Feuille exercices 4 : Flots et couplages

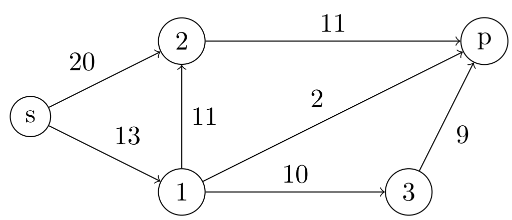
eric.duchene@univ-lyon1.fr, aline.parreau@univ-lyon1.fr

Exercice 1 : **Pour choisir les sommets à marquer et les chemins, on effectuera des parcours en profondeur en choisissant en priorité p puis les sommets dans l'ordre croissant.**

Question 1 – Déterminer un flot complet pour le graphe ci-dessous.

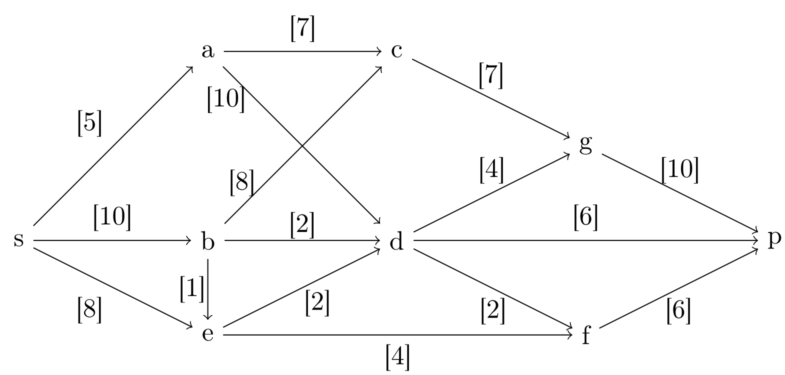
Question 2 – Déterminer un flot maximal pour le graphe ci-dessous.

Question 3 – Donner une coupe minimale

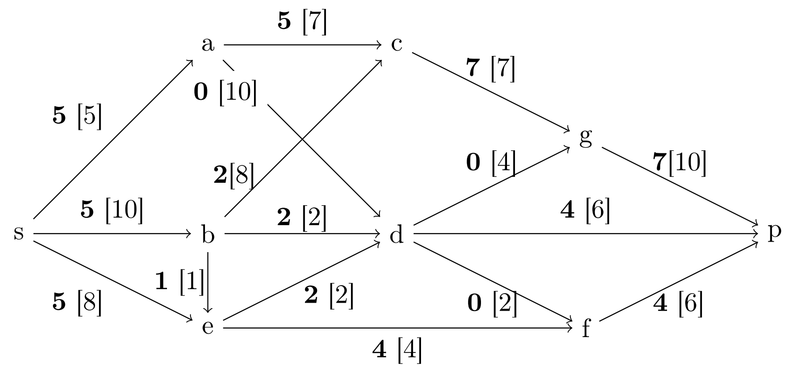


Exercice 2 : **Capacité d'un réseau routier**

Avant d'établir un projet de construcion d'autoroute, on désire étudier la capacité d'un réseau routier reliant la ville s à la ville p représentée par le graphe ci-dessous. Pour cela on a évalué chaque route le nombre maximal de véhicules qu'elle peut écouler par heure. Ces évaluations sont indiquées entre crochet en centaines de véhicules par heure sur les arcs du graphe.



Une première estimation de la capacité maximale de ce réseau a été faite. Elle est représentée par le flot suivant (les valeurs du flot sont indiquées sur chaque arc en gras).



Question 1 – Ce flot est-il complet ? Est-il maximal ? Justifier, et améliorer éventuellement le flot pour obtenir un flot maximal. Quel est le débit maximal de véhicules susceptibles de s'écouler de la ville s à la ville p ?

Question 2 – Donner une coupe de capacité minimale.

Question 3 – Un stagiaire remarqua que le débit maximal entre les villes s et p prédit pour le réseau routier, à savoir 2000 véhicules par heure, surestimait largement ses observations effectuées sur le terrain. Ses observations mesuraient un débit légèrement inférieur à 1700 véhicules par heure. Il se rendit compte que le débit horaire du réseau urbain des villes traversées n'avait pas été pris en compte. Le débit horaire durant la traversée des villes est donné par le tableau ci-dessous en centaines de véhicules par heure.

villes	a	b	c	d	e	f	g
débits	6	7	8	6	6	5	9

Il eut alors l'idée d'éclater en 2 sommets chacun des sommets correspondant aux villes traversées, afin d'y faire figurer les contraintes de débit urbain. Donnez le réseau ainsi obtenu et vérifiez que le flot maximal dans le réseau est de 1700 véhicules par heure.

Exercice 3 :

Une société organise le transport de céréales entre les villes A, B et C disposant respectivement de stocks de 8,12 et 5 tonnes de céréales et les villes D, E et F ayant besoin de respectivement 11, 9 et 4 tonnes de céréales.

Question 1 – Modéliser ce problème à l'aide d'un flot. Est-il possible de satisfaire la demande de toutes les villes ?

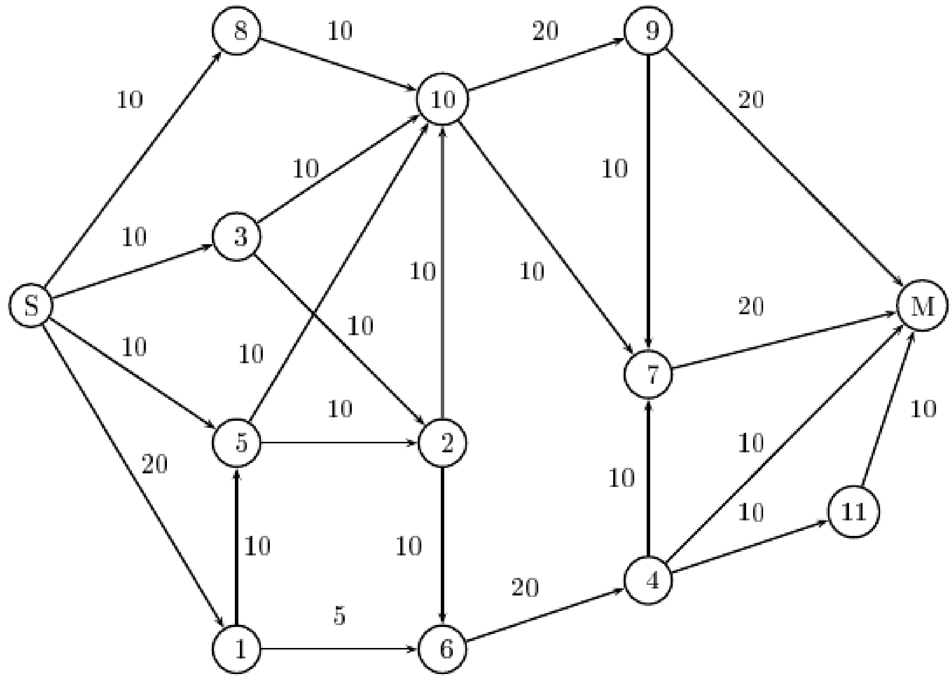
En pratique, certaines villes sont très loin entre elles ou ne permettent un transport que d'une certaine quantité de marchandise. Le tableau suivant donne les capacités de transport, en tonnes, entre les différentes villes :

	A	B	C
D	6	3	1
E	2	9	0
F	0	0	5

Question 2 – Intégrer cette contrainte dans votre modèle. Peut-on toujours satisfaire la demande ?

Exercice 4 : **Réseau Internet**

On a un serveur S qui souhaite envoyer des données à un client M . On suppose que les deux postes sont connectés par le réseau télécom décrit dans le graphe de la figure ci dessous. Les valuations des arcs représentent un débit en Mo/s. Les sommets allant de 1 à 11 sont des routeurs. On suppose qu'un routeur est capable de recevoir plusieurs parties d'un même message par des voisins différents et de le redécouper pour l'envoyer sur plusieurs voisins à la fois.



Question 1 – Quelle quantité d'information peut-on faire passer de S à M par seconde ?

Question 2 – Déterminez le nombre minimum de câbles sectionnés qui peuvent empêcher l'ordinateur S d'être connecté à l'ordinateur M. Quelle est la propriété des câbles que l'on peut ajouter pour permettre une meilleure fiabilité du réseau ?

Question 3 – Déterminez le nombre minimum de routeurs en panne qui peuvent empêcher l'ordinateur S d'être connecté à l'ordinateur M.

Exercice 5 :

Avec un jeu de 52 cartes, on crée aléatoirement 13 paquets de 4 cartes. On veut choisir dans chaque paquet une carte de sorte à obtenir à la fin 13 cartes de valeurs différentes.

Question 1 – Modéliser ce problème à l'aide d'un graphe.

Question 2 – Démontrer que cela est toujours possible en utilisant le théorème de Hall.

Exercice 6 : **Mariages stables - Algorithme de Gale-Shapley**

Dans cet exercice on cherche à former n couples entre n femmes et n hommes. Chaque femme et chaque homme a donné son ordre de préférence sur les n personnes du sexe oppposé. Un *mariage* est un couplage parfait entre les hommes et les femmes. On dit qu'il est *stable* s'il n'existe pas un homme et une femme qui chacun préférerait être ensemble plutôt qu'avec la personne qu'on leur a attribué.

Exemple : On considère le cas $n = 3$ avec les préférences des femmes et des hommes données ci-dessous.

$$\begin{array}{llll} f_1 : & h_2 > h_3 > h_1 & h_1 : & f_1 > f_2 > f_3 \\ f_2 : & h_2 > h_1 > h_3 & h_2 : & f_3 > f_2 > f_1 \\ f_3 : & h_3 > h_1 > h_2 & h_3 : & f_2 > f_1 > f_3 \end{array}$$

Le couplage (f_1, h_1), (f_2, h_2), (f_3, h_3) est un couplage parfait mais n'est pas stable : f_1 et h_3 préféreraient tout deux être ensemble plutôt qu'avec leur partenaire attribué. Par contre le couplage (f_1, h_3), (f_2, h_2), (f_3, h_1) est stable.

L'algorithme de Gale-Shapley (utilisé dans APB où c'est fondamentalement le même problème) permet de trouver un mariage stable. Son principe est le suivant :

- Au départ aucun couple n'est formé
- Tant qu'il existe une femme f qui n'a pas été couplé avec un homme
  - soit h l'homme le mieux placé dans l'ordre de f à qui f n'a pas encore été proposée.
  - proposer f à h :
    - si h n'est pas couplé, h accepte.
    - si h est couplé avec une autre femme f' et que h préfère f, coupler h avec f et libérer f'
    - sinon ne rien faire

Question 1 – Appliquer cet algorithme sur les données de l'exemple.

Question 2 – Expliquer pourquoi cet algorithme termine avec un couplage parfait et donner sa complexité.

Question 3 – Expliquer pourquoi cet algorithme renvoie une solution stable.

Question 4 – Quel mariage obtient-t-on si inverse le rôle des hommes et des femmes dans les données précédentes ? Lequel est le plus favorable aux femmes ?

La plupart du temps, il existe plusieurs solutions stables. Parmi elles, certaines sont favorables aux hommes tandis que d'autres sont favorables aux femmes. Nous allons montré que l'algorithme ci-dessus donne en fait la meilleure solution pour les femmes parmi toutes les solutions stables, dans le sens où si une femme f chaque femme est couplé avec l'homme qu'elle préfère parmi ceux avec lesquels elle peut être couplée dans un mariage stable possible.

On dit que h est un homme valide pour f s'il existe un mariage stable avec le couple (f, h). On note $best(f)$ l'homme préféré de f parmi tous les hommes valides.

Question 5 – Montrer que pour deux femmes différentes f et f', $best(f) \neq best(f')$.

Les couples $(f, best(f))$ forment donc un couplage parfait.

Question 6 – **Plus dur...** Montrer que l'algorithme de Gale Shalpey retourne ce couplage là.