, une colonne par sous-formule et une pour la formule
- pour N atomes dans la formule on a 2^n interprétations possibles et donc 2^n lignes.

On applique sur chaque sous-formule les tables de vérité des connecteurs.

Exemples :

Montrer que : $(P \rightarrow (Q \rightarrow P))$ est valide

P	**Q**	**$Q \rightarrow P$**	**$P \rightarrow (Q \rightarrow P)$**
V	*V*	*V*	*V*
V	*F*	*V*	*V*
F	*V*	*F*	*V*
F	*F*	*V*	*V*

La fbf est vraie selon toutes les interprétations donc elle est **valide**

Montrer que : $(P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee Q)$ est valide

P	**Q**	**$P \vee \neg Q$**	**$\neg P \vee Q$**	**$(P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee Q)$**
V	V	V	V	V
V	F	V	F	F
F	V	F	V	F
F	F	*V*	*V*	*V*

Il existe un interprétation dans laquelle la formule est vraie elle est donc **consistante**
Il existe un interprétation dans laquelle la formule est fausse elle est donc **invalide**

Remarquez qu'il n'est pas nécessaire de calculer la valeur de vérité pour toutes les interprétations (de remplir toutes les lignes de la table de vérité). Tant qu'on obtient que des vrais (respectivement que des faux), il faut calculer l'interprétation suivante, mais dès qu'on obtient un faux (respectivement un vrai) on s'arrête. En effet un vrai suffit pour prouver qu'une formule est consistante et un faux suffit pour prouver qu'elle est invalide.

Exercice 1

que pouvez-vous conclure sur les formules bien formées suivantes en utilisant les tables de vérité ?

a) $(P \to Q) \to ((P \to \neg Q) \to \neg P)$
b) $P \to (Q \to (P \wedge Q))$
c) $(((P \wedge Q) \to R) \wedge (P \to Q)) \to (P \to R)$
d) $\neg P$ Ù $(\neg(P \to Q))$
e) $(P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)$
f) $P \wedge \neg(P \wedge \neg Q) \wedge (Q \vee R)$

Les corrections sont uniquement accessibles sur Internet

MAIS cette méthode a un gros inconvénient : elle demande d'examiner exhaustivement toutes les évaluations booléennes possibles et ce nombre d'évaluations croît très rapidement. En effet, pour une formule bien formée de 5 variables propositionnelles on aura 32 interprétations et donc 32 lignes à remplir. Son encombrement croît exponentiellement avec le nombre d'atomes. De plus, elle est à peu près limitée au calcul des propositions, il est difficile de l'étendre aux autres logiques.

3 - *Preuve par les lois d'équivalence*

Chacun des théorèmes d'équivalence (ou loi d'équivalence) permet un acte d'inférence. Une autre manière de prouver qu'une formule bien formée est valide (respectivement inconsistante) consiste à raisonner en utilisant les lois d'équivalence. Un objectif est alors de montrer par équivalence que la formule bien formée de départ est équivalente à V (respectivement à F).

Exemple :

$(P \rightarrow (Q \rightarrow P)) \cong (P \rightarrow (\neg Q \vee P))$	loi 1
$\cong (\neg P \vee (\neg Q \vee P))$	loi 1
$\cong (\neg P \vee (P \vee \neg Q))$	loi 3
$\cong (\neg P \vee P) \vee \neg Q$	loi 4
$\cong V \vee \neg Q$	loi 8
$\cong V$	loi 6

La fbf est toujours vraie donc elle est **valide**

Exercice 2

que pouvez-vous conclure sur la formule bien formée en utilisant les théorèmes d'équivalence vus au chapitre 1 ?

a) $(P \rightarrow Q) \rightarrow ((P \rightarrow \neg Q) \rightarrow \neg P)$
b) $P \rightarrow (Q \rightarrow (P \wedge Q))$
c) $(((P \wedge Q) \rightarrow R) \wedge (P \rightarrow Q)) \rightarrow (P \rightarrow R)$
d) $\neg P \wedge (\neg(P \rightarrow Q))$
e) $(P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee Q)$
f) $(P \rightarrow Q) \rightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)$
g) $P \wedge \neg(P \wedge \neg Q) \wedge (Q \vee R)$

Les corrections sont uniquement accessibles sur Internet

4 - Formes normales en logique propositionnelle

Les formes normales d'une formule bien formée permettent d'écrire la formule de départ sous une forme donnée.

Quelques définitions :

- Un littéral est un atome ou la négation d'un atome.
- Une fbf est mise sous **forme normale conjonctive** (fnc) si et seulement si elle est de la forme :
  $F1 \wedge F2 \wedge \ldots \wedge Fn$
  où chaque Fi est une disjonction de littéraux
- Une fbf est mise sous forme **normale disjonctive** (fnd) si et seulement si elle est de la forme :
  $F1 \vee F2 \vee \ldots \vee Fn$
  où chaque Fi est une conjonction de littéraux

Exemple :

$(A \vee B) \wedge ((\neg C) \vee D) \wedge E$ est une **forme normale conjonctive**
$(A \vee B \vee (\neg C)) \vee D$ est une **forme normale disjonctive**

Il faut noter que si la formule est un littéral il est à la fois sous forme normale disjonctive et conjonctive

Pour toute formule F du calcul des propositions il existe une forme normale conjonctive FNC et une forme normale disjonctive FND telles que

$\vdash F \leftrightarrow FNC$ et $\vdash F \leftrightarrow FND$

Comment faire pour transformer une fbf en forme normale conjonctive ou disjonctive ?

Pour mettre une fbf sous forme normale conjonctive (respectivement disjonctive)

1. On élimine les connecteurs $\rightarrow$ et $\leftrightarrow$ en utilisant les théorèmes sur l'implication matérielle et l'équivalence matérielle
2. On développe le $\neg$ en utilisant les lois de de Morgan et on élimine les $\neg\neg$

par l'involution

3. On regroupe les $\vee$ (respectivement les $\wedge$) par distributivité

Exemple :

$(A \wedge \neg (B \vee \neg C) \rightarrow (\neg B \rightarrow (A \wedge B))$

On élimine les $\rightarrow$ et $\leftrightarrow$

$\cong \quad \neg (A \wedge \neg (B \vee \neg C) \vee (\neg\neg B \vee (A \wedge B))$

On développe le $\neg$ et on élimine les $\neg\neg$

$\cong \quad \neg A \vee \neg\neg (B \vee \neg C) \vee (B \vee (A \wedge B))$

$\cong \quad \neg A \vee (B \vee \neg C) \vee (B \vee (A \wedge B))$

On regroupe les $\vee$

$\cong \quad (\neg A \vee B \vee \neg C \vee B \vee (A \wedge B))$

$\cong (\neg A \vee B \vee \neg C \vee B \vee A) \wedge (\neg A \vee B \vee \neg C \vee B \vee B)$

On obtient une forme normale conjonctive équivalente à la formule bien formée de départ.

Exercice 3

1) Mettre sous forme normale disjonctive :

a) $P \rightarrow ((Q \wedge R) \rightarrow S)$
b) $(\neg P \wedge Q) \rightarrow$

Les corrections sont uniquement accessibles sur Internet

2) Mettre sous forme normale conjonctive :

a) $(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$
b) $\neg(P \rightarrow Q) \vee (P \wedge Q)$

Les corrections sont uniquement accessibles sur Internet