

THÈSE

pour obtenir le grade de Docteur en Informatique

préparée au **Laboratoire d'InfoRmatique en Image et Systèmes d'information (LIRIS)**
et au **Laboratoire de MATHématiques (LAMA)**

présentée et soutenue publiquement par

JÉRÉMY LEVALLOIS

le 12 NOVEMBRE 2015

ESTIMATEURS DIFFÉRENTIELS EN GÉOMÉTRIE DISCRÈTE : APPLICATIONS À L'ANALYSE DE SURFACES DIGITALES

sous la direction de

David Coeurjolly et Jacques-Olivier Lachaud



COMPOSITION DU JURY

M. Nicolas Passat	Président du jury	(Professeur)
M. Pierre Alliez	Rapporteur	(Directeur de Recherche INRIA)
M. Éric Andrès	Rapporteur	(Professeur)
M. Yan Gérard	Examineur	(Maître de Conférence)
M. Simon Masnou	Examineur	(Professeur)
M. David Coeurjolly	Directeur de thèse	(Directeur de Recherche CNRS)
M. Jacques-Olivier Lachaud	Directeur de thèse	(Professeur)

SIGLE	ECOLE DOCTORALE	NOM ET COORDONNEES DU RESPONSABLE
CHIMIE	CHIMIE DE LYON http://www.edchimie-lyon.fr Sec : Renée EL MELHEM Bat Blaise Pascal 3 ^e etage 04 72 43 80 46 Insa : R. GOURDON secretariat@edchimie-lyon.fr	M. Jean Marc LANCELIN Université de Lyon – Collège Doctoral Bât ESCPE 43 bd du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72.43 13 95 directeur@edchimie-lyon.fr
E.E.A.	ELECTRONIQUE, ELECTROTECHNIQUE, AUTOMATIQUE http://edeea.ec-lyon.fr Sec : M.C. HAVGOUDOUKIAN Ecole-doctorale.eea@ec-lyon.fr	M. Gérard SCORLETTI Ecole Centrale de Lyon 36 avenue Guy de Collongue 69134 ECULLY Tél : 04.72.18 60.97 Fax : 04 78 43 37 17 Gerard.scorletti@ec-lyon.fr
E2M2	EVOLUTION, ECOSYSTEME, MICROBIOLOGIE, MODELISATION http://e2m2.universite-lyon.fr Sec : Bat Atrium- UCB Lyon 1 04.72.44.83.62 Insa : S. REVERCHON secretariat.e2m2@univ-lyon.fr	M. Fabrice CORDEY Laboratoire de Géologie de Lyon Université Claude Bernard Lyon 1 Bât Géode – Bureau 225 43 bd du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cédex Tél : 04.72.44.83.74 Sylvie.reverchon-pescheux@insa-lyon.fr fabrice.cordey@univ-lyon1.fr
EDISS	INTERDISCIPLINAIRE SCIENCES-SANTE http://www.ediss-lyon.fr Sec : Bat Atrium – UCB Lyon 1 04 72 44 83 62 Insa : secretariat.ediss@univ-lyon1.fr	Mme Emmanuelle CANET-SOULAS INSERM U1060, CarMeN lab, Univ. Lyon 1 Bâtiment IMBL 11 avenue Jean Capelle INSA de Lyon 696621 Villeurbanne Tél : 04.72.11.90.13 Emmanuelle.canet@univ-lyon1.fr
INFOMATHS	INFORMATIQUE ET MATHEMATIQUES http://infomaths.univ-lyon1.fr Sec : Renée EL MELHEM Bat Blaise Pascal 3 ^e etage infomaths@univ-lyon1.fr	Mme Sylvie CALABRETTO LIRIS – INSA de Lyon Bat Blaise Pascal 7 avenue Jean Capelle 69622 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72. 43. 80. 46 Fax 04 72 43 16 87 Sylvie.calabretto@insa-lyon.fr
Matériaux	MATERIAUX DE LYON http://ed34.universite-lyon.fr Sec : M. LABOUNE-DAHMANI PM : 71.70 –Fax : 87.12 Bat. Direction 1 ^{er} et. Ed.materiaux@insa-lyon.fr	M. Jean-Yves BUFFIERE INSA de Lyon MATEIS Bâtiment Saint Exupéry 7 avenue Jean Capelle 69621 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72.43 71.70 Fax 04 72 43 85 28 Ed.materiaux@insa-lyon.fr
MEGA	MECANIQUE, ENERGETIQUE, GENIE CIVIL, ACOUSTIQUE http://mega.universite-lyon.fr Sec : M. LABOUNE PM : 71.70 –Fax : 87.12 Bat. Direction 1 ^{er} et. mega@insa-lyon.fr	M. Philippe BOISSE INSA de Lyon Laboratoire LAMCOS Bâtiment Jacquard 25 bis avenue Jean Capelle 69621 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72 .43.71.70 Fax : 04 72 43 72 37 Philippe.boisse@insa-lyon.fr
ScSo	ScSo* http://recherche.univ-lyon2.fr/scso/ Sec : Viviane POLSINELLI Brigitte DUBOIS Insa : J.Y. TOUSSAINT viviane.polsinelli@univ-lyon2.fr	Mme Isabelle VON BUELTZINGLOEWEN Université Lyon 2 86 rue Pasteur 69365 LYON Cedex 07 Tél : 04.78.77.23.86 Fax : 04.37.28.04.48 isavonb@dbmail.com

*ScSo : Histoire, Géographie, Aménagement, Urbanisme, Archéologie, Science politique, Sociologie, Anthropologie

FOLIO ADMINISTRATIF

THÈSE SOUTENUE DEVANT L'INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES DE LYON

NOM : Levallois

DATE DE SOUTENANCE : 12/11/2015

PRÉNOMS : Jérémy, Nicolas

TITRE : Estimateurs différentiels en géométrie discrète : applications à l'analyse de surfaces digitales

NATURE : Doctorat

NUMÉRO D'ORDRE : 2015ISAL0103

ÉCOLE DOCTORALE : InfoMaths ED 512

SPÉCIALITÉ : Informatique

RÉSUMÉ : voir page vi

MOTS-CLÉS : *géométrie discrète; convergence asymptotique; quantités différentielles; courbure; normales; estimateurs; invariants par intégration; points caractéristiques; classification de surface;*

LABORATOIRE(S) DE RECHERCHE : LIRIS, LAMA

DIRECTEUR(S) DE THÈSE : David Coeurjolly, Jacques-Olivier Lachaud

PRÉSIDENT DE JURY : Nicolas Passat

COMPOSITION DU JURY :

Nicolas Passat

Président du jury

Pierre Alliez

Rapporteur

Éric Andrès

Rapporteur

Yan Gérard

Examineur

Simon Masnou

Examineur

David Coeurjolly

Directeur de thèse

Jacques-Olivier Lachaud

Directeur de thèse

Abstract

3D image acquisition devices are now ubiquitous in many domains of science, including biomedical imaging, material science, or manufacturing. Most of these devices (MRI, Backscatter X-ray, micro-tomography, confocal microscopy, PET scans) produce a set of data organized on a regular grid, which we call digital data, commonly called pixels in 2D images and voxels in 3D images. Properly processed, these data approach the geometry of imaged shapes, like organs in biomedical imagery or objects in engineering.

In this thesis, we are interested in extracting the geometry of such digital data, and, more precisely, we focus on approaching geometrical differential quantities such as the curvature of these objects. These quantities are the critical ingredients of several applications like surface reconstruction or object recognition, matching or comparison. We focus on the proof of multigrid convergence of these estimators, which in turn guarantees the quality of estimations. More precisely, when the resolution of the acquisition device is increased, our geometric estimates are more accurate. Our method is based on integral invariants and on digital approximation of volumetric integrals.

Finally, we present a surface classification method, which analyzes digital data in a multiscale framework and classifies surface elements into three categories: smooth part, planar part, and singular part (tangent discontinuity). Such feature detection is used in several geometry pipelines, like mesh compression or object recognition. The stability to parameters and the robustness to noise are evaluated with respect to state-of-the-art methods. All our tools for analyzing digital data are applied to 3D X-ray tomography of snow microstructures and their relevance is evaluated and discussed.

Résumé

Les appareils d'acquisition d'image 3D sont désormais omniprésents dans plusieurs domaines scientifiques comme l'imagerie biomédicale, la science des matériaux ou encore l'industrie. La plupart de ces appareils (IRM, scanners à rayons X, micro-tomographes, microscopes confocaux, TEP scans) produisent un ensemble de données organisées sur une grille régulière que nous nommerons des données digitales, ou plus couramment des pixels sur des images 2D et des voxels sur des images 3D. Lorsqu'elles sont récupérées le plus justement, ces données approchent la géométrie de la forme capturée (comme des organes en imagerie biomédicale ou des objets dans l'ingénierie).

Dans cette thèse, nous nous sommes intéressés à l'extraction de la géométrie sur ces données digitales. Plus précisément, nous nous concentrons à approcher des quantités géométriques différentielles comme la courbure sur ces objets. Ces quantités sont les ingrédients critiques de plusieurs applications comme la reconstruction de surface ou la reconnaissance, la correspondance ou la comparaison d'objets. Nous nous focalisons également sur les preuves de convergence asymptotique de ces estimateurs, garantissant en quelque sorte la qualité de l'estimation. En effet, lorsque la résolution de l'appareil d'acquisition est augmentée, notre estimation géométrique est plus précise. Notre méthode est basée sur les invariants par intégration et sur l'approximation digitale des intégrations volumiques.

Enfin, nous présentons une méthode de classification de la surface, qui analyse les données digitales dans un système à plusieurs échelles et classe les éléments de surface en trois catégories : les parties lisses, les parties planes, et les parties singulières (discontinuités de la tangente). Ce type de détection de points caractéristiques est utilisé dans plusieurs algorithmes géométriques, comme la compression de maillage ou la reconnaissance d'objet. La stabilité aux paramètres et la robustesse au bruit sont évaluées en fonction des méthodes de la littérature. Tous nos outils pour l'analyse de données digitales sont appliqués à des micro-structures de neige provenant d'un tomographe à rayons X, et leur intérêt est évalué et discuté.

Liste des publications

- [Coe+13a] David COEURJOLLY, Jacques-Olivier LACHAUD et Jérémy LEVALLOIS. « Implementation of Integral based Digital Curvature Estimators in DGtal ». In : *Imagen-A 3.5* (2013), p. 27-31.
- [Coe+13b] David COEURJOLLY, Jacques-Olivier LACHAUD et Jérémy LEVALLOIS. « Integral Based Curvature Estimators in Digital Geometry ». In : *Discrete Geometry for Computer Imagery*. T. 7749. Lecture Notes in Computer Science. Springer Berlin Heidelberg, 2013, p. 215-227.
- [Coe+14] David COEURJOLLY, Jacques-Olivier LACHAUD et Jérémy LEVALLOIS. « Multigrid convergent principal curvature estimators in digital geometry ». In : *Computer Vision and Image Understanding* 129.0 (2014), p. 27-41.
- [Lac+16] Jacques-Olivier LACHAUD, David COEURJOLLY et Jérémy LEVALLOIS. « Robust and Convergent Curvature and Normal Estimators with Digital Integral Invariants ». In : *Modern Approaches to Discrete Curvature*. Lecture Notes in Mathematics. Springer International Publishing, 2016 (à paraître).
- [Lev+13] Jérémy LEVALLOIS, David COEURJOLLY et Jacques-Olivier LACHAUD. « Convergence asymptotique du tenseur de courbure en géométrie discrète ». In : *AFIG 2013*. 2013.
- [Lev+14] Jérémy LEVALLOIS, David COEURJOLLY et Jacques-Olivier LACHAUD. « Parameter-Free and Multigrid Convergent Digital Curvature Estimators ». In : *Discrete Geometry for Computer Imagery*. T. 8668. Lecture Notes in Computer Science. Springer International Publishing, 2014, p. 162-175.
- [Lev+15a] Jérémy LEVALLOIS, David COEURJOLLY et Jacques-Olivier LACHAUD. « Feature extraction on digital snow microstructures ». In : *ACM SIGGRAPH 2015 Posters*. ACM. 2015, p. 73.
- [Lev+15b] Jérémy LEVALLOIS, David COEURJOLLY et Jacques-Olivier LACHAUD. « Scale-space Feature Extraction on Digital Surfaces ». In : *Computers and Graphics* (2015), p. 12.

Communications

- oct. 2012 **Réunion digitalSnow, Grenoble**
Présentation orale.
- mar. 2013 **DGCI 2013, Seville (Espagne)** Discrete Geometry for Computer Imagery
Présentation orale.
- juil. 2013 **Réunion digitalSnow, Lyon**
Présentation orale.
- nov. 2013 **AFIG 2013, Limoges** Association Française d'Informatique Graphique
Présentation orale. Deuxième meilleur papier.
- nov. 2013 **JIG 2013, Nancy** Journées Informatique et Géométrie
Présentation orale.
- fév. 2014 **Research event de Paris ACM SIGGRAPH, Paris**
Présentation orale.
- avr. 2014 **Réunion LIMA2, Lyon** Loisirs et IMAgés
Présentation orale courte et poster.
- sep. 2014 **DGCI 2014, Sienna (Italie)** Discrete Geometry for Computer Imagery
Présentation orale.
- nov. 2014 **Réunion GT GeoDis, Reims** Reims Image
Présentation orale.
- fév. 2015 **Réunion digitalSnow, Chambéry**
Présentation orale.
- juin 2015 **SMI 2015, Lille** Shape Modeling International
Présentation orale.
- août 2015 **SIGGRAPH 2015, Los Angeles (États-Unis d'Amérique)**
Présentation de poster.

Remerciements

” *Just do it.
Make your dreams come true.
Nothing is impossible.
Yes you can.*

— **Shia LABEOUF**

C'est marrant, au début de ma thèse, le moment où j'allais rédiger cette page des remerciements me paraissait tellement loin. Et maintenant, j'en suis à cette étape. C'est marrant.

Et si j'en suis à écrire ces mots, c'est en grande partie grâce à David COEURJOLLY et Jacques-Olivier LACHAUD, qui m'ont fait confiance et m'ont soutenu, surtout dans les moments de doute, tout au long de cette thèse. C'était un vrai plaisir de travailler avec vous, de discuter avec vous. J'ai énormément appris grâce à vous et je vous en suis très reconnaissant.

Je remercie les membres de mon jury, Nicolas PASSAT, Pierre ALLIEZ, Éric ANDRÈS, Yan GÉRARD, Simon MASNOU pour avoir répondu sans hésitation favorablement à l'évaluation de mon travail et pour leurs retours.

L'ambiance au travail est primordiale. À ce titre, je remercie *énormément* les membres du LIRIS-1¹ – Elsa, Abdoulaye, François, Grégoire, Jean-David, Gérémy, Matthieu –. Je ne pourrais pas énumérer la liste des choses qui se sont produites dans ce bureau lors de moments de « craquages » tellement la liste est longue (voir la [figure 0.1 page x](#)), allant des combats de NERF aux blind tests d'OST de jeux vidéos, en passant par les sessions d'EuroTruck Simulator 2 avec Oculus Rift et volant. Je ne pense pas qu'on puisse faire de meilleure ambiance au travail que celle-ci. Merci.

Merci également aux « amis du LIRIS-1 », contribuant à l'esprit LIRIS-1 – Hélène, Karolina, Lucille, Marie-Neige, Rubiela, David, Joseph –. Ces (*un peu moins de*) quatre années de thèse ont été un vrai plaisir en votre compagnie. Parce qu'il n'y a

¹Élu meilleur bureau de doctorants trois années consécutives par un panel non représentatif.



Figure 0.1 Reproduction à l'échelle 1 : 10 d'un camion avec le mobilier à disposition.

pas que le travail dans la vie, ces années de thèses ont été sublimés (tel un gâteau dans Top Chef) grâce à vous par quelques sorties « extra-scolaires » : journées au ski, laser game, course à pied, VTT et j'en passe. C'était vraiment cool et parfois ça fait du bien de se vider la tête.

Je ne remercie pas la SNCF, pour avoir rendu mes trajets à Chambéry de véritables calvaires à coups de « Perte d'adhérence sur les rails » ou de « Raté d'ouverture d'un passage à niveau ».

Un grand merci aux secrétaires du LIRIS et du LAMA, surtout à Sylvie qui m'a débloqué pas mal de situations dont un fameux appel, un lundi matin : « Euh ... je crois que j'ai raté mon avion. Je fais quoi ? ».

Merci également à mes collègues au sein des équipes M2DisCo et LIMD, et plus largement au LIRIS et au LAMA, ainsi que de l'ANR digitalSnow pour ces discussions riches autour de domaines variés.

J'ai une pensée pour Yoann PIGNÉ – à l'époque doctorant à l'Université du Havre lors de ma première année de Licence – qui, sans le savoir, m'a donné envie de faire une thèse.

Une pensée également au club des *gentlemen*, « Les Barons », – Mierre, Dhomas, Grançois, TFC – dont les nombreuses soirées « Rétro-bièring » et les discussions autour des jeux vidéos, de l'informatique ou des sciences en général ont été une source inépuisable d'échange de connaissance. Je ramène un jeu NES de ma collection pour la prochaine soirée.

Je suis extrêmement redevable envers mes « conseillers personnels » – Day, Léa Zouille, JD, L0ur5, Sandrine – qui ont su m'aiguiller lors des moments de doute.

Un petit mot aussi à Marion, Thomas, (Hélène ?), doctorants avec lesquels je partage au moins un encadrant. Je vous souhaite bon courage pour la suite de votre thèse. Vous verrez, la soutenance arrive vite !

Enfin, et non des moindres, je voudrais remercier mes parents et mes sœurs qui n'ont eu de cesse de me soutenir, même s'ils ne comprenaient pas vraiment ce que je faisais. Je remercie bien évidemment Audrey pour m'avoir épaulé chaque jour.

Avant de vous laisser lire le contenu plus *scientifique* (ou bien me rédiger un mail d'insulte parce que je vous ai oublié dans ces remerciements²), je voudrais revenir sur les citations en début de chapitre. Ne cherchez pas de cohérence avec le contenu des chapitres, celles-ci ont été choisies car elles représentent quelque chose qui a été important pour moi (un livre, un film, une série). C'est pour moi, en quelque sorte, un moyen de remercier l'auteur.

²Si c'est le cas, les sources de ma thèse sont disponibles sur GitHub : <https://github.com/jlevallois/PhD-Thesis>, faites un pull-request pour vous rajouter.

Table des matières

1	Introduction et contexte – Géométrie digitale et projet digitalSnow	1
2	Notions et éléments de la géométrie classique et de la géométrie digitale	5
2.1	Introduction	6
2.2	Notations	6
2.3	Introduction à la géométrie des surfaces et formes continues	6
2.3.1	Classes de fonctions C^1 , C^2 , C^d	6
2.3.2	Aire et volume	8
2.3.3	Moments géométriques	8
2.3.4	Courbure des courbes et des surfaces	9
2.4	Éléments de géométrie digitale	12
2.5	Discrétisation	16
2.6	Convergence asymptotique d’estimateurs locaux et globaux	20
2.7	Estimateurs digitaux d’aire, de volume, de moments géométriques	23
2.7.1	Aire et volume digitaux en dénombrant les points digitaux	24
2.7.2	Moments géométriques digitaux en dénombrant les points digitaux	24
2.8	Droites digitales standards, segments digitaux, arcs de cercle digitaux	25
2.9	Conclusion	28
3	Estimateurs digitaux de courbures	29
3.1	Introduction	30
3.2	État de l’art	30
3.2.1	Estimation de courbure sur des maillages	31
3.2.2	Estimation de courbure sur des nuages de points	34
3.2.3	Estimation de courbure sur des surfaces digitales	39
3.3	Estimation de courbure par intégration volumique locale d’une boule	45
3.3.1	Analyse euclidienne de l’intégration volumique de la boule et relation à la courbure	45
3.3.2	Analyse digitale de l’aire et du volume de la boule et relation à la courbure	50
3.3.3	Analyse digitale de la matrice de covariance et relation aux courbures principales en 3D	59

3.3.4	Résultats sur l'estimation de la courbure par intégration volumique de la boule	71
3.4	Estimation sans paramètre de la courbure par intégration volumique de la boule	72
3.4.1	Estimateur digital de courbure sans paramètre en 2D	73
3.4.2	Estimateur digital local de courbure sans paramètre en 2D	77
3.4.3	Estimateur digital de courbures sans paramètre en 3D	78
3.4.4	Estimateur digital local de courbures sans paramètre en 3D	83
3.4.5	Optimisation des estimateurs locaux sans paramètre et résultats	84
3.5	Analyse comparative des estimateurs de courbure	85
3.5.1	Méthodologie d'évaluation	86
3.5.2	Analyse expérimentale de la convergence asymptotique	87
3.5.3	Robustesse au bruit	92
3.6	Conclusion	93
4	Applications	109
4.1	Estimation de singularités	110
4.1.1	État de l'art	111
4.1.2	Estimation de singularités par l'analyse en espace d'échelle de la courbure	123
4.1.3	Comparaison des estimateurs de points caractéristiques	133
4.1.4	Conclusion sur l'estimation de singularité	136
4.2	Application dans le contexte du projet <i>digitalSnow</i>	142
4.3	Mises en œuvre dans DGtal	144
5	Conclusions et perspectives	147

Introduction et contexte – Géométrie digitale et projet digitalSnow

” *With my freeze ray
I will stop the world.*

— **Dr. HORRIBLE** (*Neil Patrick HARRIS*)
Dr. Horrible’s Sing-Along Blog.

Depuis quelques années, nous vivons dans un monde entouré en permanence de **données numériques**. Il ne passe pas un jour sans que nous ne soyons bombardés de pixels, que ce soit sur les téléphones portables, les écrans publicitaires animés, ou peut-être même actuellement si vous lisez ce document sur un écran. Devant cette masse grandissante de pixels, ou de voxels en dimension 3, les besoins en traitement de ces données digitales sont de plus en plus forts. Dans l'imagerie médicale par exemple, nous sommes capables de récupérer de manière non-invasive un « amas de voxels » représentant un organe d'un patient. Il existe une demande de plus en plus forte également pour la sauvegarde du patrimoine culturel : les œuvres ont une durée de vie limitée par le choix de leurs matériaux ou à cause d'événements extérieurs (guerres, catastrophes naturelles) ; il devient alors préoccupant de les stocker numériquement.

Le cadre de cette thèse, avec le **projet *digitalSnow***, est d'étudier les métamorphoses de neige difficilement observables à l'œil nu grâce à leur représentation digitale. Le projet *digitalSnow*¹ est un projet de recherche financé par l'Agence Nationale de la Recherche qui regroupe trois laboratoires spécialisés dans des domaines différents : le laboratoire d'informatique **LIRIS** de l'Université de Lyon, le laboratoire de mathématiques **LAMA** de l'Université de Savoie Mont-Blanc, et le Centre d'Études de la Neige **CEN** du Centre National de Recherches Météorologiques. Lors d'une chute de neige, les cristaux de glace s'accumulent sur le sol et forment un ensemble poreux d'air humide, de glace et d'eau. Cette neige se transforme avec le temps ; l'enjeu ici est de comprendre comment évolue la micro-structure de la neige en fonction des conditions extérieures et des phénomènes intrinsèques du matériau (tension de surface). Pour ce faire, nous récupérons des images digitales de dimension 3 de micro-échantillons de neige grâce à la micro-tomographie à rayons X et nous cherchons à extraire des quantités topologiques et géométriques (comme la courbure) afin de modéliser les propriétés physiques du matériau. Nous préciserons le contexte applicatif dans le **paragraphe 4.2 page 142**.

La **géométrie digitale** tente alors d'apporter des outils mathématiques permettant d'exploiter pleinement ces données digitales. Ces outils proviennent généralement de la géométrie euclidienne classique et sont adaptés pour des données digitales (parties de \mathbb{Z}^d). Cependant, comme le dit Jean FRANÇON dans la préface de « Géométrie discrète et images numériques » [Coe+07], la *géométrie digitale* n'est pas seulement l'étude d'objets du monde réel dans l'espace digital, mais également l'étude de l'objet digital lui-même. Ainsi, sous l'impulsion de Jean-Pierre REVEILLÈS dès 1988, la géométrie arithmétique s'intéresse aux droites et cercles non plus comme étant seulement le produit d'un algorithme de tracé mais définis intrinsèquement dans la géométrie digitale, sans l'être par approximation du continu.

¹ANR-11-BS02-009, <http://liris.cnrs.fr/dsnow/>

La principale motivation est d'approcher au plus près la représentation digitale de l'objet de sa version euclidienne. Ainsi nous nous intéressons aux questions suivantes : comment récupérer des informations sur l'objet réel étudié lorsque nous n'avons à notre disposition qu'une version approchée de celui-ci, sa version discrétisée ? Pouvons-nous garantir la qualité des quantités estimées sur les données digitales ? Après de rapides définitions des notions et outils de base utilisés en géométrie digitale dans le [chapitre 2 page 5](#), nous proposons dans le [chapitre 3 page 29](#), des estimateurs digitaux de courbure en dimension 2 et 3 (courbure moyenne, courbures principales) avec des preuves mathématiques garantissant la qualité des résultats (propriété de convergence asymptotique uniforme). Nous adapterons ces estimateurs dans ce même chapitre afin qu'ils ne nécessitent aucun paramètre. Ensuite, dans le [chapitre 4 page 109](#), nous dérivons ces estimateurs de courbure afin de reconnaître les singularités d'un objet, en quelque sorte les arêtes de l'objet sous-jacent à sa représentation digitale. Enfin, nous concluons et nous apporterons quelques perspectives résultant de ces travaux dans le [chapitre 5 page 147](#).

Notions et éléments de la géométrie classique et de la géométrie digitale

” *[S’adressant à Arthur.] Des chefs de guerre, il y en a de toutes sortes. Des bons, des mauvais, des pleines caquettes il y en a. Mais une fois de temps en temps, il en sort un. Exceptionnel. Un héros. Une légende. [...] Tu sais ce que c’est, leur pouvoir secret ? Ils ne se battent que pour la dignité des faibles.*

— **Cæsar Imperator (Pierre MONDY)**
Kaamelott, Livre VI.

Sommaire

2.1	Introduction	6
2.2	Notations	6
2.3	Introduction à la géométrie des surfaces et formes continues . .	6
2.3.1	Classes de fonctions C^1 , C^2 , C^d	6
2.3.2	Aire et volume	8
2.3.3	Moments géométriques	8
2.3.4	Courbure des courbes et des surfaces	9
2.4	Éléments de géométrie digitale	12
2.5	Discretisation	16
2.6	Convergence asymptotique d’estimateurs locaux et globaux . . .	20
2.7	Estimateurs digitaux d’aire, de volume, de moments géométriques	23
2.7.1	Aire et volume digitaux en dénombrant les points digitaux	24
2.7.2	Moments géométriques digitaux en dénombrant les points digitaux	24
2.8	Droites digitales standards, segments digitaux, arcs de cercle digitaux	25
2.9	Conclusion	28

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons poser les définitions des éléments dont nous allons nous servir pour la suite de ce document. Cela comprend une introduction à la géométrie des surfaces et des formes continues (paragraphe 2.3) permettant de faire le lien entre la géométrie euclidienne et nos estimateurs digitaux, les notions de base de la géométrie digitale (paragraphe 2.4), ainsi que tout le processus formel permettant d'analyser le comportement d'un estimateur digital (paragraphe 2.6). Enfin, nous verrons quelques primitives digitales que nous utiliserons par la suite, comme les segments de droite discrète maximaux (paragraphe 2.7 et 2.8).

2.2 Notations

Le tableau 2.1 page ci-contre énonce les notations utilisées dans ce manuscrit et leur signification (sauf mention contraire). Chacune de ces notations sera introduite au cours des différents paragraphes.

2.3 Introduction à la géométrie des surfaces et formes continues

La **géométrie des surfaces et des formes continues** est l'étude des surfaces comme graphes de fonctions. Nous allons dans un premier temps étudier la dérivabilité de ces fonctions (**classes de fonctions**). Ensuite, nous définirons des quantités intégrales décrivant la surface.

2.3.1 Classes de fonctions C^1 , C^2 , C^d

Définissons les classes de fonctions C^1 , C^2 ou plus généralement C^d , permettant de connaître le différentiabilité d'une fonction.

Définition 2.1 (Classe de fonction C^1). Une fonction f sur un intervalle réel non vide et non trivial est une fonction continûment différentiable si elle est différentiable et si sa dérivée f' est continue. Nous dirons également que f est de **classe** C^1 .

Définition 2.2 (Classe de fonction C^2). Une fonction f sur un intervalle réel non vide et non trivial est une fonction deux fois continûment différentiable si elle est deux

Table 2.1 Notations utilisées dans cette thèse

Notation	Description	Définition
\mathbb{R}^d	Espace euclidien de dimension d	
\mathbb{X}	Famille de formes convexes de \mathbb{R}^d de bord C^3 à courbure bornée	§ 2.6 page 20
X	Forme de \mathbb{X}	§ 2.6 page 20
∂X	Bord topologique de X	§ 2.5 page 16
\mathbf{x}	Point de \mathbb{R}^d	§ 2.5 page 16
x_i	i -ième coordonnée de \mathbf{x} avec $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d)$	
\mathbf{x}_i	$(i + 1)$ -ième point d'une séquence. $(\mathbf{x}_i)_{i=0 \dots n-1}$	
\mathbb{Z}^d	Espace en coordonnées entières de dimension d	§ 2.5 page 16
Z	Objet digital (partie de \mathbb{Z}^d)	§ 2.5 page 16
h	Pas de discrétisation pour la discrétisation de Gauss	§ 2.5 page 16
$G_h(X)$	Discrétisation de Gauss de X sur une grille de pas h	§ 2.5 page 16
$[G_h(X)]_h$	Plongement euclidien de la discrétisation de Gauss de X sur une grille de pas h	§ 2.5 page 16
$\partial[G_h(X)]_h$	Bord topologique du plongement euclidien de la discrétisation de Gauss de X sur une grille de pas h	§ 2.5 page 16
$\hat{\mathbf{x}}$	Points de $\partial[Z]_h$ pour une forme Z	§ 2.5 page 16
$E(X, \mathbf{x})$	Quantité définie au point $\mathbf{x} \in \partial X$, $X \subset \mathbb{R}^d$	§ 2.6 page 20
$\hat{E}(Z, \hat{\mathbf{x}}, h)$	Quantité estimée au point $\hat{\mathbf{x}} \in \partial[Z]_h$, $Z \subset \mathbb{Z}^d$	§ 2.6 page 20
$m^{p_1 \dots p_d}(X)$	Moment géométrique d'ordre $p_1 \dots p_d$ de X	§ 2.3.3 page 8
$\mathcal{V}(X)$	Matrice de covariance de X	§ 3.3.1 page 45
$\kappa(X, \mathbf{x})$	Courbure au point $\mathbf{x} \in \partial X$, $X \subset \mathbb{R}^2$	§ 2.3 page 6
$H(X, \mathbf{x})$	Courbure moyenne au point $\mathbf{x} \in \partial X$, $X \subset \mathbb{R}^3$	§ 2.3 page 6
$K(X, \mathbf{x})$	Courbure gaussienne au point $\mathbf{x} \in \partial X$, $X \subset \mathbb{R}^3$	§ 2.3 page 6
$\kappa_i(X, \mathbf{x})$	i -ième courbure principale au point $\mathbf{x} \in \partial X$, $X \subset \mathbb{R}^3$	§ 2.3 page 6
$\mathbf{w}_i(X, \mathbf{x})$	i -ième direction principale de courbure au point $\mathbf{x} \in \partial X$, $X \subset \mathbb{R}^3$	§ 2.3 page 6
$\mathbf{n}(X, \mathbf{x})$	Normale au point $\mathbf{x} \in \partial X$, $X \subset \mathbb{R}^3$	§ 2.3 page 6

fois différentiable et si sa dérivée seconde f'' (la dérivée de f') est continue. Nous dirons également que f est de **classe** C^2 .

Plus généralement, pour $d > 2$, la classe de fonction C^d est définie comme :

Définition 2.3 (Classe de fonction C^d). Une fonction f est de **classe** C^d (avec $d \geq 2$) sur un intervalle réel non vide et non trivial si elle est d fois continûment différentiable.

2.3.2 Aire et volume

Nous nous intéressons aux quantités intégrales d'une forme $X \subset \mathbb{R}^d$. Les quantités les plus directes sont probablement l'aire de la forme en dimension 2 ou son volume en dimension 3. Cela revient à calculer une double ou triple intégrale de la forme suivante :

Définition 2.4 (Aire d'une forme). Soit X une partie bornée de \mathbb{R}^2 . Soit la fonction constante 1 intégrable sur X , alors l'aire de X est :

$$\text{Area}(X) = \iint_X dx dy. \quad (2.1)$$

Définition 2.5 (Volume d'une forme). Soit X une partie bornée de \mathbb{R}^3 . Soit la fonction constante 1 intégrable sur X , alors le volume de X est :

$$\text{Vol}(X) = \iiint_X dx dy dz. \quad (2.2)$$

Nous parlons également de mesure de X au sens de Lebesgue. Nous reviendrons sur ces définitions dans le cadre digital dans le [paragraphe 2.7 page 23](#).

2.3.3 Moments géométriques

Le concept mathématique des moments (~~en~~ *General moment theory*) a été activement étudié depuis plusieurs années. Plus particulièrement, les moments géométriques ont montré leur intérêt dans la reconnaissance de formes (nous pouvons citer la revue de TRIER *et al.* [Tri+96] pour la reconnaissance de caractères) et la reconstruction d'objets [Gho+05]. La première utilisation des moments en analyse d'images remonte à 1962 par HU [Hu62] pour la reconnaissance de caractères. Nous allons tout d'abord définir ce que sont les moments et leurs caractéristiques, pour ensuite nous intéresser à les estimer sur des données digitales.

Une définition générale du moment géométrique (ou moment cartésien) $m^{p_1 \dots p_d}$ d'ordre $p_1 \dots p_d$ (aussi appelé le $p_1 \dots p_d$ -moment) de X (partie ou sous-ensemble de \mathbb{R}^d) peut être donnée comme :

$$m^{p_1 \dots p_d}(X) := \int \dots \int_X x_1^{p_1} \dots x_d^{p_d} dx_1 \dots dx_d. \quad (2.3)$$

Moment d'ordre zéro : aire / volume Il apparaît alors que le $0 \cdots 0$ -moment (ou 0-moment) correspond à l'aire en 2D ou au volume en 3D de X :

$$m^{0 \cdots 0}(X) := \int \cdots \int_X dx_1 \cdots dx_d. \quad (2.4)$$

Moments du premier ordre : barycentre ou centre d'inertie Les d moments du premier ordre ($m^{10 \cdots 0}(X)$, $m^{010 \cdots 0}(X)$, \dots , $m^{0 \cdots 01}(X)$) sont généralement utilisés pour déterminer le barycentre de la forme à analyser. Les coordonnées du barycentre ($\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_p$) sont données par :

$$\bar{x}_1 := \frac{m^{10 \cdots 0}(X)}{m^{0 \cdots 0}(X)}, \dots, \bar{x}_p := \frac{m^{0 \cdots 01}(X)}{m^{0 \cdots 0}(X)}. \quad (2.5)$$

Moments du second ordre Les moments du second ordre $m^{p_1 \cdots p_d}(X)$ avec $p_1 + \dots + p_d = 2$ sont connus comme les moments d'inertie, caractérisant la géométrie des masses de la forme. En 2D, nous en dénombrons 3 : $m^{20}(X)$, $m^{11}(X)$ et $m^{02}(X)$, en 3D il en existe 6 : $m^{200}(X)$, $m^{020}(X)$, $m^{002}(X)$, $m^{110}(X)$, $m^{010}(X)$ et $m^{101}(X)$.

Dans le [chapitre 3 page 29](#) nous verrons comment ces moments géométriques pourront nous servir pour l'estimation de quantités différentielles.

2.3.4 Courbure des courbes et des surfaces

Nous nous intéressons maintenant à la courbure, un invariant géométrique des courbes et des surfaces. La courbure est une scalaire mesurant la déviation de la courbe par rapport au vecteur tangent. Cette quantité est très utilisée en *traitement géométrique* dans l'analyse et le suivi de formes, entre autres. Nous détaillerons cela dans le [chapitre 3 page 29](#).

Soit $f(x)$ une courbe C^2 paramétrée par son abscisse curviligne dans un espace de dimension 2 :

$$\begin{aligned} f : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ x &\rightarrow f(x) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Alors la courbure de f au point x s'écrit comme la norme de la dérivée seconde :

$$\kappa(x) = \left| \frac{d^2 f}{dx^2} \right|. \quad (2.7)$$

Une autre façon d'obtenir la courbure est de s'intéresser aux cercles osculateurs de la surface :

$$\kappa(x) = \frac{1}{r_o(x)}, \quad (2.8)$$

où $r_o(x)$ est le rayon du cercle osculateur de la courbe f au point x , c'est-à-dire le cercle qui épouse (géométriquement) le mieux la courbe f en x (voir [figure 2.1](#)).

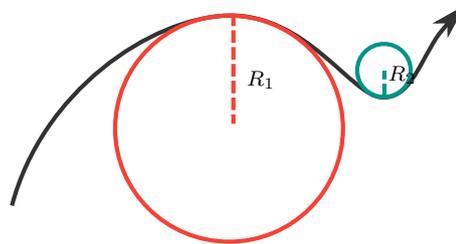


Figure 2.1 La courbure est l'inverse du rayon du cercle osculateur. Ainsi plus le rayon est petit, plus la courbure (en valeur absolue) est forte.

Usuellement, lorsque nous parlons de courbure, nous parlons de **courbure algébrique**. Les définitions précédentes donnent un scalaire positif, représentant la déviation de la courbe par rapport au vecteur tangent. Nous souhaitons obtenir des valeurs de courbure positives, négatives ou encore nulles. Les courbures algébriques sont alors signées. Cela implique par exemple de pouvoir obtenir des valeurs de r_o négatives dans le cas d'une forme concave.

La courbure peut être également définie comme la dérivée de l'orientation du vecteur tangent. Si $\phi(x)$ est l'angle orienté entre le vecteur tangent $\vec{t}(x)$ et une droite fixe, nous avons :

$$\kappa(x) = \frac{d\phi}{dx}. \quad (2.9)$$

En dimension 3, nous pouvons définir la courbure de la surface. Celle-ci prend plusieurs formes : la courbure moyenne, la courbure gaussienne et les courbures principales. Ces différentes quantités permettent de qualifier précisément la courbure d'une surface, nous allons les détailler.

Considérons le **repère de Frenet** défini par la normale \mathbf{n} et deux vecteurs orthogonaux \vec{t}_1 et \vec{t}_2 du plan tangent au point \mathbf{x} de la surface ∂X pour $X \subset \mathbb{R}^3$. Dans ce repère, nous considérons deux plans orthogonaux, Π_1 et Π_2 , formant deux courbes 2D f_1 et f_2 à l'intersection du plan et de la surface ∂X (voir [figure 2.3 page 12](#)). Notons $\kappa_a(X, \mathbf{x})$ la courbure de f_1 au point \mathbf{x} et $\kappa_b(X, \mathbf{x})$ la courbure de f_2 au point \mathbf{x} . Si f_1 et f_2 sont deux fois dérivables en \mathbf{x} , alors la **courbure moyenne** $H(X, \mathbf{x})$ est définie comme étant :

$$H(X, \mathbf{x}) = \frac{\kappa_a(X, \mathbf{x}) + \kappa_b(X, \mathbf{x})}{2}. \quad (2.10)$$

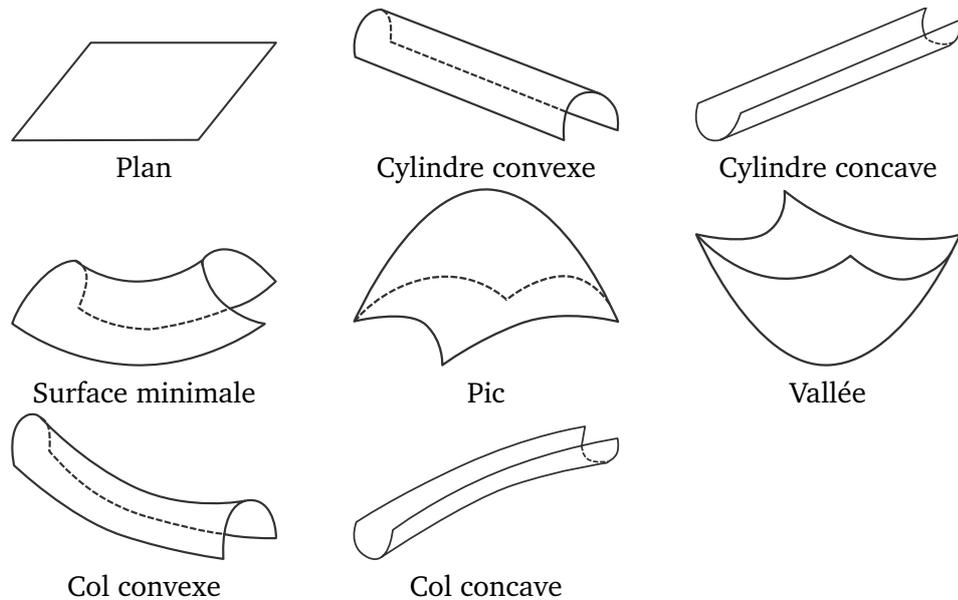


Figure 2.2 Illustration de différentes surfaces de dimension 3.

Si $\kappa_a(X, \mathbf{x})$ et $\kappa_b(X, \mathbf{x})$ sont respectivement la **courbure maximale** $\kappa_1(X, \mathbf{x})$ et la **courbure minimale** $\kappa_2(X, \mathbf{x})$ dans toutes les directions du repère de Frenet au point \mathbf{x} , alors nous pouvons définir la courbure gaussienne $K(X, \mathbf{x})$ comme étant :

$$K(X, \mathbf{x}) = \kappa_1(X, \mathbf{x}) \cdot \kappa_2(X, \mathbf{x}). \quad (2.11)$$

Nous pouvons noter quelques particularités en dimension 3 :

- la sphère unité a une courbure moyenne et gaussienne constante égale à 1 ;
- le plan euclidien a une courbure moyenne et gaussienne nulle ;
- le cylindre a une courbure moyenne positive et une courbure gaussienne nulle.

Le [tableau 2.2](#) et la [figure 2.2](#) montrent une classification des surfaces de dimension 3 en fonction du signe de leur courbure moyenne et gaussienne.

Table 2.2 Particularités des surfaces en fonction de leur courbures moyenne et gaussienne.

	$K = 0$	$K > 0$	$K < 0$
$H = 0$	plan	✘	surface minimale
$H > 0$	cylindre concave	vallée	col concave
$H < 0$	cylindre convexe	pic	col convexe

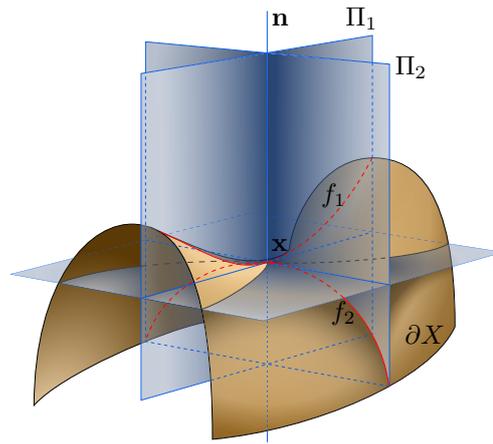


Figure 2.3 Surface intersectée par le plan tangent et deux plans orthogonaux Π_1 et Π_2 dans la direction de la normale n au point x . Ces plans forment deux courbes 2D f_1 et f_2 (en rouge). [Gab15].

2.4 Éléments de géométrie digitale

Dans ce paragraphe, nous allons introduire les notions de bases de la géométrie digitale comme le **pavage**. Un pavage est un ensemble de cellules partitionnant entièrement l'espace euclidien. Il existe plusieurs types de pavages présents dans la nature (craquement de sol sous l'effet de la chaleur, peaux d'animaux (serpent, girafe, etc.), sol de la Chaussée des Géants (Royaume-Uni), etc.) comme dans les constructions de l'Homme (carrelages, routes pavées, pyramide du Louvre (Paris, France), mosaïques, vitraux, etc.), comme l'illustre la [figure 2.4 page ci-contre](#).

Un sous-ensemble de ces pavages contient les **pavages réguliers**. Nous appelons un **espace digital** un pavage régulier du plan en dimension 2 ou de l'espace en dimension $d > 2$. Plusieurs types de pavages réguliers existent (voir la [figure 2.5 page 14](#)), nous nous intéressons ici uniquement aux pavages discrets par carrés (ou des cubes en dimension supérieure). Les points digitaux (**pixels** en dimension 2, **voxels** en dimension 3) de ce pavage régulier isothétique (aligné sur les axes) associés à cet espace sont des points de \mathbb{Z}^d comme nous pouvons le voir avec le graphe dual de la [figure 2.6 page 14](#). Les coordonnées des points digitaux sont alors des nombres entiers, rendant les calculs plus simples et stables qu'avec des coordonnées réelles. Les **objets digitaux** $Z \subset \mathbb{Z}^d$ sont alors simplement définis comme des ensembles de points digitaux de dimension d .

Nous pouvons ajouter à ces points digitaux des informations topologiques en considérant l'espace de grille cellulaire ou inter-pixels. L'idée est de plonger l'espace digital \mathbb{Z}^n dans l'espace cubique cartésien afin de pouvoir représenter les éléments inter-pixels [Kov89 ; Kha+90 ; Fra95], que nous nommerons **topologie de Khalimsky**. Ainsi :



Figure 2.4 Différents pavages dans la nature ou dans les constructions humaines. *De gauche à droite, de haut en bas* : désert de sel en Bolivie [Cos15], sol d'un des châteaux de la Loire (France) [Com15], mosaïque représentant Amphitrite (Herculanum, Italie), formation de basalte à la Chaussée des Géants (Royaume-Uni) [Web15].

- Les 0-cellules sont appelées des **pointels** (éléments de dimension 0) ;
- Les 1-cellules sont appelées des **lignels** ou **linels** (éléments de dimension 1) ;
- Les 2-cellules sont appelées des **pixels** (éléments de dimension 2).
- Les 3-cellules sont appelées des **voxels** (éléments de dimension 3).

La [figure 2.7 page 15](#) illustre les pointels, lignels et pixels. Par convention, nous nommons les n -cellules les **spels** (un pixel en dimension 2, un voxel en dimension 3), les $(n - 1)$ -cellules sont nommées les **bels** ou **surfel** pour **surface elements** (un **lignel** en dimension 2, un **pixel** en dimension 3). Par convention, les points digitaux $\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^d$ sont plongés dans des spels.

Ces définitions nous amènent directement aux questions de voisinage des points digitaux. La relation de voisinage est une notion importante pour la définition de notre objet digital. Le voisinage est défini en fonction de la **connexité** que possède une cellule digitale par rapport aux autres. Les [tableaux 2.3 et 2.4](#) définissent formellement ces notions, et la [figure 2.8 page 16](#) illustre la 4-connexité et la 8-

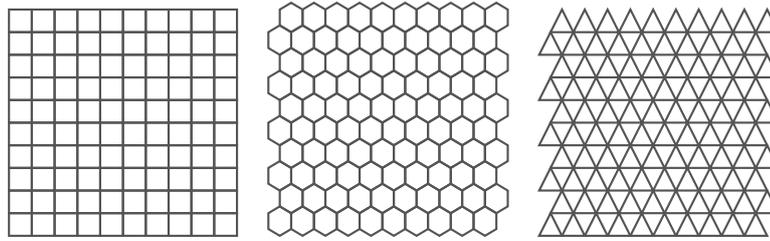


Figure 2.5 Pavages 2D réguliers par carrés, hexagones et triangles (figure 1.1 de [Coe02]).

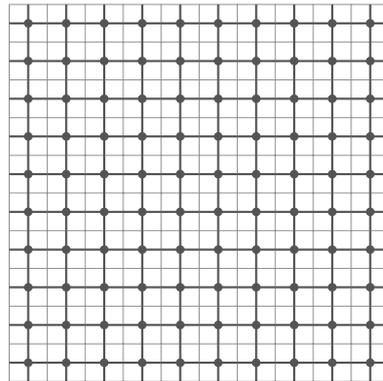


Figure 2.6 Dual du pavage 2D réguliers par carrés.

connexité sur un objet digital de dimension 2. Un autre terme désigne cette notion de voisinage : l'**adjacence**. Ainsi, nous parlons de n -adjacence pour les liens entre éléments de dimension n (c'est-à-dire les pointels pour $n = 0$, les lignels pour $n = 1$ en dimension 2).

Table 2.3 Définition des voisinages en dimension 2.

Adjacence	Connexité	Caractérisation
1	4	$\ \mathbf{x} - \mathbf{y}\ _1 = 1$
0	8	$\ \mathbf{x} - \mathbf{y}\ _\infty = 1$

Pour résumer, en dimension 2 :

- la 4-connexité (ou 1-adjacence) est la relation de voisinage par les arêtes (à gauche sur la [figure 2.8 page 16](#)) ;
- la 8-connexité (ou 0-adjacence) est la relation de voisinage par les arêtes et les sommets (à droite sur la [figure 2.8 page 16](#)).

De même, en dimension 3 :

- la 6-connexité (ou 2-adjacence) est la relation de voisinage par les faces ;

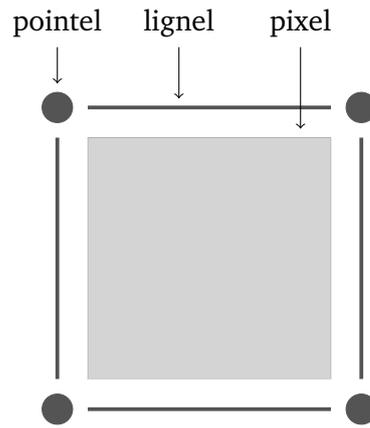


Figure 2.7 Illustration des 0-cellules (pointels), 1-cellules (lignels) et 2-cellules (pixels).

Table 2.4 Définition des voisinages en dimension 3.

Adjacence	Connexité	Caractérisation
2	6	$\ \mathbf{x} - \mathbf{y}\ _1 = 1$
1	18	$\ \mathbf{x} - \mathbf{y}\ _\infty = 1$ et $\ \mathbf{x} - \mathbf{y}\ _1 \leq 2$
0	26	$\ \mathbf{x} - \mathbf{y}\ _\infty = 1$

- la 18-connexité (ou 1-adjacence) est la relation de voisinage par les faces et les arêtes.
- la 26-connexité (ou 0-adjacence) est la relation de voisinage par les faces, les arêtes et les sommets.

La notion de voisinage est alors importante. En effet, en fonction de la connexité de l'espace digital, différentes composantes connexes peuvent être extraites comme le montre la [figure 2.9](#) page suivante.

Nous pouvons définir les **surfaces digitales**¹ $Bd(Z)$ comme étant le bord topologique de l'objet digital, c'est-à-dire des sous-ensemble du plan discret \mathbb{Z}^n .

En dimension 2 (respectivement dimension 3), il s'agit de la région inter-pixels (resp. inter-voxels) séparant les pixels (resp. voxels) à l'intérieur de l'objet digital de ceux à l'extérieur. Plus concrètement, les surfaces digitales sont des ensembles de surfels et de cellules de dimensions inférieures possédant un lien (4 ou 8-connexité) avec un spel à l'intérieur de l'objet et un spel hors de l'objet (voir [[Her98](#); [Udu94](#); [KU92](#)]). La [figure 2.11](#) page 18 illustre (*figure du bas, en bleu*) le bord topologique de Z .

¹Il existe plusieurs définitions pour les surfaces digitales [[Ros79](#); [Lat+95](#)]. Nous ne les détaillerons pas ici et n'utiliserons que la définition la plus courante.

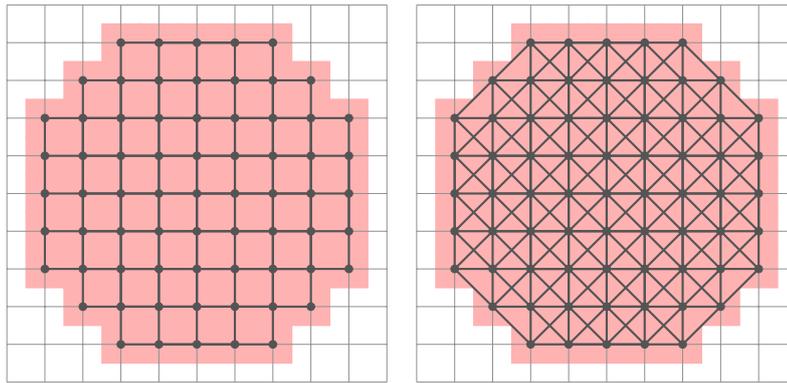


Figure 2.8 Illustration du voisinage en dimension 2. À gauche : 4-connexité, à droite : 8-connexité.

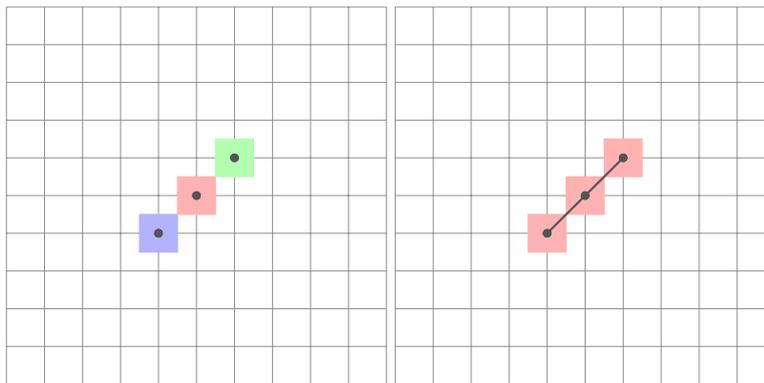


Figure 2.9 Illustration du nombre de composantes connexes en fonction de la connexité de l'espace digital. À gauche : trois composantes connexes sont extraites en 4-connexité. À droite : une seule composante connexe est extraite en 8-connexité.

Nous pouvons exploiter la topologie de Khalimsky pour effectuer du suivi de contour. En effet, grâce aux relations d'adjacence et à la définition de la topologie, les algorithmes d'extraction de surface par suivi sont très efficaces puisqu'il s'agit uniquement de résoudre un graphe de surfels [LM98 ; LM00].

2.5 Discrétisation

Nous allons maintenant décrire le processus de discrétisation d'un sous-ensemble de l'espace euclidien \mathbb{R}^d vers un ensemble de points de l'espace digital \mathbb{Z}^d . La formalisation de ce processus est importante pour l'évaluation théorique et expérimentale des estimateurs sur les bords digitaux des objets.

Considérons une forme X de \mathbb{R}^d à discrétiser en points de \mathbb{R}^d en coordonnées entières (c'est-à-dire de \mathbb{Z}^d), alors la **discrétisation de Gauss** $G_h(X)$ de X dans une grille de dimension d et de résolution h est :

$$G_h(X) := \{\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^d, (h \cdot \mathbf{p}) \in X\}, \quad (2.12)$$

où $h \cdot \mathbf{p}$ est le redimensionnement uniforme de \mathbf{p} par le facteur h . Ce facteur h est important car les points digitaux sont des carrés (ou cubes) unitaires, et n'ont alors aucune information d'échelle permettant la correspondance vers les formes euclidiennes. Par exemple, la **figure 2.10** montre deux disques de rayons différents discrétisés à deux échelles h différentes, donnant exactement la même discrétisation.

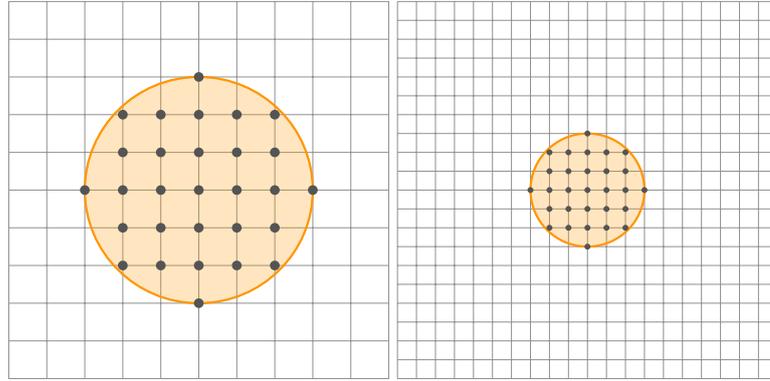


Figure 2.10 Illustration de la dépendance du paramètre d'échelle h et de la taille de la forme. L'objet euclidien de gauche donne le même objet digital que l'objet euclidien de droite alors qu'ils sont à des échelles différentes.

Si $\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^d$, alors $Q(\mathbf{p})$ désigne le cube unitaire fermé de dimension d de \mathbb{R}^d centré au point \mathbf{p} et aligné sur les axes de \mathbb{Z}^d . Nous définissons le **h -cube**, c'est-à-dire $Q(\mathbf{p})$ mis à l'échelle par h , comme :

$$Q_h(\mathbf{p}) := h \cdot Q(\mathbf{p}). \quad (2.13)$$

Ainsi, pour un ensemble digital $Z \subset \mathbb{Z}^d$, le **plongement euclidien** (~~body~~) de Z est le plongement $[\cdot]_h$ de Z vers \mathbb{R}^d , défini comme :

$$[Z]_h := \bigcup_{\mathbf{p} \in Z} Q_h(\mathbf{p}). \quad (2.14)$$

En d'autres termes, $[Z]_h$ est l'ensemble des cubes de dimension d appartenant à Z , mis à l'échelle par le pas de discrétisation h .

Intéressons-nous désormais aux bords de ces objets. Nous verrons plus tard que certains estimateurs sont définis sur le bord de l'objet ; il semble alors important de

l'étudier. Nous notons ∂X la **frontière** de X , c'est-à-dire son bord topologique (en orange foncé sur la figure 2.11). Nous pouvons également noter $\partial[\mathbb{G}_h(X)]_h$ le bord topologique du plongement euclidien de $\mathbb{G}_h(X)$.

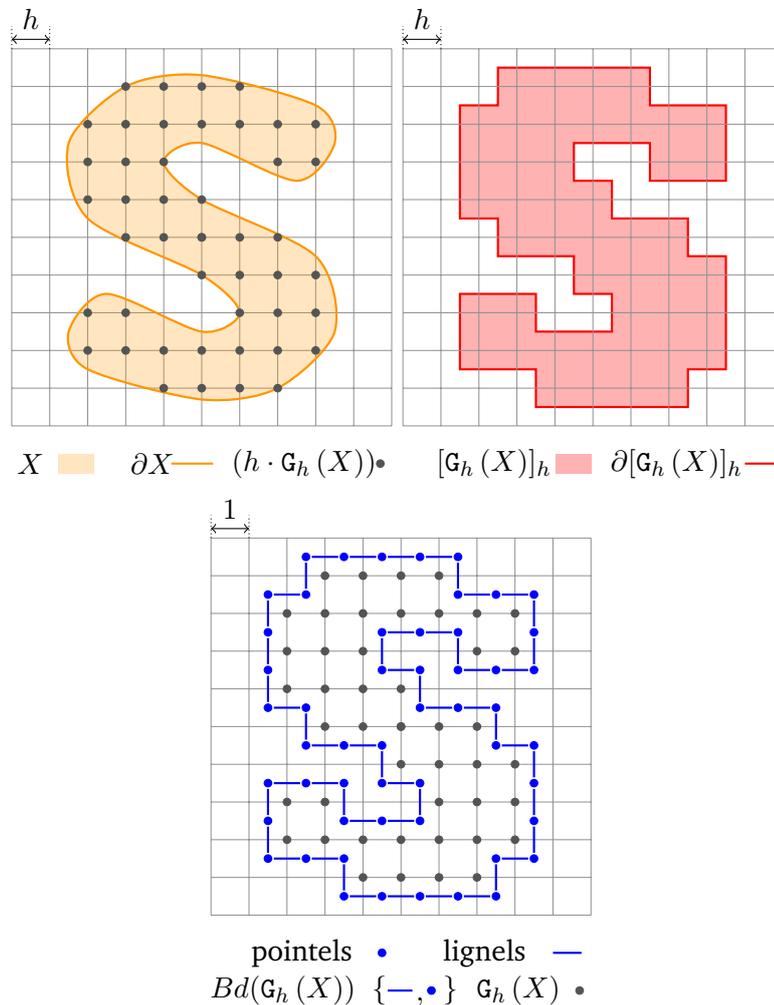


Figure 2.11 De gauche à droite en haut : Illustration d'une forme euclidienne X (en orange pâle), de sa frontière ∂X (en orange foncé), du plongement euclidien de sa discrétisation de Gauss $[\mathbb{G}_h(X)]_h$ (en rouge pâle) et son bord topologique euclidien $\partial[\mathbb{G}_h(X)]_h$ (en orange foncé). En bas : l'objet digital $Z = \mathbb{G}_h(X)$ (en gris, à noter que les carrés de la grille sont unitaires) et son bord digital $Bd(\mathbb{G}_h(X))$ (en bleu) composé de lignels et pointels.

La figure 2.11 montre une forme euclidienne $X \subset \mathbb{R}^2$ (en orange pâle) et sa frontière ∂X (en orange foncé), ainsi que $[\mathbb{G}_h(X)]_h$ le plongement euclidien de la discrétisation de Gauss de X avec le pas de discrétisation h (en rouge pâle) et son bord euclidien $\partial[\mathbb{G}_h(X)]_h$ (en rouge foncé). La figure du bas de la figure 2.11 montre l'objet digital $Z (= \mathbb{G}_h(X))$ que nous obtenons après la discrétisation de X dans l'espace de Khalimsky au pas de discrétisation h (en gris). Ainsi, nous obtenons des points digitaux $\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^2$ dans une grille carrée régulière unitaire. Nous pouvons extraire le bord $Bd(Z)$ afin d'obtenir un ensemble de lignels et de pointels (en bleu).

Comme nous pouvons le voir sur la [figure 2.11 page ci-contre](#), le bord $\partial[\mathbb{G}_h(X)]_h$ du plongement euclidien de $\mathbb{G}_h(X)$ est un sous-ensemble de dimension $(d-1)$ de \mathbb{R}^d qui est proche de ∂X . Pour certaines preuves mathématiques cette notion de proximité est essentielle. Une correspondance précise entre les points $\mathbf{x} \in \partial X$ et $\hat{\mathbf{x}} \in \partial[\mathbb{G}_h(X)]_h$ est alors nécessaire. Définissons dans un premier temps les outils dont nous avons besoin pour étudier cette correspondance : pour un forme $X \subset \mathbb{R}^d$, l'**axe médian** $MA(\partial X)$ de ∂X est le sous-ensemble de \mathbb{R}^d dans lequel chacun des points est le plus proche d'au moins deux points de ∂X . Le **reach** de ∂X est la borne inférieure de la distance entre ∂X et son axe médian. Les formes à reach positif ont leur courbures principales bornées par $\pm 1/\text{reach}(X)$. Alors nous pouvons définir la correspondance π_h^X du bord $\partial[\mathbb{G}_h(X)]_h$ du plongement euclidien de la discrétisation de Gauss de X vers le bord topologique ∂X de X dans la direction de la normale de la surface. Cette projection est nommée la **projection inverse** ou **back-projection** [Lac06] :

Définition 2.6 (Projection inverse π_h^X [Lac06]). Pour tout forme 2D X à reach positif, pour $0 < h \leq \text{reach}(X)$, soit $\mathbf{n}(X, \mathbf{x}, l)$ le segment centré au point \mathbf{x} , aligné le long de la normale à X au point \mathbf{x} et de demi-longueur l . Alors la **projection inverse** π_h^X est définie comme :

$$\begin{aligned} \pi_h^X : \partial[\mathbb{G}_h(X)]_h &\rightarrow \partial X, \\ \hat{\mathbf{x}} &\mapsto \mathbf{x} = \pi_h^X(\hat{\mathbf{x}}), \end{aligned} \tag{2.15}$$

où \mathbf{x} est le seul point tel que $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbf{n}(X, \mathbf{x}, \frac{\sqrt{2}}{2}h)$.

L'intuition de la preuve de cette définition est faite en 3 étapes dans [Lac06] : tout d'abord, le lemme B.8 de [Lac06] montre que si X est $\text{par}(R)$ -régulier², alors, pour tout point \mathbf{x} de ∂X , son segment normal $\mathbf{n}(X, \mathbf{x}, \frac{\sqrt{2}}{2}h)$ touche $\partial[\mathbb{G}_h(X)]_h$ en au moins un point. Ensuite, le lemme B.9 de [Lac06] nous indique que tout point \mathbf{x} est distant de moins de $\frac{\sqrt{2}}{2}h$ de $\partial[\mathbb{G}_h(X)]_h$ (dans la direction de sa normale) et que tout point $\hat{\mathbf{x}}$ est distant de moins de $\frac{\sqrt{2}}{2}h$ de ∂X . Enfin, le lemme B.10 de [Lac06] montre que la correspondance π_h^X n'introduit aucune ambiguïté et est surjective si $h < \text{reach}(X)$ et si le bord de X est C^3 -convexe. La [figure 2.12 page suivante](#) nous montre (en rouge) la projection de tout point $\hat{\mathbf{x}} \in \partial[\mathbb{G}_h(X)]_h$ vers des points $\mathbf{x} \in \partial X$. Ainsi, il existe une correspondance entre les points des bords $\partial[\mathbb{G}_h(X)]_h$ et ∂X qui ont une distance de Hausdorff inférieure ou égale à $\frac{\sqrt{2}}{2}h$. De plus, la projection π_h^X est continue sur $\mathbb{R}^d \setminus MA(\partial X)$, donc également sur $\partial[\mathbb{G}_h(X)]_h$ avec un h adéquat. En dimension supérieure, nous pouvons citer les travaux de LACHAUD

²Un ensemble $\text{par}(R)$ -régulier est un ensemble dont les normales ne s'intersectent pas entre elles lorsqu'elles sont représentées comme des segments de longueurs $2R$.

et al. [LT15], qui mettent aussi en évidence l'équivalence des notions de reach et de $\text{par}(R)$ -régularité.

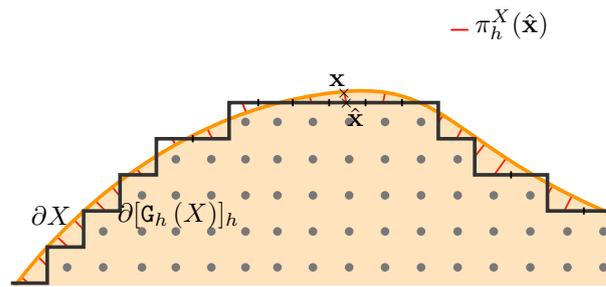


Figure 2.12 Projection inverse de tout point $\hat{x} \in \partial[G_h(X)]_h$ vers des points $x \in \partial X$.

2.6 Convergence asymptotique d'estimateurs locaux et globaux

Maintenant que le processus de discrétisation est défini, nous allons nous intéresser aux propriétés de convergence asymptotique des estimateurs de quantités géométriques. Tout d'abord, nous pouvons distinguer deux types de quantités géométriques : les quantités « locales » et les quantités « globales ».

Définition 2.7 (Quantités géométriques locales et globales). Une quantité géométrique est dite « locale » lorsqu'elle est définie localement en un point de la forme. Une quantité géométrique est dite « globale » lorsqu'elle est associée à la forme toute entière.

Pour illustrer cette définition, nous pouvons distinguer le volume d'une forme qui est une quantité géométrique « globale », tandis que la normale, la courbure ou encore la tangente en un point de sa surface sont des quantités géométriques dites « locales ».

Nous allons désormais définir la **convergence asymptotique d'estimateurs** de quantités géométriques (locales et globales). La notion de convergence asymptotique, introduite en 1982 par SERRA [Ser82], est un critère important permettant d'évaluer et de comparer des estimateurs digitaux. L'idée principale est, pour une forme euclidienne X donnée, d'évaluer l'erreur entre une quantité géométrique de X et la quantité géométrique digitale estimée sur la discrétisation de X , à plusieurs échelles de discrétisation. Le comportement attendu est alors que si nous raffinons l'objet digital (c'est-à-dire que le pas de discrétisation diminue, donnant ainsi un objet digital plus proche de la forme euclidienne comme le montre la figure 2.13), l'erreur d'estimation doit tendre vers 0.

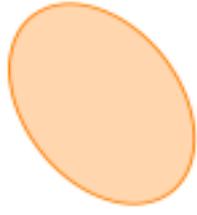


Figure 2.13 Ellipse euclidienne et ses versions discrétisées à différents pas de discrétisation $h = 1, 0.5$ et 0.1 .

Ainsi, définissons $\hat{E}(\mathbb{G}_h(X), h)$ (respectivement $\hat{E}(\mathbb{G}_h(X), \hat{x}, h)$) un estimateur de quantité géométrique globale (resp. locale) sur $\mathbb{G}_h(X)$ la discrétisation (de Gauss, voir le [paragraphe 2.5 page 16](#)) de la forme X au pas de discrétisation h . La version locale est définie sur un point \hat{x} le bord digital $\partial[\mathbb{G}_h(X)]_h$ de la discrétisation de la forme X au pas de discrétisation h .

Alors, nous pouvons étudier la convergence asymptotique de ces estimateurs (issue de la définition 2.10 de [KR04]) :

Définition 2.8 (Convergence asymptotique d'un estimateur digital de quantité géométrique globale). *Un estimateur digital de quantité géométrique globale \hat{E} d'une quantité géométrique E converge asymptotiquement pour une famille de formes \mathbb{X} si et seulement si pour toute forme $X \in \mathbb{X}$, il existe un pas de discrétisation $h_0 > 0$ tel que $\hat{E}(\mathbb{G}_h(X), h)$ soit défini pour tout $0 < h < h_0$,*

$$|\hat{E}(\mathbb{G}_h(X), h) - E(X)| \leq \tau_X(h), \quad (2.16)$$

où $\tau_X : \mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R}^+$, désignant l'erreur d'estimation de la quantité géométrique pour le pas de discrétisation h , a une limite nulle à 0. Cette fonction définit la vitesse de convergence de \hat{E} vers E sur X .

Un estimateur local digital estime la quantité géométrique sur tout point \hat{x} de $\partial[\mathbb{G}_h(X)]_h$.

Définition 2.9 (Convergence asymptotique d'un estimateur digital de quantité géométrique locale). *Un estimateur digital de quantité géométrique locale \hat{E} d'une quantité géométrique E converge asymptotiquement pour une famille de formes \mathbb{X} si et seulement si pour toute forme $X \in \mathbb{X}$, il existe un pas de discrétisation $h_0 > 0$*

tel que l'estimation de $\hat{E}(\mathbb{G}_h(X), \hat{\mathbf{x}}, h)$ soit défini en tout point $\hat{\mathbf{x}} \in \partial[\mathbb{G}_h(X)]_h$ avec $0 < h < h_0$, et pour tout $\mathbf{x} \in \partial X$,

$$\forall \hat{\mathbf{x}} \in \partial[\mathbb{G}_h(X)]_h \text{ avec } \|\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\|_\infty \leq h, \quad |\hat{E}(\mathbb{G}_h(X), \hat{\mathbf{x}}, h) - E(X, \mathbf{x})| \leq \tau_{X, \mathbf{x}}(h), \quad (2.17)$$

où $\tau_{X, \mathbf{x}} : \mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R}^+$ a une limite nulle à 0. Cette fonction définit la vitesse de convergence de \hat{E} vers E au point \mathbf{x} de X . La convergence est dite **uniforme** pour X lorsque toutes les valeurs de $\tau_{X, \mathbf{x}}$ sont bornées (borne supérieure) par une fonction τ_X indépendante de $\mathbf{x} \in \partial X$ avec une limite nulle à 0.

Lorsque nous mettons en œuvre un estimateur différentiel sur une surface digitale, l'estimation est donnée sur un élément de la surface combinatoire (une surfel ou un élément de dimension inférieure). Implicitement, nous estimons en un point $\hat{\mathbf{x}}$ correspondant au centre du plongement géométrique du surfel. Nos preuves de convergence étant définies pour tout $\hat{\mathbf{x}}$ de $\partial[\mathbb{G}_h(X)]_h$, ce type d'estimateurs digitaux reste parfaitement cohérent.

Généralement, les vitesses de convergence des estimateurs étudiés seront de la forme $O(h^a)$, pour $a > 0$ et h qui tend vers 0. Cette valeur de a nous permet alors de comparer les vitesses de convergence des estimateurs. Nous nous intéressons dans cette thèse à la **convergence asymptotique uniforme** de nos estimateurs, en d'autres mots il s'agit l'erreur dans le pire des cas de nos estimateurs.

Les preuves de convergence sont valides seulement pour des **familles d'objets** \mathbb{X} . Ces familles d'objets font des hypothèses sur la forme, permettant alors de valider la convergence. Afin de simplifier la lecture, nous allons introduire des notations sur les familles de formes dont nous allons nous servir par la suite :

- La famille de toutes les formes convexes finies du plan euclidien est noté X^C ;
- La famille de tous les ensembles convexes dont la bordure est C^n à courbure positive est noté X^{n-SC} ;
- La famille de tous les ensembles convexes dont la bordure est C^n par morceaux est noté $X^{n-PW-SC}$.

COEURJOLLY *et al.* [Coe+12] ont proposé une analyse complète d'estimateurs (en dimension 2) de la longueur de la forme (ou périmètre) ainsi que de la tangente en tout point du bord de l'objet. Le [tableau 2.5 page ci-contre](#) récapitule les vitesses de convergence obtenues ainsi que les familles de formes associées pour les preuves de convergence. L'estimation de la courbure sera détaillée dans le chapitre suivant.

Table 2.5 Convergence asymptotique connus de certains estimateurs de quantités géométriques (tableaux 1 et 2 de [Coe+12]).

Quantité	Estimateur	Famille de formes	Vitesse de convergence		Référence
			Borne sup.	Observée	
Longueur	$\hat{\mathbf{L}}^{DSS}$	Polygones convexes	$\approx 4.5h$		[KF92]
Longueur	$\hat{\mathbf{L}}^{DSS}$	$\mathbb{X}^{3-PW-SC}$?	$O(h)$	[KF92]
Longueur	$\epsilon - sausage$	Polygones convexes	$\approx 5.844h$		[Asa+01]
Longueur	$\hat{\mathbf{L}}^{ST}$	\mathbb{X}^C	?	$O(h)$	[CK04]
Longueur	$\hat{\mathbf{L}}^{FP}$	\mathbb{X}^C	?	$O(h)$	[RS11]
Longueur	$\hat{\mathbf{L}}^{MLP}$	\mathbb{X}^C	$\approx 8h$		[Slo+98]
Longueur	$\hat{\mathbf{L}}^{MLP}$	$\mathbb{X}^{3-PW-SC}$	$O(h)$	$O(h^{\frac{4}{3}})$	[Slo+98]
Longueur	$\hat{\mathbf{L}}^{\lambda-MST}$	$\mathbb{X}^{3-PW-SC}$	$O(h^{\frac{1}{3}})$	$O(h^{\frac{4}{3}})$	[Lac06]
Tangente	$\hat{\mathbf{T}}^{BC}$	Polygones	?	$O(h^{\frac{1}{3}})$	[Coe+12]
Tangente	$\hat{\mathbf{T}}^{BC}$	\mathbb{X}^{1-SC}	$O(h^{\frac{2}{3}})$	$O(h^{\frac{2}{3}})$	[Mal+08]
Tangente	$\hat{\mathbf{T}}^{BC}$	$\mathbb{X}^{1-PW-SC}$?	$O(h^{\frac{1}{3}})$	[Coe+12]
Tangente	$\hat{\mathbf{T}}^{\lambda-MST}$ et $\hat{\mathbf{T}}^{MCMS}$	Polygones	$O(h)$	$O(h)$	[Lac06]
Tangente	$\hat{\mathbf{T}}^{\lambda-MST}$ et $\hat{\mathbf{T}}^{MCMS}$	$\mathbb{X}^{1-PW-SC}$?	$O(h^{\frac{2}{3}})$	[DVL09]
Tangente	$\hat{\mathbf{T}}^{\lambda-MST}$ et $\hat{\mathbf{T}}^{MCMS}$	\mathbb{X}^{3-SC}	$O(h^{\frac{1}{3}})$	$O(h^{\frac{2}{3}})$	[Lac06]
Tangente	$\hat{\mathbf{T}}^{H1-0GD}$	Polygones	?	Non	[Coe+12]
Tangente	$\hat{\mathbf{T}}^{H1-0GD}$	$\mathbb{X}^{1-PW-SC}$?	$\approx O(h^{\frac{2.5}{3}})$	[DVL09]
Tangente	$\hat{\mathbf{T}}^{H1-0GD}$	\mathbb{X}^{3-SC}	$O(h^{\frac{1}{3}})$	$O(h^{\frac{2.5}{3}})$	[DVL09]

Pour plus de détails, se référer à [Coe+12]. La convergence des estimateurs de courbure sera détaillée dans le chapitre suivant. Intéressons-nous dans le paragraphe suivant à l'estimation de l'aire, du volume et des moments géométriques.

2.7 Estimateurs digitaux d'aire, de volume, de moments géométriques

Nous avons vu dans le [paragraphe 2.3 page 6](#) certaines quantités intégrales, comme l'aire, le volume ou encore les moments. Ces quantités peuvent être très facilement estimées sur des objets discrets, le calcul intégral pouvant se limiter à compter des points digitaux. Nous allons ici détailler l'estimation digitale d'aire, de volume et des moments sur des surfaces digitales, ainsi que leurs convergences.

2.7.1 Aire et volume digitaux en dénombrant les points digitaux

Une façon simple de calculer l'aire ou le volume d'une forme digitale consiste à compter le nombre de points digitaux appartenant à la forme. Plus formellement, pour tout sous-ensemble $Z \subset \mathbb{Z}^2$, l'estimateur digital d'aire au pas de discrétisation h est défini par :

$$\widehat{\text{Area}}(Z, h) := h^2 \text{Card}(Z) \quad (2.18)$$

En dimension 3, nous noterons ainsi l'estimateur digital de volume au pas de discrétisation h :

$$\widehat{\text{Vol}}(Z, h) := h^3 \text{Card}(Z) \quad (2.19)$$

Maintenant, si ce sous-ensemble digital Z provient de la discrétisation de formes euclidiennes X , nous voulons que l'estimation du volume devienne meilleure lorsque le pas de discrétisation h se raffine (voir [paragraphe 2.6 page 20](#)). Il est connu depuis GAUSS et DIRICHLET que cette façon d'estimer l'aire donne des résultats de convergence asymptotique sur les formes X convexes finies de \mathbb{R}^2 :

$$\widehat{\text{Area}}(\mathbb{G}_h(X), h) = \text{Area}(X) + O(h^\beta), \quad (2.20)$$

avec $\beta = 1$ dans le cas général (\mathbb{X}^C) [KŽ00], et peut être optimisé à $\beta = \frac{15}{11} - \epsilon$ avec $\epsilon > 0$ (arbitrairement petit) lorsque le bord de l'objet est C^3 à courbure non nulle [Hux90]. De mêmes résultats ont été proposés en 3D :

$$\widehat{\text{Vol}}(\mathbb{G}_h(X), h) = \text{Vol}(X) + O(h^\gamma), \quad (2.21)$$

avec $\gamma = 1$ dans le cas général [Krä88], et peut être amélioré à $\gamma = \frac{243}{158}$ lorsque le bord est lisse (\mathbb{X}^{3-SC}) [Guo10]. En dimension 2, les objets non convexes suivent les mêmes règles tant que X peut être exprimé comme une somme ou une différence de régions convexes bornées par des courbes fermées simples [Hux96]. Les résultats précédents restent valides chaque fois que le bord de la forme peut être décomposé en nombre fini de morceaux convexes (ou convexe C^3 à courbure non nulle pour les bornes améliorées).

2.7.2 Moments géométriques digitaux en dénombrant les points digitaux

Comme pour l'aire ou le volume précédemment, il est très simple de calculer les moments sur des données digitales. En effet, il suffit de sommer les valeurs des points digitaux de la forme et de remettre à l'échelle suivant le pas de discrétisation

h . Plus formellement, pour tout sous-ensemble Z de \mathbb{Z}^d , le $p_1 \cdots p_d$ -moment digital de Z au pas de discrétisation h est défini par :

$$\hat{m}_h^{p_1 \cdots p_d}(Z) := h^{d+p_1+\cdots+p_d} \sum_{(z_1, \dots, z_d) \in Z} z_1^{p_1} \cdots z_d^{p_d}. \quad (2.22)$$

Ainsi, le 0-moment digital de Z correspond au volume digital de Z , c'est-à-dire $\widehat{\text{Area}}(Z, h)$ lorsque $d = 2$ et $\widehat{\text{Vol}}(Z, h)$ lorsque $d \geq 3$. Nous souhaitons alors borner l'erreur entre les moments de X et l'estimation des moments digitaux de la discrétisation de X comme fonction du pas de discrétisation h . KLETTE *et al.* [KŽ00] ont démontré la convergence de cet estimation des moments avec une vitesse de convergence dépendante de l'ordre du moment $\sigma = p_1 + \cdots + p_d$:

$$\hat{m}_h^{p_1 \cdots p_d}(G_h(X), h) = m^{p_1 \cdots p_d}(X) + O(h^{\mu_\sigma}). \quad (2.23)$$

avec $\mu_\sigma \geq 1$ en dimension 2 et 3, pour $\sigma \leq 2$. Cette borne peut être améliorée lorsque la courbure gaussienne n'est pas nulle : KRÄTZEL *et al.* [KN91] obtiennent $\mu_0 = \frac{38}{25} - \epsilon$ et MÜLLER *et al.* [Mül99] obtiennent $\mu_0 = \frac{66}{43} - \epsilon$.

2.8 Droites digitales standards, segments digitaux, arcs de cercle digitaux

Nous allons maintenant nous intéresser aux définitions de primitives digitales. La primitive la plus basique à reconnaître est sans nul doute la droite ou le segment de droite. Alors, nous devons définir ce qu'une droite représente dans l'espace digital. Cette tâche est nécessaire, la principale difficulté provient de la discrétisation de la forme : des effets d'escalier peuvent apparaître sur une surface plane par exemple, comme illustré dans la [figure 2.14 page suivante](#). Définissons tout d'abord une **droite digitale standard** (ou droite 4-connexe), et ainsi le **segment digital** :

Définition 2.10 (Droite digitale standard et segment digital («  Standard Digital Straight Segment ») [Rev91]). L'ensemble de points $(p_1, p_2) \in \mathbb{Z}^2$ satisfaisant $\mu \leq ap_1 - bp_2 < \mu + |a| + |b|$, avec a, b et μ des nombres entiers, est appelé une **droite digitale standard** avec comme pente a/b et comme décalage μ . Tout sous-ensemble de pixels connectés d'une droite digitale standard est un **segment digital** (ou «  DSS »).

Puisque cette droite est 4-connexe, cela en fait un candidat parfait pour être reconnu à partir d'un contour digital.

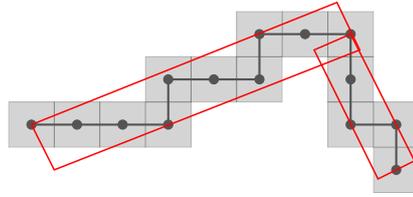


Figure 2.14 Segments de droites digitales (en rouge sur la figure).

Nous pouvons alors faire de la reconnaissance de ces primitives. La définition suivante décrit la manière de reconnaître un **segment maximal** à partir d'un ensemble de points digitaux, ainsi que le **faisceau de segments maximaux** :

Définition 2.11 (Segments maximaux et faisceau de segments maximaux [Lac+07]). Les pointels composant le bord digital $Bd(Z)$ d'une forme $Z \subset \mathbb{Z}^2$ forment un contour 4-connecté. Cela nous permet de les dénombrer consécutivement par $(\mathbf{p}_i)_{i=0\dots n-1}$. Une séquence de pointels $(\mathbf{p}_i, \dots, \mathbf{p}_j)$ (dont l'indice est modulo n) est un **segment maximal** (ou « MDSS ») sur $Bd(Z)$ si c'est un DSS qui ne peut s'étendre dans aucun sens (en avant ou en arrière) en restant un DSS. Plus formellement, $(\mathbf{p}_i, \dots, \mathbf{p}_j)$ est un segment maximal sur $Bd(Z)$ si et seulement si :

- $(\mathbf{p}_i, \dots, \mathbf{p}_j)$ est un DSS sur $Bd(Z)$;
- $(\mathbf{p}_{i-1}, \dots, \mathbf{p}_j)$ n'est pas un DSS sur $Bd(Z)$;
- $(\mathbf{p}_i, \dots, \mathbf{p}_{j+1})$ n'est pas un DSS sur $Bd(Z)$.

Pour un pointel $\mathbf{p} \in Bd(Z)$ donné, le faisceau de segments maximaux à \mathbf{p} est l'ensemble des segments maximaux de $Bd(Z)$ contenant \mathbf{p} .

Il paraît alors essentiel d'étudier le comportement asymptotique de ces primitives afin de pouvoir les exploiter. LACHAUD *et al.* [Lac06] et DE VIEILLEVILLE *et al.* [DV+07] se sont intéressés aux propriétés asymptotiques des longueurs des segments maximaux sur des formes convexes suffisamment lisses de dimension 2.

Lemme 2.1 (Lois asymptotiques des segments maximaux). Soit X une forme convexe de \mathbb{R}^2 , avec un bord C^3 à courbure bornée non nulle. La longueur discrète des segments maximaux de $Bd(Z)$ pour $Z = G_h(X)$ suit les règles suivantes :

- le **plus court des segments maximaux** a une borne inférieure en $\Omega(h^{-\frac{1}{3}})$;
- le **plus long des segments maximaux** a une borne supérieure en $O(h^{-\frac{1}{2}})$;

- la longueur moyenne des segments maximaux $L_D(Z)$, est bornée par :

$$\Theta(h^{-\frac{1}{3}}) \leq L_D(Z) \leq \Theta(h^{-\frac{1}{3}} \log\left(\frac{1}{h}\right)). \quad (2.24)$$

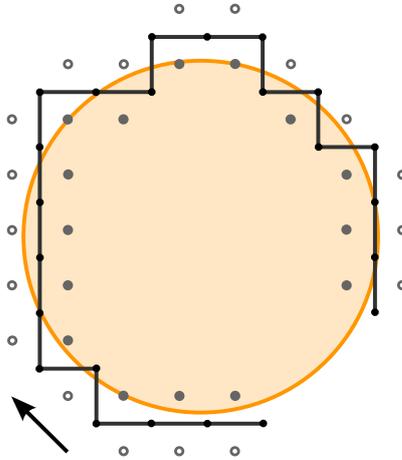


Figure 2.15 Arc de cercle digital (Figure 1.22 de [Rou09]).

L'arc de cercle est une autre primitive intéressante à étudier. En effet, puisque la courbure est l'inverse du rayon du cercle osculateur du bord d'un objet, le reconnaître permettrait d'approcher cette valeur. Définissons alors l'**arc de cercle digital** (voir la figure 2.15).

Définition 2.12 (Arcs de cercle digitaux). Soit X une forme convexe de \mathbb{R}^2 , avec un champ de courbure continu. Le contour digital $Bd(Z)$ pour $Z = G_h(X)$ est un **arc de cercle digital** (DCA) si et seulement s'il existe un cercle euclidien qui sépare les points digitaux intérieurs à $Bd(Z)$ des points digitaux extérieurs de $Bd(Z)$ (voir figure 2.15). Un arc de **cercle digital est maximal** (MDCA) si et seulement s'il ne peut être étendu dans aucune direction.

La figure 2.16 page suivante montre les arcs de cercle reconnus sur une courbe digitale.

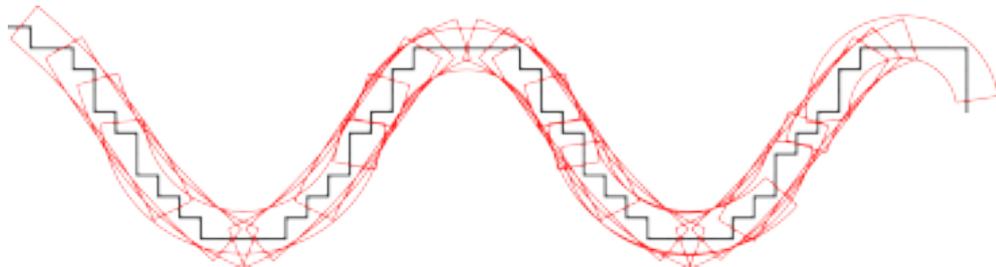


Figure 2.16 Arcs de cercle digitaux (en rouge) reconnus sur une forme de dimension 2.

Nous verrons dans le chapitre suivant des estimateurs utilisant ces primitives digitales pour estimer la courbure. Nous allons également proposer un estimateur digital de courbure tirant parti des segments maximaux.

2.9 Conclusion

Nous avons rappelé dans ce chapitre les bases de la géométrie différentielle et de la géométrie digitale. Ces bases vont nous permettre, dans le chapitre suivant, de définir formellement des estimateurs digitaux de courbure en dimensions 2 et 3. De plus, la reconnaissance de primitives nous permettra d'adapter nos estimateurs en analysant au préalable la géométrie de la forme d'entrée.

Estimateurs digitaux de courbures

” *Ce sont nos choix, Harry, qui montrent ce que nous sommes vraiment, beaucoup plus que nos aptitudes.*

— **Albus DUMBLEDORE**

Harry Potter et la Chambre des Secrets.

Sommaire

3.1	Introduction	30
3.2	État de l’art	30
3.2.1	Estimation de courbure sur des maillages	31
	Approche par formule de Gauss-Bonnet	31
	Cycles normaux	32
	Invariants par intégration	34
3.2.2	Estimation de courbure sur des nuages de points	34
	Ajustement polynomial des jets osculateurs	34
	Mesure de covariance des cellules de Voronoï	36
	Accumulateur sphérique	38
	Théorie des varifolds	39
3.2.3	Estimation de courbure sur des surfaces digitales	39
	Reconnaissance d’objets digitaux	40
	Convolutions binomiales	41
	Correspondance de surface polynomiale	43
	Tableau récapitulatif de convergence d’estimateurs digitaux de courbure	44
3.3	Estimation de courbure par intégration volumique locale d’une boule	45
3.3.1	Analyse euclidienne de l’intégration volumique de la boule et relation à la courbure	45
3.3.2	Analyse digitale de l’aire et du volume de la boule et relation à la courbure	50
3.3.2.1	Estimateurs digitaux de courbure en 2D et de courbure moyenne en 3D par intégration	52

3.3.2.2	Convergence des estimateurs digitaux de courbure en 2D et de courbure moyenne en 3D par intégration	53
3.3.2.3	Convergence asymptotique des estimateurs digitaux de courbure en 2D et de courbure moyenne en 3D sur le bord des surfaces digitales	56
3.3.3	Analyse digitale de la matrice de covariance et relation aux courbures principales en 3D	59
3.3.3.1	Matrice de covariance digitale et estimateurs digitaux de courbures principales	60
3.3.3.2	Propriétés des matrices de covariance et de moments	61
3.3.3.3	Convergence asymptotique des matrices de covariances digitales	64
3.3.3.4	Théorie de perturbation de matrices	68
3.3.3.5	Convergence asymptotique des estimateurs digitaux de courbures principales	69
3.3.4	Résultats sur l'estimation de la courbure par intégration volumique de la boule	71
3.4	Estimation sans paramètre de la courbure par intégration volumique de la boule	72
3.4.1	Estimateur digital de courbure sans paramètre en 2D	73
3.4.2	Estimateur digital local de courbure sans paramètre en 2D	77
3.4.3	Estimateur digital de courbures sans paramètre en 3D	78
3.4.4	Estimateur digital local de courbures sans paramètre en 3D	83
3.4.5	Optimisation des estimateurs locaux sans paramètre et résultats	84
3.5	Analyse comparative des estimateurs de courbure	85
3.5.1	Méthodologie d'évaluation	86
3.5.2	Analyse expérimentale de la convergence asymptotique	87
	Choix de $\alpha = \frac{1}{3}$	88
	Convergence expérimentale des estimateurs digitaux de courbure en 2D	89
	Convergence expérimentale des estimateurs digitaux de courbure en 3D	90
	Complexité et temps de calcul	91
3.5.3	Robustesse au bruit	92
3.6	Conclusion	93

Dans ce chapitre, nous allons définir de nouveaux estimateurs de courbure pour les surfaces digitales. Après avoir détaillé l'état de l'art ([paragraphe 3.2](#)), nous nous intéresserons à l'estimation de la courbure par intégration locale ([paragraphe 3.3 page 45](#)) afin d'en extraire des estimateurs de courbure en 2D et courbure moyenne ([paragraphe 3.3 page 45](#)) et courbures principales ([paragraphe 3.3.3 page 59](#)) en 3D. Ces estimateurs nécessitent une taille de boule d'intégration ; nous adapterons ces estimateurs à des versions ne nécessitant aucun paramètre dans le [paragraphe 3.4 page 72](#). Enfin, nous comparerons nos estimateurs avec les méthodes représentatives de l'état de l'art dans le [paragraphe 3.5 page 85](#). Dans ce chapitre, nous considérons que $\mathbb{X} = \mathbb{X}^C$ (famille des formes convexes à mesures finies du plan euclidien).

3.1 Introduction

Comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent ([paragraphe 2.3 page 6](#)), la géométrie d'une forme est décrite à partir de ses quantités différentielles comme la courbure. Ces quantités, utilisées dans plusieurs champs de recherche, doivent être estimées à partir des données à disposition [[Pet02](#) ; [Wan+09](#)]. Les données discrètes prennent différentes formes, qui sont principalement liées à la façon de capturer les objets ou à leur utilisation. Elles peuvent être des nuages de points, des maillages triangulés, ou encore des données digitales. Les critères guidant les définitions des estimateurs sont différents et très liés à l'usage de la quantité différentielle : certains privilégieront la rapidité d'estimation en dépit de la qualité, notamment dans un enjeu d'utilisation en temps interactif ou réel, tandis que d'autres (et c'est notre cas) préféreront garantir la qualité des résultats de l'estimation en priorité.

Comme nous l'avons vu dans le [chapitre 1 page 1](#), notre estimation de la courbure est utilisée au cœur d'un processus d'analyse de déformation de microstructures de grains de neige, nécessitant des résultats les plus justes possibles. Il nous paraît également important de connaître le comportement de l'estimateur. En effet, si, dans quelques années, les outils de captures de données digitales augmentent la résolution de la capture, aurons-nous une meilleure estimation de la courbure sur ces données ? Nous devons alors nous focaliser sur la convergence asymptotique de notre estimation à l'aide de preuves théoriques et de validations pratiques.

3.2 État de l'art

3.2.1 Estimation de courbure sur des maillages

Les données digitales étant discrètes par nature, il semble pertinent de s'intéresser aux techniques d'estimation de courbure sur des maillages triangulés. Il existe une vaste famille de techniques en *informatique graphique* et en *traitement géométrique* pour estimer les courbures moyennes et gaussiennes, et parfois même le tenseur de courbure entier. La plupart effectuent des analyses locales (c'est-à-dire limitées au 1-voisinage ou 2-voisinage) de la forme. La précision de l'estimation dépend fortement de la « qualité » du maillage (au sens où ce dernier approxime suffisamment précisément la surface continue sous-jacente).

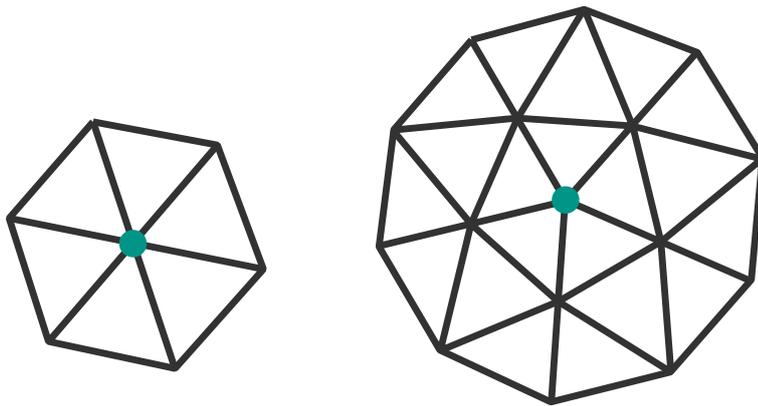


Figure 3.1 1-voisinage de valence 6 et 2-voisinage de valence 5 du sommet vert.

SURAZHSKY *et al.* [Sur+03] et GATZKE *et al.* [GG06] ont proposé une étude comparative de ces estimateurs. Nous nous référons à BOBENKO *et al.* [BS08] pour une théorie entièrement discrète. Cependant, la plupart n'ont aucune garantie de convergence théorique des valeurs estimées, même sans bruit sur le maillage. Nous pouvons citer [Rus04] (et [Pag+02] pour les normales), qui essaye de lisser les perturbations de la surface à l'aide d'un moyennage

Approche par formule de Gauss-Bonnet XU [Xu06] estime la courbure gaussienne avec une approche dérivée de la formule de Gauss-Bonnet. Cette approche a beaucoup été étudiée dans la littérature pour l'estimation de courbure gaussienne [MW00; SW92] mais aussi pour de la reconstruction [Dyn+01] ou de la simplification de surface [Kim+02], et a même été déclarée « le meilleur algorithme (parmi 5 approches) pour l'estimation de la courbure gaussienne » par SURAZHSKY *et al.* [Sur+03].

Soit \mathbf{p} un sommet de valence 6 du maillage triangulé M et \mathbf{p}_j avec $j = 1, \dots, 6$ l'ensemble des sommets du 1-voisinage de \mathbf{p} (voir figure 3.2-gauche pour les notations). Si \mathbf{p} et \mathbf{p}_j sont sur une surface paramétrique suffisamment lisse $F(x, y) \in \mathbb{R}^3$

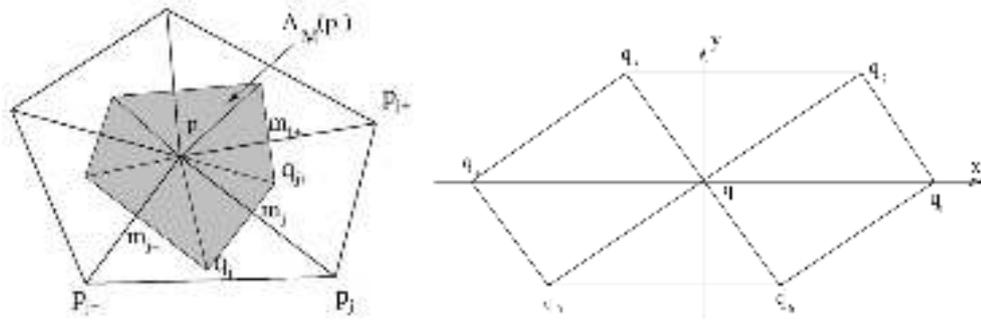


Figure 3.2 À gauche : Notations pour XU [Xu06] (Figure 1 de [Xu06]). À droite : Triangulation nécessaire du domaine (Figure 3 de [Xu06]).

et qu'il existe $\mathbf{q}, \mathbf{q}_j \in \mathbb{R}^2$ tels que (figure 3.2-droite, le 1-voisinage est projeté comme des parallélogrammes sur un plan) :

$$\mathbf{p} = F(\mathbf{q}), \quad \mathbf{p}_j = F(\mathbf{q}_j) \quad \text{et} \quad \mathbf{q}_j = \mathbf{q}_{j-} + \mathbf{q}_{j+} - \mathbf{q}, \quad (3.1)$$

Alors, en assumant que la densité de l'échantillonnage est δ avec $A(\mathbf{p}, \delta)$ la somme des aires des triangles $[\mathbf{p}\mathbf{p}_j(\delta)\mathbf{p}_{j+}(\delta)]$, ω_j l'angle $\angle \mathbf{p}_j\mathbf{p}\mathbf{p}_{j+}$, ils démontrent que :

$$\frac{3}{A(\mathbf{p}, \delta)} \left[2\pi - \sum_{j=1}^6 \omega_j(\delta) \right] := K(\mathbf{p}) + O(\delta^2), \quad (3.2)$$

quand δ tend vers 0, où $K(\mathbf{p})$ est la valeur de courbure gaussienne au point \mathbf{p} . L'auteur propose une propriété de convergence supplémentaire lorsque l'échantillonnage est perturbé par une erreur $O(\delta^\alpha)$, mais avec $\alpha \geq 3$.

Cette approche n'est pas applicable directement à des surfaces digitales car la perturbation par rapport à la surface est trop grande et correspond plus à des données aberrantes (~~UK~~ outliers) qu'à du bruit de l'échantillonnage. De plus, les contraintes topologiques expliquées précédemment (surface paramétrique, sommets de valence 6) sont déterminantes pour la convergence : si elles ne sont pas satisfaites, l'estimation de la courbure gaussienne ne converge pas.

Cycles normaux Une autre approche notable est l'estimation d'information de courbure par intégration de mesures des courbures, basée sur la théorie des cycles normaux sur un maillage triangulé [CSM03 ; CSM06]. La théorie des cycles normaux, introduite par WINTGEN [Win82] et ZÄHLE [Zäh86] est une technique qui permet de définir de manière unifiée la courbure de surfaces lisses et polyédrales. En effet, la mesure de courbure peut être obtenue par les cycles normaux de la surface. L'idée principale est assez similaire à l'approche par formule de Gauss-Bonnet vue juste avant et permet de s'affranchir de la contrainte de la valence des sommets.

Pour une surface lisse M d'un compact $V \subset \mathbb{R}^3$, les auteurs définissent la mesure de courbure gaussienne ϕ_V^K et de courbure moyenne ϕ_V^H d'un ensemble ouvert $B \subset \mathbb{R}^3$ comme :

$$\phi_V^K(B) := \int_{B \cap M} K(\mathbf{p}) d\mathbf{p}, \quad (3.3)$$

$$\phi_V^H(B) := \int_{B \cap M} H(\mathbf{p}) d\mathbf{p}, \quad (3.4)$$

avec $\mathbf{p} \in M$, où $K(\mathbf{p})$ et $H(\mathbf{p})$ sont respectivement la courbure gaussienne et moyenne du point \mathbf{p} . Ces mesures sont des mesures intégrales, c'est-à-dire qu'elles ne correspondent pas à une valeur pour un point de la surface, mais pour l'ensemble B .

Les auteurs (COHEN-STEINER *et al.*) proposent alors de calculer ces deux mesures dans le cas d'un maillage triangulé. Si V est un polyèdre dont l'ensemble des sommets est P et l'ensemble d'arêtes est E , ils proposent de calculer les mesures de courbure gaussienne et moyenne en sommant des quantités :

$$\phi_V^K(B) := \sum_{\mathbf{p} \in B \cap P} g(\mathbf{p}), \quad (3.5)$$

$$\phi_V^H(B) := \sum_{\mathbf{e} \in E} \text{longueur}(\mathbf{e} \cap B) \beta(\mathbf{e}), \quad (3.6)$$

où $g(\mathbf{p})$ correspond au **défaut d'angle** de ∂V au point \mathbf{p} , c'est-à-dire à 2π moins la somme des angles entre les arêtes incidentes consécutives à \mathbf{p} (voir à gauche de [figure 3.3](#)), et $|\beta(\mathbf{e})|$ est l'angle entre les normales des triangles de ∂V incidents au point \mathbf{p} (voir à droite de [figure 3.3](#)). Si \mathbf{e} est convexe, le signe de $\beta(\mathbf{e})$ doit être positif et négatif si \mathbf{e} est concave.

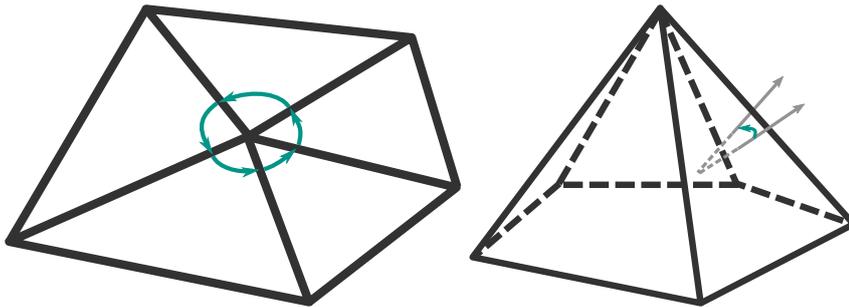


Figure 3.3 Principe de l'estimation de courbure des cycles normaux. La courbure gaussienne est calculée avec la somme des angles des arêtes incidentes au point concerné (à gauche) et la courbure gaussienne avec la somme des angles des normales des faces incidentes au point (à droite).

Enfin, ils proposent des propriétés de convergence de ces mesures de courbure sous certaines conditions. Soit \mathcal{P} un sous-ensemble fini de ∂X , T la triangulation de Delaunay de \mathcal{P} restreinte à X , et ϵ la densité de l'échantillonnage de la surface. \mathcal{P} est le ϵ -échantillonnage de ∂X si la boule $B_{\epsilon}(\mathbf{x})$ centrée au point \mathbf{x} et de rayon

$lfs(\mathbf{x})$ rencontre \mathcal{P} . Le $lfs(\mathbf{x})$ (pour [local feature size](#)) correspond à la distance entre \mathbf{x} et l'axe médian de X . Pour résumer, cela signifie que l'échantillonnage doit être plus dense sur les zones à forte courbure. Alors, lorsque ϵ est suffisamment petit¹ :

$$|\phi_T^K(B) - \tilde{\phi}_V^K(\pi(B))| \leq K\epsilon, \quad (3.7)$$

$$|\phi_T^H(B) - \tilde{\phi}_V^K(\pi(B))| \leq K\epsilon, \quad (3.8)$$

avec π la projection sur M (grâce à un ϵ suffisamment petit, π est défini sur ∂T et est un homéomorphe de ∂T vers M), et K une constante.

Les deux principaux problèmes avec cette méthode sont son inadaptabilité face à des données digitales en ce qui concerne l'échantillonnage et les contraintes sur la topologie, et le fait que la mesure se fait sur un ensemble de points et non pas ponctuellement.

Invariants par intégration Enfin, en *traitement géométrique*, des outils mathématiques ont été développés pour concevoir des estimateurs différentiels sur des surfaces lisses basées sur les invariants par intégration (POTTMANN *et al.* [Pot+07; Pot+09]). Le principe consiste à déplacer une boule le long de la surface de la forme et à calculer des intégrales sur l'intersection entre la forme et la boule. Les auteurs ont démontré que ces quantités par intégration apportent d'intéressantes informations de courbures lorsque le rayon de la boule tend vers zéro. Ils amènent également des preuves de stabilité — dans le cas d'échantillonnage de maillage par exemple — dépendant de la taille de la boule et du paramètre d'échantillonnage ϵ . Nos travaux sur les estimateurs digitaux de courbures se basant sur la même idée, nous détaillerons cette approche dans un prochain paragraphe ([paragraphe 3.3.1](#) page 45).

3.2.2 Estimation de courbure sur des nuages de points

Ajustement polynomial des jets osculateurs Lorsque nous avons des nuages de points, la façon la plus naturelle d'approcher la courbure est de faire correspondre une surface polynomiale de degré 2 ou plus à l'ensemble de points. Le meilleur représentant de ces techniques est l'estimation des quantités différentielles par ajustement polynomial des jets osculateurs ([osculating jets](#)) de CAZALS *et al.* [CP05]. Un jet est un développement de Taylor tronqué, un n -jet est un développement de Taylor tronqué à l'ordre n . L'intérêt de ces jets est qu'ils contiennent des informations sur

¹Dans leur article, COHEN-STEINER *et al.* [CSM03] fixent $\epsilon < 0.08$.

les quantités géométriques locales (tangentes / normales, courbures principales, etc.). Ainsi, le développement de Taylor d'une courbe à l'ordre n équivaut à :

$$f(x) := J_{B,n}(x) + O(x^{n+1}), \quad (3.9)$$

$$J_{B,n}(x) := B_0 + B_1x + B_2x^2 + B_3x^3 + \dots + B_nx^n. \quad (3.10)$$

Dans le cas d'une surface, nous avons :

$$f(x, y) := J_{B,n}(x, y) + O(\|(x, y)\|^{n+1}), \quad (3.11)$$

$$J_{B,n}(x, y) := \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=0}^k B_{k-j,j} x^{k-j} y^j \right), \quad (3.12)$$

où les développements tronqués de Taylor $J_{B,n}(x)$ et $J_{B,n}(x, y)$ sont les n -jets. Il est à noter que le terme de jet osculateur désigne les 2-jets. Ainsi, comme les n -jets contiennent des propriétés différentielles de la courbe / surface de l'ordre n ; cela implique que toutes les quantités différentielles de l'ordre n peuvent être calculées grâce aux n -jets. Ce qui nous intéresse ici, ce sont les informations reliées à la courbure contenues dans les jets osculateurs.

Le principe est simple : (1) collecter les N voisins du point \mathbf{p} , (2) résoudre l'ajustement polynomial, (3) collecter les quantités différentielles. Pour la première étape, dans le cas d'un maillage, cela correspond à collecter les N points voisins à \mathbf{p} en partant du 1-voisinage puis en augmentant progressivement jusqu'à atteindre N points.

Ensuite, il faut effectuer une analyse en composantes principales (ACP) de l'ensemble de points voisins afin d'estimer la normale au point \mathbf{p} . Cela nous permet de placer le point \mathbf{p} à l'origine du repère et de changer de système de coordonnées pour celui de Monge (l'axe \vec{z} est aligné avec la normale, et les axes \vec{x} et \vec{y} sont alignés avec les directions principales de courbure \mathbf{w}_1 et \mathbf{w}_2). Alors :

$$f(x, y) = \frac{1}{2}(\kappa_1 x^2 + \kappa_2 y^2) + \frac{1}{6}(b_0 x^3 + 3b_1 x^2 y + 3b_2 x y^2 + b_3 y^3) \quad (3.13)$$

$$+ \frac{1}{24}(c_0 x^4 + 4c_1 x^3 y + 6c_2 x^2 y^2 + 4c_3 x y^3 + c_4 y^4) + O(\|(x, y)\|^5). \quad (3.14)$$

où κ_1 et κ_2 sont les courbures principales, b_0 et b_3 sont les dérivées directionnelles de κ_1 et κ_2 le long de leur ligne de courbure respective, et b_1 et b_2 sont les dérivées directionnelles de κ_1 et κ_2 le long de l'autre ligne de courbure.

Enfin, en ayant recours à l'ajustement de polynômes, nous pouvons collecter les n -jets de la surface dans ce système de coordonnées. Nous calculons alors la base de Monge ($\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{n}$) afin d'en extraire les coefficients $\kappa_1, \kappa_2, b_0, b_1, b_2, b_3, c_0, c_1, c_2, c_3$ et c_4 de l'équation 3.13 page précédente.

Les auteurs proposent des résultats de convergence en $O(\delta^2)$ lorsque la donnée d'entrée est un échantillonnage de la surface, δ étant la densité de points. Cependant, lorsque les données présentent du bruit, aucun résultat théorique n'est apporté malgré le fait qu'en pratique l'approximation aux moindres carrés des jets osculateurs soit très robuste. Nous nommerons cet estimateur par la suite **JETFITTING** lors de notre analyse comparative.

Mesure de covariance des cellules de Voronoï Une autre famille de techniques exploite le diagramme de Voronoï [All+07 ; Mér+09 ; Mér+11 ; Cue+14] principalement pour estimer les normales, mais peut également extraire des informations de courbure. L'idée est qu'au lieu de faire des correspondances dans l'espace tangent à la surface, ils font l'estimation dans l'espace orthogonal. MÉRIGOT *et al.* [Mér+11] proposent alors d'associer en chaque point \mathbf{p} une *mesure de covariance des cellules de Voronoï* $\mathcal{V}_{K,R}$ ( *Voronoi Covariance Measure* ou **VCM**) pour une forme K . Cette mesure contient des informations sur la géométrie sous-jacente (voir la [figure 3.4](#)).

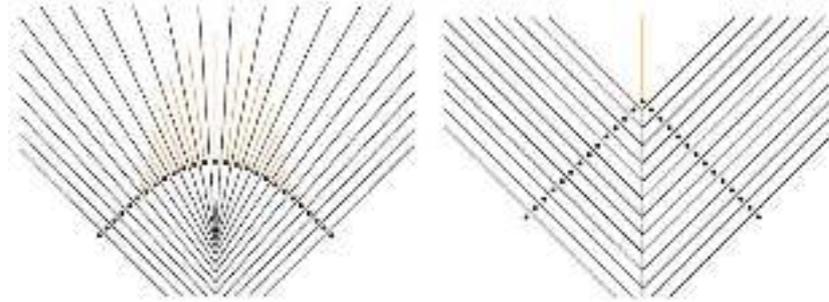


Figure 3.4 Principe de **VCM** (Figure 2 de [Mér+11]). En noir : séparation des cellules de Voronoï, en orange : les normales des points centrés dans les cellules de Voronoï.

Cela nécessite de calculer une matrice de covariance (*cov*) sur les cellules de Voronoï (Vor_K) des points \mathbf{p} du bord de l'objet :

$$cov(K, \mathbf{p}) := \int_K (\mathbf{x} - \mathbf{p})(\mathbf{x} - \mathbf{p})^T d\mathbf{x}. \quad (3.15)$$

Afin d'avoir une information locale de la variation de la forme, les auteurs se limitent à un voisinage de rayon R (voir la [figure 3.5](#) page ci-contre) :

$$\mathcal{V}_{K,R}(\{\mathbf{p}\}) := cov(Vor_K(\mathbf{p}) \cap B_R(\mathbf{p}), \mathbf{p}). \quad (3.16)$$

Et, afin d'être plus résistant au bruit de Hausdorff, ils utilisent une version convoluée de **VCM** grâce à une fonction indicatrice χ_r (ayant pour paramètre un rayon r) :

$$\mathcal{V}_{K,R} * \chi_r(\{\mathbf{p}\}) := \int_{K^R} (\mathbf{x} - \pi^K(\mathbf{x}))(\mathbf{x} - \pi^K(\mathbf{x}))^T \chi(\pi^K(\mathbf{x}) - \mathbf{p}) d\mathbf{x}. \quad (3.17)$$

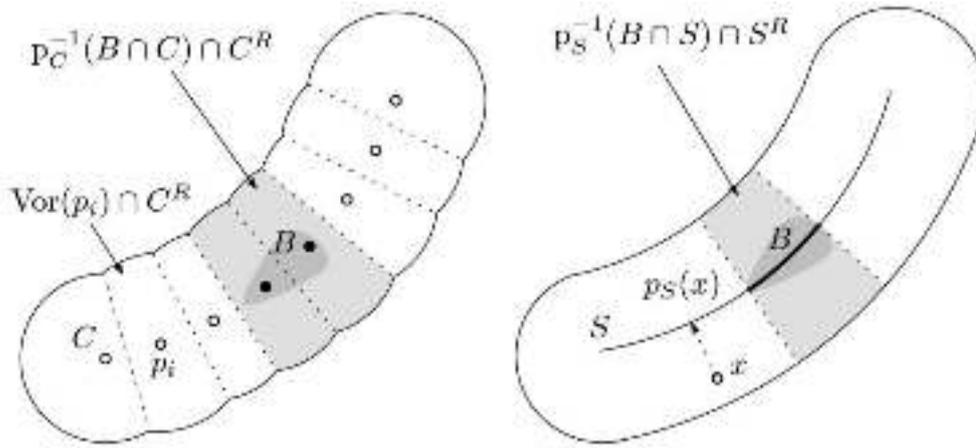


Figure 3.5 Notations de **VCM** (Figure 5 de [Mér+11]). La figure de gauche est sur un nuage de points tandis que celle de droite est sur une forme continue.

où $\pi^K(\mathbf{x})$ est la projection de tout point \mathbf{x} vers le point le plus proche de K . χ_r peut être une fonction « Ball » ($\chi_r(\mathbf{p}) = 1$ si \mathbf{x} appartient à $B_r(\mathbf{0})$, 0 sinon) ou encore une fonction « Hat » ($\chi_r(\mathbf{p}) = \max(0, r - \|\mathbf{p}\|^2)$). D'autres choix sont bien évidemment possibles. Alors, si \mathbf{p} est un point lisse de K , les valeurs propres de $\mathcal{V}_{K,R} * \chi_r$ sont proportionnelles à (respectivement) : 1, $\kappa_1^2(\mathbf{p}) \frac{r^2}{4}$ et $\kappa_2^2(\mathbf{p}) \frac{r^2}{4}$.

La mesure de covariance convoluée est particulièrement intéressante car cette mesure est robuste même pour des ensembles compacts arbitraires, en $O(\sqrt{\epsilon})$, car c'est la mesure intégrale de la matrice de covariance du cône de normale autour du point d'intérêt. Néanmoins, la convergence des courbures est dépendante de plusieurs paramètres r et R qui contribuent de manière contradictoire avec l'erreur de Hausdorff. En pratique, cette approche donne des résultats comparables à **JETFITTING** pour les courbures.

À noter que **CUEL et al.** [Cue+14] ont défini une variante digitale du **VCM** ($Z \in \mathbb{Z}^3$) :

$$\hat{\mathcal{V}}_{Z,h,R} * \chi_r(\{\mathbf{p}\}) := \sum_{\mathbf{x} \in \Omega_h^R} h^3 (\mathbf{x} - \pi^Z(\mathbf{x})) (\mathbf{x} - \pi^Z(\mathbf{x}))^t \chi(\pi^Z(\mathbf{x})), \quad (3.18)$$

où Ω_h^R est l'ensemble des (centres de) voxels entièrement contenus dans Z^R (la R -dilatation de Z) au pas de discrétisation h . La convergence asymptotique de cette variante digitale de l'estimateur **VCM** pour les normales a été prouvée (bord de la surface de classe C^2 et de reach $\rho > 0$) [Cue+14].

Accumulateur sphérique Récemment, plusieurs auteurs ont développés de nouvelles approches intéressantes pour estimer les champs de normales sur des nuages de points bruités, même en présence de singularités [Li+10; BM12; Zha+13]. Cela

nécessite de mettre en place un accumulateur auquel les données vont contribuer. La transformée de Hough [Hou62] est traditionnellement employée, pour détecter des formes paramétriques simples comme des lignes ou des arcs de cercle [DH72]. Cependant, elle peut être étendue en dimension 3 : l'accumulateur n'est plus une image, mais un objet 3D. BOULCH *et al.* [BM12] utilisent une boule accumulatrice (voir la figure 3.6) de M réceptacles (bins).

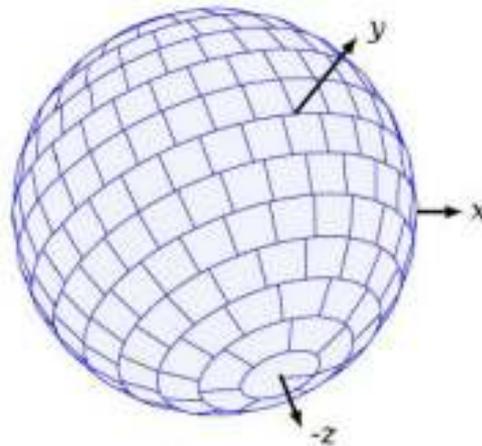


Figure 3.6 Boule accumulatrice (Figure 3 de [Bor+11]).

Alors, les auteurs découpent le nuage de points en ensemble de plans (définis par trois points) et normales. Si le plan est loin d'un coin ou d'une singularité, alors la normale est correcte. Cependant, si ce plan est près d'un coin, la normale est perturbée par cette singularité (voir la figure 3.7 à gauche).

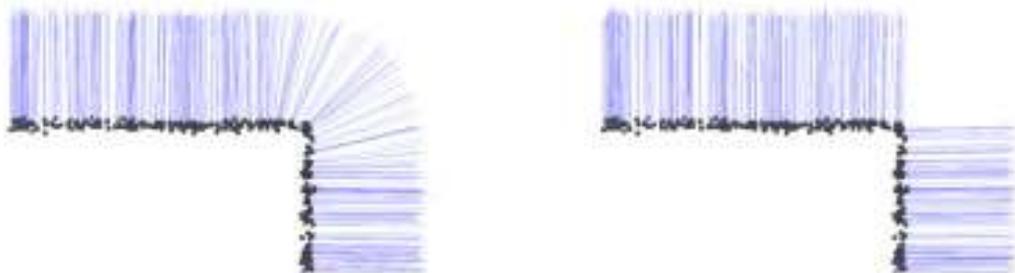


Figure 3.7 Erreur de reconstruction de normales et correction (Figure 1 de [BM12]).

Les normales sont accumulés dans la boule accumulatrice, permettant à chaque plan de contribuer à un vote. Ils utilisent également la transformée aléatoire de Hough. La différence avec la transformée de Hough traditionnelle est qu'un point ne vote pas pour toutes les primitives auxquels il appartient. Le vote est associé à une primitive calculée à partir d'un sous-ensemble de points [Xu+90; XO93] dont le nombre est défini par l'utilisateur comme condition globale. Enfin, les normales

sont redistribuées aux plans en fonction des bins les plus votés, en moyennant les normales dans ces bins (voir la [figure 3.7 page précédente](#) à droite).

Cette méthode possède cependant des inconvénients : nous obtenons un effet de regroupement par bin des résultats, de segmentation des données. Cet effet est surtout visible avec des données bruitées. Ensuite, les bins utilisés sont anisotropes. Les auteurs rectifient cela en proposant de calculer l'algorithme plusieurs fois en tournant aléatoirement la boule accumulatrice pour limiter cet effet. Expérimentalement, ils avancent que cet effet est estompé au bout de 5 rotations.

BOULCH *et al.* apportent des résultats de convergence probabilistes. Cependant, ces méthodes ne peuvent pas être utilisées directement pour le calcul de courbure, mais en parallèle de techniques d'estimation de courbure pour détecter les singularités sur la surface dans un premier temps afin de limiter l'estimation de la courbure uniquement aux zones lisses.

Théorie des varifolds Enfin, une approche très récente venant de la théorie de la mesure géométrique utilise la théorie des [Varifolds](#) [Alm65] pour concevoir une estimation robuste de la courbure moyenne [Bue14; Bue+15]. Cette théorie est suffisamment générique pour fonctionner sur des variétés lisses, des maillages discrets, des nuages de points ainsi que sur des données digitales. Afin de mener à bien l'estimation géométrique, cette approche nécessite d'avoir une position et une approximation des normales. Si les deux prérequis convergent, alors la première variation régularisée de la mesure de Varifold converge vers la courbure moyenne. La vitesse de convergence de cette approche ainsi que sa précision en pratique restent à explorer.

3.2.3 Estimation de courbure sur des surfaces digitales

Comme vu dans le [chapitre 2 page 5](#), en géométrie digitale nous considérons la convergence asymptotique comme un critère essentiel pour un estimateur [KŽ00]. Lorsque la forme est discrétisée sur une grille avec une résolution h tendant vers zéro, la quantité estimée devrait converger vers la valeur attendue.

COEURJOLLY *et al.* [Coe+12] ont proposé un état de l'art complet pour l'estimation de tangentes et de la courbure en dimension 2. Nous allons détailler les méthodes les plus représentatives.

Reconnaissance d'objets digitaux Nous allons nous intéresser dans un premier temps aux méthodes reconnaissant des objets digitaux sur le bord de l'objet, afin d'en extraire des informations différentielles.

Segments digitaux maximaux. COEURJOLLY *et al.* [Coe+01] ont montré une façon simple d'estimer la courbure à la surface d'un objet digital à l'aide des segments maximaux. Cette méthode, que nous appellerons **MDSS** par la suite, propose de calculer la longueur des segments maximaux du bord ∂Z de $Z \subset \mathbb{Z}^2$. En effet, il existe une relation entre la corde d'un cercle et le rayon de ce cercle (voir [figure 3.8](#)).

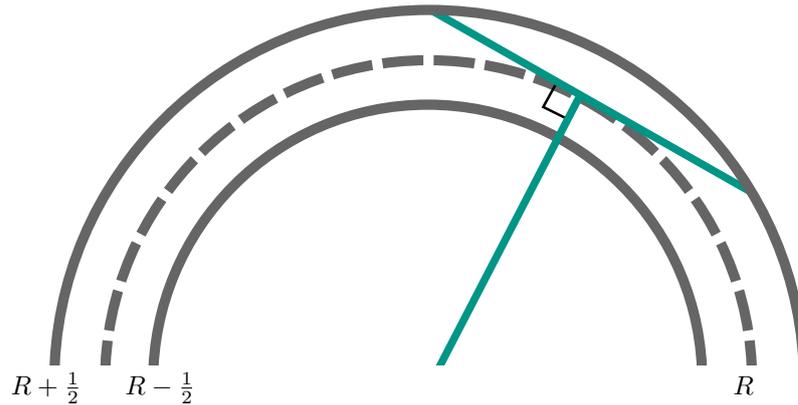


Figure 3.8 Illustration d'un cercle d'épaisseur 1 et de la corde de ce cercle (Figure 3 de [Coe+01]).

L'idée ici est de considérer le segment maximal comme une corde à une distance h (la taille de la grille) du cercle osculateur de la surface. Alors, si l est la longueur du MDSS au point $\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^2$, nous avons :

$$\frac{1}{\kappa(\mathbf{p}, Z)} = \frac{(l \cdot l)}{8} + \frac{1}{2}. \quad (3.19)$$

Une version plus robuste est proposée en ajoutant l'épaisseur du MDSS w :

$$\frac{1}{\kappa(\mathbf{p}, Z)} = \frac{(l \cdot l)}{8 \cdot w} + \frac{w}{2}. \quad (3.20)$$

Cependant, aucune preuve de convergence n'est apportée pour cet estimateur.

Analyse des arcs de cercle digitaux maximaux. ROUSSILLON *et al.* [RL11] proposent non plus d'étudier les segments maximaux digitaux, mais de reconnaître des arcs de cercle maximaux digitaux (**MDCA**, voir [définition 2.12 page 27](#) pour la définition formelle). La courbure d'une courbe étant définie comme l'inverse du rayon du cercle osculateur, il paraît logique de s'intéresser à reconnaître des arcs de cercle digitaux sur la forme digitale.

Le principe de l'estimateur est simple : pour une forme $X \subset \mathbb{R}^2$ avec un champ de courbure continu, ils calculent les $(A_i)_{i \in 1, n}$ **MDCA** (n étant le nombre total de

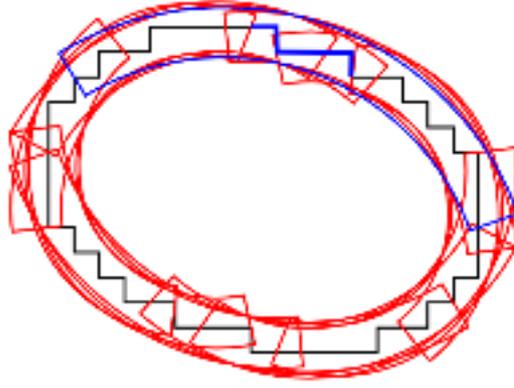


Figure 3.9 Illustration des arcs de cercle digitaux maximaux sur une ellipse discrétisée (Figure 1 de [RL11]).

MDCA) du bord digital $Bd(Z)$ avec $Z = G_h(X)$. Ils calculent également les $(V_i)_{i \in 1, n}$, une partition du bord digital permettant de faire correspondre tous les surfels vers le **MDCA** dont le centre est le plus proche du surfel. Chaque surfel est alors relié à son **MDCA** le plus représentatif (voir figure 3.9, les surfels bleus sont reliés au **MDCA** bleu). Alors :

$$\forall i \in 1, \dots, n, \quad \forall \mathbf{e} \in V_i, \quad \forall \mathbf{p} \in \mathbf{e}, \quad \hat{\kappa}_{MDCA}(Z, \mathbf{p}, h) := \kappa(A_i, h). \quad (3.21)$$

Les auteurs ont prouvé la convergence asymptotique en $O(h^{\min(1-2a, b)})$ de cet estimateur sur des formes convexes de \mathbb{R}^2 dont le champ de courbure est continu, strictement positif et borné supérieurement, si $0 < b \leq a < \frac{1}{2}$ correspondent aux bornes inférieures et supérieures des longueurs des **MDCA** (respectivement $\Omega(h^a)$ et $O(h^b)$). Cette dernière hypothèse n'est pas prouvée à ce jour.

Le principal avantage de ces deux méthodes est qu'elles ne nécessitent aucun paramètre. Cependant, ces méthodes de reconnaissance d'objets sont assez sensibles lorsque les données sont bruitées. C'est ce que nous verrons dans la section comparative (paragraphe 3.5 page 85).

Convolutions binomiales MALGOUYRES *et al.* [Mal+08] ont proposé une méthode pour estimer les dérivées sur le principe de convolutions binomiales (nous la nommerons **BC** par la suite). Ils définissent un opérateur Ψ_K qui modifie la fonction

$F : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ par la convolution avec un noyau $K : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$. Par exemple, l'opérateur de différence finie arrière est $\Psi_\delta F$ où le noyau δ est défini comme :

$$\delta(a) = \begin{cases} 1 & \text{si } a = 0, \\ -1 & \text{si } a = 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.22)$$

Les auteurs donnent également un noyau de lissage défini (pour $n \in \mathbb{N}$) par :

$$H_n(a) = \begin{cases} \binom{n}{a + \frac{n}{2}} & \text{si } n \text{ est pair et } a \in \{-\frac{n}{2}, \dots, \frac{n}{2}\}, \\ \binom{n}{a + \frac{n+1}{2}} & \text{si } n \text{ est impair et } a \in \{-\frac{n+1}{2}, \dots, \frac{n-1}{2}\}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.23)$$

Alors, le noyau de dérivées D_n est défini par :

$$D_n := \delta * H_n, \quad (3.24)$$

où $*$ est le produit de convolution. L'estimateur de dérivé pour une fonction discrète F est :

$$\frac{1}{2^n} \Psi_{D_n} F. \quad (3.25)$$

Les auteurs proposent également des dérivées d'ordre supérieur avec une expression similaire :

$$D_n^2 = \delta * \delta * D_n \quad (3.26)$$

$$D_n^k = \underbrace{\delta * \dots * \delta}_{k \text{ fois}} * D_n. \quad (3.27)$$

La courbure est alors estimée de la sorte :

$$\hat{\kappa}_{BC}^n(\mathbf{p}) := \frac{D_n^2(\mathbf{p}_1) * D_n(\mathbf{p}_2) - D_n^2(\mathbf{p}_2) * D_n(\mathbf{p}_1)}{(D_n(\mathbf{p}_1)^2 + D_n(\mathbf{p}_2)^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (3.28)$$

Dans le cas où $n = \lfloor h^{2(\alpha-3)/3} \rfloor$ et $\alpha \in]0, 1]$ est un paramètre associé au niveau de bruit (plus α est proche de 0, plus l'estimateur sera robuste au bruit), *ESBELIN et al.* [Esb+11] annoncent une convergence asymptotique en $O(h^{(\frac{2}{3})^k})$ des dérivées du k -ième ordre pour des formes C^3 (donc en $O(h^{4/9})$ pour les dérivées du second ordre). Nous verrons dans la partie comparative que nous n'observons expérimentalement pas la même vitesse de convergence ([paragraphe 3.5 page 85](#)).

Correspondance de surface polynomiale PROVOT *et al.* [PG11] proposent quant à eux de s'intéresser aux $\text{Digital Level Layer}$ (DLL) pour estimer les dérivées d'une fonction digitale à l'aide de la programmation linéaire ou avec des outils de la *géométrie algorithmique*. Cette approche permet d'approcher les k dérivées de $f^{(k)}(\mathbf{x})$. Ainsi, à l'instar de JETFITTING, ils proposent une nouvelle méthode basée sur les polynômes de Taylor. Le principe de cette méthode est de faire ajuster un polynôme sur les valeurs de la fonction digitale. Ils étendent alors les valeurs de la fonction $F(\mathbf{x})$ dans l'intervalle $[F(\mathbf{x}) - R; F(\mathbf{x}) + R]$. Il suffit alors de trouver un polynôme $P(\mathbf{x})$ respectant :

$$F(\mathbf{x}) - R \leq P(\mathbf{x}) \leq F(\mathbf{x}) + R, \quad (3.29)$$

dans le voisinage de \mathbf{x}_0 , où $P(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^k a_i X^i$, a_i étant les coefficients entiers du polynôme $P(\mathbf{x})$. Ils introduisent alors la notion de rugosité (*roughness*) de la fonction, c'est-à-dire le R minimum nécessaire pour trouver un polynôme s'ajustant sur les données de la fonction F avec une erreur inférieure à R (voir la figure 3.10).

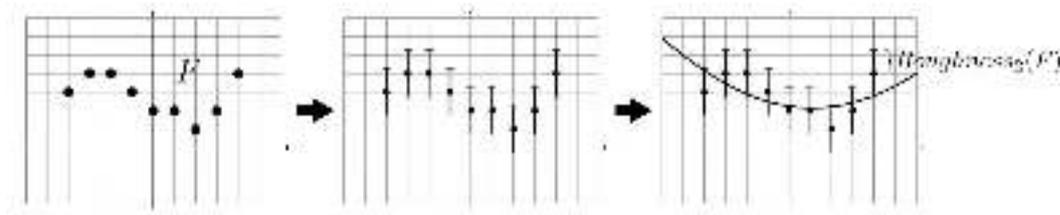


Figure 3.10 De gauche à droite : Fonction F , F étendu avec un intervalle le plus petit possible pour lequel il existe un polynôme de degré 2 ou plus qui passe au travers de chaque point étendu (Figure 1 de [PG11]).

Ils montrent que nous pouvons calculer la rugosité comme l'épaisseur verticale (*vertical thickness*) d'un ensemble $S = \{((\mathbf{x}^i)_{1 \leq i \leq k} F(\mathbf{x})) \text{ pour } \mathbf{x} \in X\}$ de dimension $k + 1$ (voir la figure 3.11 page suivante). Ils utilisent alors l'algorithme de détection de collision Gilbert-Johnson-Keerthi (GJK) [Gil+88] pour calculer rapidement l'épaisseur verticale de l'ensemble S (l'épaisseur de la séparation entre deux hyperplans).

Enfin, ils définissent la k -ième dérivée de F à l'origine comme :

$$F^{(k)}(\mathbf{0}) := k!a_k, \quad (3.30)$$

si $P(\mathbf{x})$ respecte les contraintes de rugosité de ses bornes.

Ils obtiennent alors une preuve de convergence en $O(h^{\frac{1}{k+1}})$ sur l'estimation des dérivées du k -ième ordre pour une fonction réelle $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^{k+1} où les dérivées d'ordre $k + 1$ sont bornées dans le voisinage du point \mathbf{x} . L'inconvénient de cette méthode est qu'elle dépend énormément du paramètre de rugosité maxi-

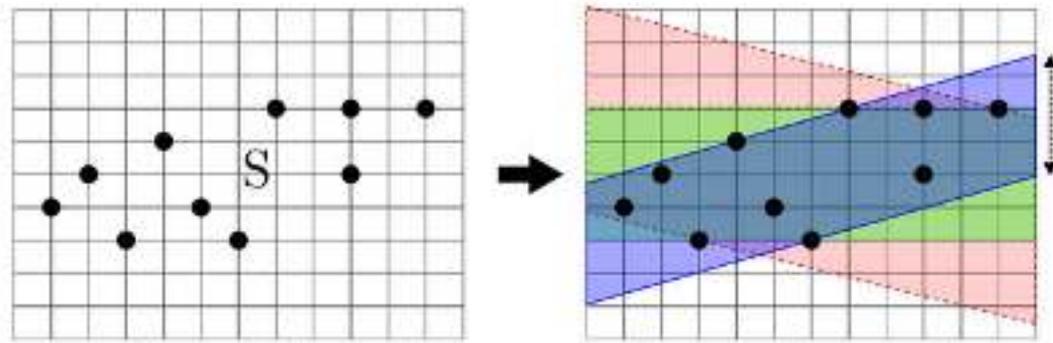


Figure 3.11 Illustration de la notion d'épaisseur du DLL. Les trois bandes s'ajustent sur les points de S (en prenant en compte une direction \vec{d} , vertical dans le cas présent). La bande bleue possède alors l'épaisseur minimale de toutes les bandes (Figure 10 de [Pro+14]).

male. De plus, cette approche n'est applicable qu'à des fonctions discrètes, et pas directement à des bords d'objets discrets.

Tableau récapitulatif de convergence d'estimateurs digitaux de courbure

Table 3.1 Convergence asymptotique connue d'estimateurs de courbure sur des données digitales.

Estimateur	Famille de formes	Vitesse de convergence		Référence
		Borne sup.	Observée	
$\hat{\kappa}^{MDCA}$	\mathbb{X}^{1-SC}	?	$O(h^{\frac{1}{3}})$	[RL11]
$\hat{\kappa}^{BC}$	\mathbb{X}^{3-SC}	$O(h^{\frac{4}{9}})$	$\approx O(h^{0.154})$	[Mal+08]
$\hat{\kappa}^{MDSS}$	\mathbb{X}^{1-SC}	?	✗	[Coe+01]
$\hat{\kappa}^{II}$	\mathbb{X}^{3-SC} avec $R = kh^{\frac{1}{3}}$	$O(h^{\frac{1}{3}})$	$O(h^{\frac{1}{3}})$	ici
$\hat{\kappa}^{*II}$	\mathbb{X}^{3-SC}	$O\left(h^{\frac{1}{3}} \log^2\left(\frac{1}{3}\right)\right)$	$O(h^{\frac{1}{3}})$	ici
\hat{H}^{II}	\mathbb{X}^{3-SC} avec $R = kh^{\frac{1}{3}}$	$O(h^{\frac{1}{3}})$	$O(h^{\frac{1}{3}})$	ici
\hat{H}^{*II}	\mathbb{X}^{3-SC}	?	$O(h^{\frac{1}{3}})$	ici
$\hat{\kappa}_i^{II}$	\mathbb{X}^{3-SC} avec $R = kh^{\frac{1}{3}}$	$O(h^{\frac{1}{3}})$	$O(h^{\frac{1}{3}})$	ici
$\hat{\kappa}_i^{*II}$	\mathbb{X}^{3-SC}	?	$O(h^{\frac{1}{3}})$	ici

Ainsi, nous avons quelques estimateurs qui convergent asymptotiquement en dimension 2 (voir [tableau 3.1](#)), mais qui peuvent être sensibles au bruit de la forme ou dont la preuve de convergence repose sur les paramètres choisis. De plus pour l'estimation de courbure le long de courbes 2D, la convergence asymptotique d'estimateurs ne nécessitant aucun paramètre représente toujours un défi (des résultats de convergence d'estimateurs sans paramètre ont été obtenus pour l'estimation de longueur [CK04] et des normales [DV+07]). Nous allons en proposer dans ce chapitre. Enfin, il n'existe aucun estimateur de courbure en dimension 3 dont la convergence asymptotique soit établie théoriquement [Len97; FM08]. Nous allons proposer

un nouvel estimateur de courbure 3D dans ce chapitre et établir des résultats de convergence asymptotique.

3.3 Estimation de courbure par intégration volumique locale d'une boule

Nous allons désormais nous intéresser aux travaux réalisés au cours de cette thèse. Nous allons dans un premier temps décrire l'estimation de quantités différentielles que proposent POTTMANN *et al.* [Pot+07 ; Pot+09], dans le [paragraphe 3.3.1](#). Nous allons ensuite proposer une version digitale de ces estimateurs dans les [paragraphes 3.3.2 page 50](#) et [3.3.3 page 59](#) en dimension 2 et 3. La principale contribution de ces travaux est de démontrer la convergence asymptotique de ces estimateurs sur des données digitales. Ces travaux ont été publiés dans [Coe+13b ; Coe+14].

En *traitement géométrique*, le calcul d'invariants par intégration a été largement étudié dans le but de définir des estimateurs de quantités différentielles. POTTMANN *et al.* [Pot+07 ; Pot+09] en ont d'ailleurs fait un panorama assez complet. L'idée principale de cette approche est de déplacer un support sur les points \mathbf{x} du bord ∂X d'une forme X et de calculer l'intégrale de l'intersection entre X et ce support. Différents supports peuvent être considérés (sphère euclidienne, boule euclidienne, etc.) ainsi que différentes fonctions d'intégration (linéaire, gaussienne, etc.). Nous n'utiliserons par la suite que les invariants volumiques par intégration définis de la sorte :

Définition 3.1 *Pour une forme $X \in \mathbb{X}$ et un rayon $R \in \mathbb{R}^{+*}$, l'intégrale volumique $V_R(\mathbf{x})$ au point $\mathbf{x} \in \partial X$ est donné par :*

$$V_R(\mathbf{x}) := \int_{B_R(\mathbf{x})} \chi(\mathbf{p}) d\mathbf{p}, \quad (3.31)$$

où $B_R(\mathbf{x})$ est une boule euclidienne de rayon R et de centre \mathbf{x} , et $\chi(\cdot)$ est la fonction caractéristique de X (valant 1 pour tous les points de X , 0 sinon). En dimension 2, nous noterons cette quantité $A_R(\mathbf{x})$.

3.3.1 Analyse euclidienne de l'intégration volumique de la boule et relation à la courbure

La relation entre $A_R(\mathbf{x})$ et la courbure (resp. $V_R(\mathbf{x})$ et la courbure moyenne) au point \mathbf{x} pour des formes de \mathbb{R}^2 (respectivement \mathbb{R}^3) a été étudiée de nombreuses fois dans la littérature [Bul+95 ; Pot+07 ; Pot+09]. Nous pouvons la formaliser ainsi :

Lemme 3.1 [Pot+09]

Pour une forme suffisamment lisse X de \mathbb{R}^2 , $\mathbf{x} \in \partial X$, nous avons :

$$A_R(\mathbf{x}) = \frac{\pi}{2}R^2 - \frac{\kappa(X, \mathbf{x})}{3}R^3 + O(R^4). \quad (3.32)$$

où $\kappa(X, \mathbf{x})$ est la courbure de ∂X au point \mathbf{x} .

Pour une forme suffisamment lisse X de \mathbb{R}^3 , $\mathbf{x} \in \partial X$, nous avons :

$$V_R(\mathbf{x}) = \frac{2\pi}{3}R^3 - \frac{\pi H(X, \mathbf{x})}{4}R^4 + O(R^5). \quad (3.33)$$

où $H(X, \mathbf{x})$ est la courbure moyenne de ∂X au point \mathbf{x} .

De tels résultats sont obtenus par approximation de Taylor au point \mathbf{x} de la surface ∂X , approchée sous la forme de la fonction paramétrique $z = f(x, y)$ ($y = f(x)$ en 2D). Alors, des équations 3.32 et 3.33 avec un rayon R fixé, nous pouvons définir les estimateurs locaux de courbure en 2D, $\tilde{\kappa}^R(\mathbf{x})$, et de courbure moyenne en 3D, $\tilde{H}^R(\mathbf{x})$:

Définition 3.2 (Estimateurs de courbure en 2D $\tilde{\kappa}^R(X, \mathbf{x})$ et de courbure moyenne en 3D $\tilde{H}^R(X, \mathbf{x})$ [Pot+07]). Pour une forme $X \subset \mathbb{R}^2$, l'estimateur de courbure en 2D $\tilde{\kappa}^R$ au point $\mathbf{x} \in \partial X$ est défini par :

$$\tilde{\kappa}^R(X, \mathbf{x}) := \frac{3\pi}{2R} - \frac{3A_R(\mathbf{x})}{R^3}. \quad (3.34)$$

Pour une forme $X \subset \mathbb{R}^3$, l'estimateur de courbure moyenne en 3D \tilde{H}^R au point $\mathbf{x} \in \partial X$ est défini par :

$$\tilde{H}^R(X, \mathbf{x}) := \frac{8}{3R} - \frac{4V_R(\mathbf{x})}{\pi R^4}. \quad (3.35)$$

De plus, lorsque le rayon R de la boule tend vers zéro, les valeurs de ces deux estimateurs vont converger vers celles attendues. Plus formellement, POTTMANN *et al.* [Pot+07] (et les travaux précédents) ont démontré la convergence des estimateurs de courbure en 2D et de courbure moyenne en 3D :

Théorème 3.1 (Convergence des estimateurs de courbure en 2D $\tilde{\kappa}^R(X, \mathbf{x})$ et de courbure moyenne en 3D $\tilde{H}^R(X, \mathbf{x})$ [Pot+07]).

$$\tilde{\kappa}^R(X, \mathbf{x}) = \kappa(X, \mathbf{x}) + O(R), \quad \tilde{H}^R(X, \mathbf{x}) = H(X, \mathbf{x}) + O(R). \quad (3.36)$$

De la même manière, des informations directionnelles comme les courbures principales (et donc la courbure gaussienne) peuvent être extraites du calcul par intégration. En effet, à la place de calculer la mesure de $B_R(\mathbf{x})$ dans la [définition 3.2 page ci-contre](#), nous allons calculer sa matrice de covariance :

Définition 3.3 Pour un ensemble non vide $Y \subset \mathbb{R}^d$, la matrice de covariance de Y est définie par :

$$\mathcal{V}(Y) := \int_Y (\mathbf{p} - \bar{Y})(\mathbf{p} - \bar{Y})^T d\mathbf{p} = \int_Y \mathbf{p}\mathbf{p}^T d\mathbf{p} - \text{Vol}(Y)\bar{Y}\bar{Y}^T, \quad (3.37)$$

où \bar{Y} est le barycentre de Y et $\text{Vol}(Y)$ son volume.

Pour les entiers $p, q, s \geq 0$, nous pouvons écrire la définition des pqs -moments $m^{pqs}(Y)$ de Y (x_i est la i -ème composante de \mathbf{x}) :

$$m^{pqs}(Y) := \iiint_Y x_1^p x_2^q x_3^s dx_1 dx_2 dx_3. \quad (3.38)$$

Il apparaît alors clairement que le volume $\text{Vol}(Y)$ est le 0-moment $m^{000}(Y)$, et que le barycentre \bar{Y} est donné par les 1-moments normalisés par le 0-moment, c'est à dire :

$$\bar{Y} := \frac{(m^{100}(Y), m^{010}(Y), m^{001}(Y))^T}{m^{000}(Y)} \quad (3.39)$$

Nous allons maintenant définir les ordres de grandeur des moments. Ces résultats nous seront utiles par la suite.

Lemme 3.2 Soit $B_R(\mathbf{y})$ une boule de rayon R et de centre \mathbf{y} . Alors, pour un ensemble non vide $Y \subset B_R(\mathbf{y})$, nous avons :

$$m^{000}(Y) = O(R^3), \quad (3.40)$$

$$m^{100}(Y) = O(R^3(\|\mathbf{y}\|_\infty + R)), \quad (3.41)$$

$$m^{200}(Y) = O(R^3(\|\mathbf{y}\|_\infty^2 + R\|\mathbf{y}\|_\infty + R^2)), \quad (3.42)$$

$$m^{100}(Y)/m^{000}(Y) = O(\|\mathbf{y}\|_\infty + R), \quad (3.43)$$

Les autres moments du même ordre ont respectivement les mêmes bornes.

Démonstration. Moment d'ordre zéro. L'équation 3.40 peut être facilement démontrée puisque le moment d'ordre zéro est le volume de Y , de ce fait ne peut pas dépasser le volume de la boule qui est $\frac{4}{3}\pi R^3$.

Moments du premier ordre. Nous changeons les variables de $(x'_1, x'_2, x'_3) = (x_1, x_2, x_3) - \mathbf{y}$ dans l'expression suivante :

$$m^{100}(Y) = \iiint_Y x_1 dx_1 dx_2 dx_3 = \iiint_{Y-\mathbf{y}} (x'_1 + y_1) dx'_1 dx'_2 dx'_3 \quad (3.44)$$

$$= y_1 \text{Vol}(Y) + m^{100}(Y - \mathbf{y}). \quad (3.45)$$

$(Y - \mathbf{y})$ correspond au translaté de Y de centre \mathbf{y} en $(0, 0, 0)$. Dans le premier terme, $\text{Vol}(Y)$ est borné par le volume de la boule de rayon R . Avec la propriété d'additivité des intégrales, le second terme est maximisé par le 100-moment de la demi-boule $B_R^+(0)$ centrée en 0 à valeur de x_1 positives. Alors, en utilisant les coordonnées sphériques, nous obtenons :

$$m^{100}(B_R^+(0)) = \int_0^R \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\rho \cos \phi \cos \theta) (\rho^2 \cos \phi) d\theta d\phi d\rho \quad (3.46)$$

$$= \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_0^R [\sin \theta]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} [\phi + \sin(\phi) \cos(\phi)]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \quad (3.47)$$

$$= \frac{\pi}{4} R^4, \quad (3.48)$$

Les autres équations sont prouvées de la même façon. \square

Pour plus de simplicité dans les formules, nous noterons A l'ensemble euclidien $B_R(\mathbf{x}) \cap X$. La matrice de covariance $\mathcal{V}(A)$ de A peut alors être réécrite comme :

$$\mathcal{V}(A) = \begin{bmatrix} m^{200}(A) & m^{110}(A) & m^{101}(A) \\ m^{110}(A) & m^{020}(A) & m^{011}(A) \\ m^{101}(A) & m^{011}(A) & m^{002}(A) \end{bmatrix} - \frac{1}{m^{000}(A)} \begin{bmatrix} m^{100}(A) \\ m^{010}(A) \\ m^{001}(A) \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} m^{100}(A) \\ m^{010}(A) \\ m^{001}(A) \end{bmatrix}^T. \quad (3.49)$$

où \otimes désigne le produit de tensoriel dans l'espace des vecteurs. POTTMANN *et al.* [Pot+07] ont démontré que les valeurs propres et les vecteurs propres de $\mathcal{V}(A)$ fournissaient des informations sur les courbures principales et directions principales de courbure :

Lemme 3.3 ([Pot+07], Théorème 2) Pour une forme $X \in \mathbb{X}$ suffisamment lisse, les valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ de $\mathcal{V}(A)$, où $A := B_R(\mathbf{x}) \cap X$ et $\mathbf{x} \in \partial X$, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$, nous avons l'approximation de Taylor suivante :

$$\lambda_1 = \frac{2\pi}{15}R^5 - \frac{\pi}{48}(3\kappa_1(X, \mathbf{x}) + \kappa_2(X, \mathbf{x}))R^6 + O(R^7), \quad (3.50)$$

$$\lambda_2 = \frac{2\pi}{15}R^5 - \frac{\pi}{48}(\kappa_1(X, \mathbf{x}) + 3\kappa_2(X, \mathbf{x}))R^6 + O(R^7), \quad (3.51)$$

$$\lambda_3 = \frac{19\pi}{480}R^5 - \frac{9\pi}{512}(\kappa_1(X, \mathbf{x}) + \kappa_2(X, \mathbf{x}))R^6 + O(R^7), \quad (3.52)$$

où $\kappa_1(X, \mathbf{x})$ et $\kappa_2(X, \mathbf{x})$ désignent les courbures principales de ∂X au point \mathbf{x} .²

De même qu'avec l'équation 3.2 page 46, nous pouvons définir les estimateurs locaux de courbures principales $\tilde{\kappa}_1^R$ et $\tilde{\kappa}_2^R$ et de courbure gaussienne \tilde{K}^R comme des fonctions de $\{\lambda_i\}_{1,2,3}$ et de R :

$$\tilde{\kappa}_1^R(X, \mathbf{x}) := \frac{6}{\pi R^6}(\lambda_2 - 3\lambda_1) + \frac{8}{5R}, \quad (3.53)$$

$$\tilde{\kappa}_2^R(X, \mathbf{x}) := \frac{6}{\pi R^6}(\lambda_1 - 3\lambda_2) + \frac{8}{5R}, \quad (3.54)$$

$$\tilde{K}^R(X, \mathbf{x}) := \tilde{\kappa}_1^R \cdot \tilde{\kappa}_2^R. \quad (3.55)$$

D'après le lemme 3.3 page précédente, tous ces estimateurs approchent la quantité attendue lorsque le rayon R tend vers 0 :

$$\tilde{\kappa}_1^R(X, \mathbf{x}) = \kappa_1(X, \mathbf{x}) + O(R), \quad (3.56)$$

$$\tilde{\kappa}_2^R(X, \mathbf{x}) = \kappa_2(X, \mathbf{x}) + O(R), \quad (3.57)$$

$$\tilde{K}^R(X, \mathbf{x}) = K(X, \mathbf{x}) + O(R^2)(+O(R)). \quad (3.58)$$

Il est important à noter que pour la courbure gaussienne, la constante derrière le terme le grand « O » de $O(R)$ est dépendant de la courbure moyenne $H(X, \mathbf{x})$.

Lorsque nous nous intéressons à des formes digitales $G_h(X)$ (voir paragraphe 2.5 page 16), l'implémentation de ces estimateurs devient directe (voir figure 3.12 page suivante) : choisir un rayon R , centrer une boule euclidienne (ou digitale) sur des points de $\partial[G_h(X)]_h$ (c'est-à-dire des éléments de la surface digitale), calculer la quantité par dénombrement de points digitaux (aire, volume ou matrice de covariance) et enfin estimer l'information de courbure $\tilde{\kappa}^R$, \tilde{H}^R , $\tilde{\kappa}_1^R$ ou $\tilde{\kappa}_2^R$.

Cependant, quelques problèmes surviennent avec cette approche : comment bien estimer l'aire, le volume ou la matrice de covariance sur des formes digitales ? Pouvons nous apporter des preuves de convergence de ces estimateurs sur des

²Il y a une erreur typographique dans l'expression de λ_1 dans [Pot+07], corrigée ici.

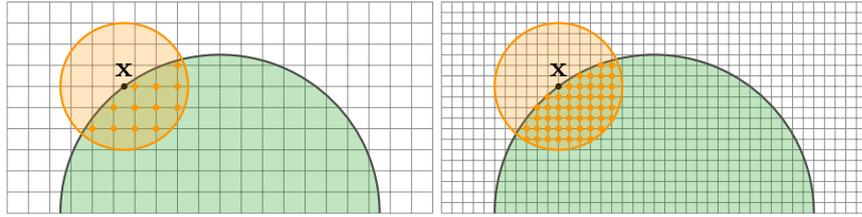


Figure 3.12 Illustration de l'estimateur digital de courbure en dimension 2 par intégration $\hat{\kappa}^R$ avec deux pas de discrétisation $h = 1$ et $h = 0.5$ sur un disque de rayon 7.5. La sphère orange a un rayon valant 3. Sur la figure de gauche, on dénombre 12 points à l'intersection entre la sphère et la forme ; sur la figure de droite on dénombre 50 points. Alors la courbure estimée sur la figure de gauche vaut $\hat{\kappa}^3(G_1(X), \mathbf{x}, 1) = 3\pi/(2 \times 3) - 3 \times 12 \times 1^2/3^3 \approx 0.237$ et celle de la figure de droite vaut $\hat{\kappa}^3(G_{0.5}(X), \mathbf{x}, 0.5) = 3\pi/(2 \times 3) - 3 \times 50 \times 0.5^2/3^3 \approx 0.182$. La vraie valeur de la courbure est $1/7.5 \approx 0.133$.

données digitales ? Que veut dire « R tend vers zéro » quand la taille de la grille digitale influe également sur ce rayon ? Dans un premier temps, nous allons nous intéresser à l'aire et au volume digital, puis aux moments digitaux.

3.3.2 Analyse digitale de l'aire et du volume de la boule et relation à la courbure

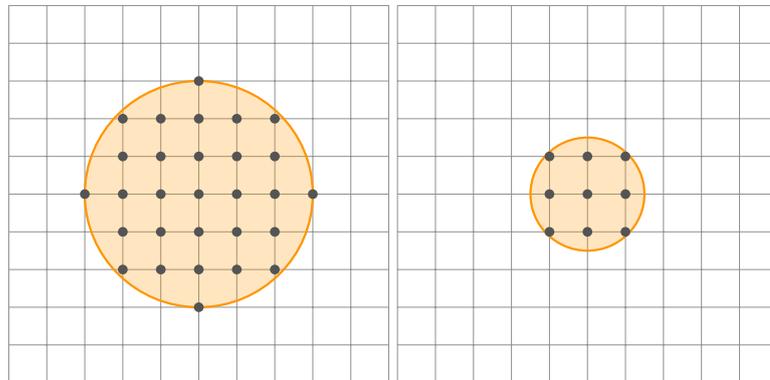


Figure 3.13 Illustration de la dépendance du rayon pour une échelle h donnée. Le disque de gauche a un rayon de 3 et celui de droite a un rayon de 1.5, soit deux fois moins que celui de gauche. Le nombre de points digitaux suite à la discrétisation de Gauss des disques avec un pas de $h = 1$ est de 29 pour le disque de gauche et de 6 pour le disque de droite. L'aire digitale estimée du disque de gauche est alors de $1^2 \times 29 = 29$, l'aire digitale estimée du disque de droite est de $1^2 \times 6 = 6$. Il est alors évident que $29 \neq 4 \times 6$ alors que $\pi \times 3^2 = 4 \times (\pi \times (1.5)^2)$.

Nous souhaitons estimer la quantité $A_R(\mathbf{x}) = \text{Area}(B_R(\mathbf{x}) \cap X)$ de la **définition 3.1** page 45 au pas de discrétisation h , où $B_R(\mathbf{x})$ est une boule de rayon R centrée au point \mathbf{x} . Nous ne pouvons pas directement utiliser les résultats des **équations 2.20 et 2.21** page 24 pour estimer cette aire : le terme d'erreur en grand « O » cache le fait que la constante impliquée dépend de la taille de la forme, son échelle et sa courbure maximale. Un moyen simple de comprendre cet effet est d'estimer

l'aire digitale d'une forme X et celle de la même forme doublée en taille (que nous nommerons X'). Alors que pour des formes euclidiennes, nous avons :

$$4 \times \text{Area}(X) = \text{Area}(X'), \quad (3.59)$$

leurs aires digitales estimées ne suivent pas la même propriété :

$$4 \times \widehat{\text{Area}}(\mathbb{G}_h(X), h) \neq \widehat{\text{Area}}(\mathbb{G}_h(X'), h), \quad (3.60)$$

la discrétisation de X' la rendant plus détaillée et donc son estimation plus précise. Cet effet est illustré avec la [figure 3.13 page ci-contre](#). C'est un problème gênant avec les invariants par intégration car les boules impliquées ont un rayon R qui doit tendre vers 0 lorsque h tend également vers 0. Nous devons alors normaliser notre estimation d'aire et de volume pour que le terme d'erreur ne soit plus influencé par l'échelle de la boule. Nous estimons alors l'aire de l'intersection entre la forme et la boule de rayon R en se ramenant à la boule unité :

$$\widehat{\text{Area}}(\mathbb{G}_h(B_R(\mathbf{x}) \cap X), h) := h^2 \text{Card} \left(\left(\frac{1}{h} \cdot (B_R(\mathbf{x}) \cap X) \right) \cap \mathbb{Z}^2 \right), \quad (3.61)$$

$$= h^2 \text{Card} \left(\left(\frac{R}{h} \cdot \left(B_1 \left(\frac{1}{R} \cdot \mathbf{x} \right) \cap \frac{1}{R} \cdot X \right) \right) \cap \mathbb{Z}^2 \right), \quad (3.62)$$

$$= R^2 \frac{h^2}{R^2} \text{Card} \left(\left(\frac{R}{h} \cdot \left(B_1 \left(\frac{1}{R} \cdot \mathbf{x} \right) \cap \frac{1}{R} \cdot X \right) \right) \cap \mathbb{Z}^2 \right), \quad (3.63)$$

$$= R^2 \widehat{\text{Area}} \left(\mathbb{G}_{h/R} \left(B_1 \left(\frac{1}{R} \cdot \mathbf{x} \right) \cap \frac{1}{R} \cdot X \right), h/R \right), \quad (3.64)$$

Alors, en insérant l'équation 2.20 page 24 dans le terme de droite de 3.64³ :

$$\widehat{\text{Area}}(\mathbb{G}_h(B_R(\mathbf{x}) \cap X), h) = R^2 \left(\text{Area} \left(B_1 \left(\frac{1}{R} \cdot \mathbf{x} \right) \cap \frac{1}{R} \cdot X \right) + O((h/R)^\beta) \right). \quad (3.65)$$

Notons $SB(R)$ l'ensemble $B_1 \left(\frac{1}{R} \cdot \mathbf{x} \right) \cap \frac{1}{R} \cdot X$. La constante K_1 associée au terme d'erreur grand « O » dépend uniquement de la courbure maximale de $\partial SB(R)$. La courbure n'est pas définie aux intersections des deux bords de la forme et de la boule (dans le sous-ensemble $\partial B_1 \left(\frac{1}{R} \cdot \mathbf{x} \right) \cap \frac{1}{R} \cdot \partial X$) mais son influence dans l'estimation d'aire est négligeable car elle est de l'ordre de $O(h^2)$. La partie restante de $\partial SB(R)$ a une courbure maximale qui est égale à 1 pour un rayon R suffisamment petit. En effet, puisque X a une courbure bornée, son dilaté $\frac{1}{R} \cdot \partial X$ devient plat au point $\frac{1}{R} \cdot \mathbf{x}$ quand R tend vers 0, alors la courbure maximale est introduite par $\partial B_1(\mathbf{x})$. Il existe un rayon R_0 tel qu'une constante K_1 intervienne pour un rayon arbitraire $R < R_0$.

³Le terme β est celui défini dans le [paragraphe 2.7.1 page 24](#).

En développant le terme d'erreur en grand « O » avec ce K_1 , et en insérant dans l'équation 3.65 page précédente la relation :

$$A_R(\mathbf{x}) = \text{Area}(B_R(\mathbf{x}) \cap X) = R^2 \text{Area}\left(B_1\left(\frac{1}{R} \cdot \mathbf{x}\right) \cap \frac{1}{R} \cdot X\right), \quad (3.66)$$

nous obtenons le théorème suivant :

Théorème 3.2 (Convergence de l'estimation digitale de l'aire à l'intersection d'un forme et d'une boule). *Soit X une forme convexe finie de \mathbb{R}^2 . Alors, l'estimation digitale de l'aire au point $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ à l'intersection de X et d'une boule $B_R(\mathbf{x})$ de rayon R centrée en \mathbf{x} converge vers son aire euclidienne pour la discrétisation de Gauss au pas de discrétisation h , avec $0 < h \leq R \leq R_0$. Plus précisément, nous avons :*

$$|\widehat{\text{Area}}(\mathcal{G}_h(B_R(\mathbf{x}) \cap X), h) - A_R(\mathbf{x})| \leq K_1 h^\beta R^{2-\beta}, \quad (3.67)$$

où K_1 est une constante indépendante de X .

La convergence de la précédente relation tient du fait que $h \leq R \leq R_0$ et est valide quand \mathbf{x} est n'importe quel point de \mathbb{R}^2 (pas seulement un point de ∂X). De plus, la constante K_1 est indépendante de la forme X (mais dépendante de R_0).

Le même raisonnement est valide en dimension 3 : la courbure n'est alors pas définie dans le sous-ensemble $\partial B_1\left(\frac{1}{R} \cdot \mathbf{x}\right) \cap \frac{1}{R} \cdot \partial X$, qui tend vers le cercle unité lorsque $R \rightarrow 0$. L'erreur introduite dans l'estimation de volume est alors le nombre de voxels intersectés ($\approx 2\pi/h$), ce qui est négligeable. La courbure maximale est également 1 pour un rayon R suffisamment petit. Nous obtenons alors :

Théorème 3.3 (Convergence de l'estimation digitale du volume à l'intersection d'un forme et d'une boule). *Soit X une forme convexe finie de \mathbb{R}^3 . Alors, l'estimation digitale du volume au point $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ à l'intersection de X et d'une boule $B_R(\mathbf{x})$ de rayon R centrée en \mathbf{x} converge vers son volume euclidien pour la discrétisation de Gauss au pas de discrétisation h , avec $0 < h \leq R \leq R_0$. Plus précisément, nous avons :*

$$|\widehat{\text{Vol}}(\mathcal{G}_h(B_R(\mathbf{x}) \cap X), h) - V_R(\mathbf{x})| \leq K_1 h^\gamma R^{3-\gamma}, \quad (3.68)$$

où K_1 est une constante indépendante de X .

3.3.2.1 Estimateurs digitaux de courbure en 2D et de courbure moyenne en 3D par intégration

Nous allons définir des estimateurs digitaux de courbure en 2D $\hat{\kappa}^R$ et de courbure moyenne en 3D \hat{H}^R dans le même esprit que la définition 3.2 page 46, dont le calcul

consiste uniquement à compter le nombre de points digitaux dans un voisinage du point d'intérêt :

Définition 3.4 (Estimateur digital de courbure en 2D par intégration). *Pour tout rayon R positif, nous définissons l'estimateur digital de courbure 2D par intégration $\hat{\kappa}^R$ d'une forme digitale $Z \subset \mathbb{Z}^2$ en tout point $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ et pour le pas de discrétisation $h > 0$ comme :*

$$\forall 0 < h < R, \quad \hat{\kappa}^R(Z, \mathbf{x}, h) := \frac{3\pi}{2R} - \frac{3\widehat{\text{Area}}(B_{R/h}(\mathbf{x}/h) \cap Z, h)}{R^3}, \quad (3.69)$$

où $\frac{R}{h}$ est le rayon digital de la boule.

Définition 3.5 (Estimateur digital de courbure moyenne en 3D par intégration). *Pour tout rayon R positif, nous définissons l'estimateur digital de courbure moyenne en 3D par intégration \hat{H}^R d'une forme digitale $Z \subset \mathbb{Z}^3$ en tout point $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ et pour le pas de discrétisation $h > 0$ comme :*

$$\forall 0 < h < R, \quad \hat{H}^R(Z, \mathbf{x}, h) := \frac{8}{3R} - \frac{4\widehat{\text{Vol}}(B_{R/h}(\mathbf{x}/h) \cap Z, h)}{\pi R^4}. \quad (3.70)$$

Comme le montre la [figure 3.12 page 50](#), ces estimateurs placent une boule de rayon euclidien R autour du point d'intérêt \mathbf{x} et comptent le nombre de points digitaux de $Z = [\mathcal{G}_h(X)]_h$, de l'intersection de cette boule et de la forme. Un calcul linéaire simple est alors appliqué sur cette quantité afin d'approcher la courbure. L'intuition est, comme le montre également la [figure 3.12 page 50](#), que si la discrétisation s'affine nous aurons une meilleure estimation de la courbure. Le prochain paragraphe va le démontrer.

3.3.2.2 Convergence des estimateurs digitaux de courbure en 2D et de courbure moyenne en 3D par intégration

Nous allons ici montrer que les estimateurs de courbure en 2D $\hat{\kappa}^R$ et de courbure moyenne en 3D \hat{H}^R convergent vers la valeur attendue de courbure pour tous les points \mathbf{x} le long du bord ∂X de l'objet X si la forme respecte certaines contraintes.

Théorème 3.4 (Convergence de l'estimateur digital de courbure en 2D $\hat{\kappa}^R$ le long de ∂X [Coe+13b; Coe+14]). *Soit X une forme convexe de \mathbb{R}^2 telle que son bord ∂X est C^2 et sa courbure bornée. Alors, l'estimateur digital de courbure en 2D $\hat{\kappa}^R$ en tout point \mathbf{x} de ∂X converge vers la courbure $\kappa(X, \mathbf{x})$ de X au point \mathbf{x} pour*

la discrétisation de Gauss, avec une vitesse de convergence d'au moins $O(h^{\frac{1}{3}})$ lorsque $R = O(h^{\frac{1}{3}})$. Plus précisément, nous avons :

$$\forall 0 < h < h_0, \quad \left| \hat{\kappa}^R(\mathbb{G}_h(X), \mathbf{x}, h) - \kappa(X, \mathbf{x}) \right| \leq O\left(h^{\frac{1}{3}}\right). \quad (3.71)$$

Démonstration. En utilisant les relations sur les invariants par intégration définis précédemment ([définition 3.4 page précédente](#)), ainsi que la relation $\mathbb{G}_h(B_R(\mathbf{x}) \cap X) = B_{R/h}(\frac{1}{h} \cdot \mathbf{x}) \cap \mathbb{G}_h(X)$, nous obtenons pour $R < R_0$:

$$\left| \hat{\kappa}^R(\mathbb{G}_h(X), \mathbf{x}, h) - \kappa(X, \mathbf{x}) \right| = \left| \frac{3\pi}{2R} - \frac{3\widehat{\text{Area}}(B_{R/h}(\mathbf{x}/h) \cap \mathbb{G}_h(X), h)}{R^3} - \kappa(X, \mathbf{x}) \right|, \quad (3.72)$$

en utilisant la relation entre l'estimation digitale de l'aire et l'aire euclidienne du [théorème 3.2 page 52](#), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \left| \hat{\kappa}^R(\mathbb{G}_h(X), \mathbf{x}, h) - \kappa(X, \mathbf{x}) \right| &\leq \left| \frac{3\pi}{2R} - \frac{3\text{Area}(B_R(\mathbf{x}) \cap X)}{R^3} - \kappa(X, \mathbf{x}) \right| + 3K_1 \frac{h^\beta}{R^{1+\beta}} \\ &\leq \left| \tilde{\kappa}^R(X, \mathbf{x}) - \kappa(X, \mathbf{x}) \right| + 3K_1 \frac{h^\beta}{R^{1+\beta}}, \end{aligned} \quad (3.73)$$

ainsi, en utilisant le [théorème 3.1 page 46](#), nous pouvons écrire que :

$$\left| \hat{\kappa}^R(\mathbb{G}_h(X), \mathbf{x}, h) - \kappa(X, \mathbf{x}) \right| \leq O(R) + 3K_1 \frac{h^\beta}{R^{1+\beta}}. \quad (3.74)$$

Nous obtenons alors deux termes d'erreur dépendants du rayon R de la boule qui sont contradictoires : lorsque R diminue, $O(R)$ diminue mais $3K_1 \frac{h^\beta}{R^{1+\beta}}$ augmente, et vice-versa. Nous voulons alors guider le rayon R afin d'obtenir un optimal de notre terme d'erreur. Nous proposons alors de définir $R = kh^\alpha$ et de choisir k (une constante) et α afin de minimiser les bornes d'erreur. Nous notons K_2 la constante derrière le grand « O » de $O(R)$, nous obtenons :

$$\left| \hat{\kappa}^R(\mathbb{G}_h(X), \mathbf{x}, h) - \kappa(X, \mathbf{x}) \right| \leq K_2 kh^\alpha + \frac{3K_1}{k^{1+\beta}} h^{\beta-\alpha(1+\beta)}. \quad (3.75)$$

Alors, l'erreur minimale est atteinte lorsque les exposants sont égaux : nous devons résoudre $\alpha = \beta - \alpha(1 + \beta)$. L'[équation 2.20 page 24](#) nous informe que $\beta = 1$ dans le cas général⁴, et donc $\alpha = \frac{1}{3}$. Donc, lorsque $R = kh^{\frac{1}{3}}$:

$$\left| \hat{\kappa}^R(\mathbb{G}_h(X), \mathbf{x}, h) - \kappa(X, \mathbf{x}) \right| \leq K_2 kh^{\frac{1}{3}} + \frac{3K_1}{k^2} h^{\frac{1}{3}} \quad (3.76)$$

$$\leq O(h^{\frac{1}{3}}). \quad (3.77)$$

□

⁴Il est à noter que si le bord de la forme est C^3 sans courbure nulle, β est alors égal à $\frac{15}{11} - \epsilon$ et donc $\alpha = \frac{15}{37} - \epsilon \approx 0.405$. Voir [paragraphe 2.7.1 page 24](#).

Nous obtenons des résultats similaires pour l'estimateur digital de courbure moyenne sur des formes en 3D :

Théorème 3.5 (Convergence de l'estimateur digital de courbure moyenne en 3D \hat{H}^R le long de ∂X [Coe+13b; Coe+14]). Soit X une forme convexe de \mathbb{R}^3 telle que son bord ∂X est C^3 et sa courbure bornée. Alors, l'estimateur digital de courbure moyenne en 3D \hat{H}^R en tout point \mathbf{x} de ∂X converge vers la courbure $H(X, \mathbf{x})$ de X au point \mathbf{x} pour la discrétisation de Gauss, avec une vitesse de convergence d'au moins $O(h^{\frac{1}{3}})$ lorsque $R = O(h^{\frac{1}{3}})$. Plus précisément, nous avons :

$$\forall 0 < h < h_0, \quad \left| \hat{H}^R(\mathbb{G}_h(X), \mathbf{x}, h) - H(X, \mathbf{x}) \right| \leq O\left(h^{\frac{1}{3}}\right). \quad (3.78)$$

Démonstration. La preuve suit exactement les mêmes étapes que la preuve du théorème 3.4 page 53. Ainsi, la définition 3.5 page 53 et la relation $\mathbb{G}_h(B_R(\mathbf{x}) \cap X) = B_{R/h}(\frac{1}{h} \cdot \mathbf{x}) \cap \mathbb{G}_h(X)$ nous permettent d'obtenir pour $R < R_0$:

$$\left| \hat{H}^R(\mathbb{G}_h(X), \mathbf{x}, h) - H(X, \mathbf{x}) \right| = \left| \frac{8}{3R} - \frac{4\widehat{\text{Vol}}(B_{R/h}(\mathbf{x}/h) \cap \mathbb{G}_h(X), h)}{\pi R^4} - H(X, \mathbf{x}) \right|, \quad (3.79)$$

en utilisant la relation entre l'estimation digitale du volume et le volume euclidien du théorème 3.3 page 52, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \left| \hat{H}^R(\mathbb{G}_h(X), \mathbf{x}, h) - H(X, \mathbf{x}) \right| &\leq \left| \frac{8}{3R} - \frac{4\text{Vol}(B_R(\mathbf{x}) \cap X)}{\pi R^4} - H(X, \mathbf{x}) \right| + \frac{4K_1}{\pi} \frac{h^\gamma}{R^{1+\gamma}} \\ &\leq \left| \tilde{H}^R(X, \mathbf{x}) - H(X, \mathbf{x}) \right| + \frac{4K_1}{\pi} \frac{h^\gamma}{R^{1+\gamma}}, \end{aligned} \quad (3.80)$$

ainsi, en utilisant le théorème 3.1 page 46, nous pouvons écrire que :

$$\left| \hat{H}^R(\mathbb{G}_h(X), \mathbf{x}, h) - H(X, \mathbf{x}) \right| \leq O(R) + \frac{4K_1}{\pi} \frac{h^\gamma}{R^{1+\gamma}}. \quad (3.81)$$

Comme précédemment, les deux termes d'erreurs sont dépendants du rayon R de la boule et ont un effet antagoniste. Nous proposons de définir $R = kh^\alpha$, k étant une constante, afin de trouver le α optimal pour minimiser l'erreur. Nous notons K_2 la constante derrière le grand « O » de $O(R)$, nous obtenons :

$$\left| \hat{H}^R(\mathbb{G}_h(X), \mathbf{x}, h) - H(X, \mathbf{x}) \right| \leq K_2 k h^\alpha + \frac{3K_1}{k^{1+\gamma}} h^{\gamma - \alpha(1+\gamma)}. \quad (3.82)$$

Et comme précédemment, cela revient à résoudre $\alpha = \gamma - \alpha(1 + \gamma)$. L'équation 2.21 page 24 nous informe que $\gamma = 1$ dans le cas général⁵, et donc $\alpha = \frac{1}{3}$, comme en 2D. Donc, lorsque $R = kh^{\frac{1}{3}}$:

$$|\hat{H}^R(\mathbb{G}_h(X), \mathbf{x}, h) - H(X, \mathbf{x})| \leq K_2 kh^{\frac{1}{3}} + \frac{4K_1}{\pi k^2} h^{\frac{1}{3}} \quad (3.83)$$

$$\leq O(h^{\frac{1}{3}}). \quad (3.84)$$

□

Cependant, ces théorèmes ne sont valides que pour tout point \mathbf{x} de ∂X . Lorsque nous traitons des bords des surfaces digitales, une nouvelle approximation intervient dû à la discrétisation. Le prochain paragraphe adaptera ces estimateurs sur des contours digitaux de surface.

3.3.2.3 Convergence asymptotique des estimateurs digitaux de courbure en 2D et de courbure moyenne en 3D sur le bord des surfaces digitales

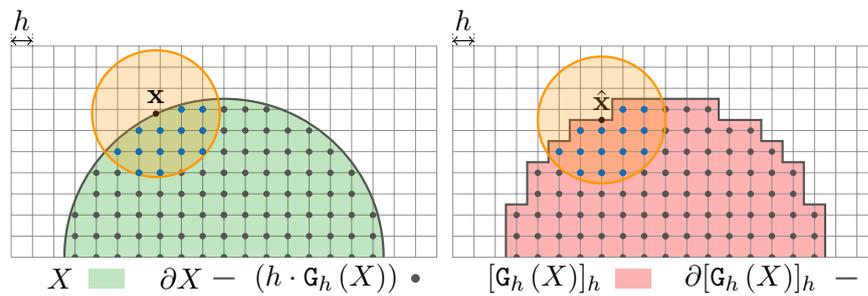


Figure 3.14 Illustration de la différence entre l'estimation digitale de courbure sur le bord euclidien ∂X de l'objet X (à gauche) et l'estimation digitale de courbure sur le bord digital $\partial[\mathbb{G}_h(X)]_h$ du plongement euclidien $[\mathbb{G}_h(X)]_h$ de la discrétisation de Gauss de X (à droite), au pas de discrétisation h . Nous pouvons remarquer que nous n'obtenons pas le même nombre de points digitaux à l'intersection entre la boule et la forme.

Comme nous venons de le dire, nous ne connaissons pas exactement la position de \mathbf{x} lorsque nous considérons des données digitales. Les seules informations dont nous disposons sont les points digitaux $\hat{\mathbf{x}}$ de $\partial[\mathbb{G}_h(X)]_h$. Nous devons alors considérer l'erreur possible de positionnement de l'endroit où est estimé la courbure pour proposer des théorèmes de convergence asymptotiques (voir la figure 3.14). Nous aurons besoin de la définition de la projection inverse (définition 2.6 page 19), nous devons alors injecter cette approximation dans le calcul d'aire et de volume, pour ensuite la diffuser aux calculs de courbures. Ainsi, nous pouvons prouver la

⁵Il est à noter que si le bord de la forme est lisse, γ est alors égal à $\frac{243}{158}$ et donc $\alpha = \frac{243}{559} \approx 0.435$. Voir paragraphe 2.7.1 page 24.

convergence asymptotique des estimateurs digitaux de courbure sur le bord discrétisé d'un objet suffisamment lisse.

Théorème 3.6 ([Coe+13b; Coe+14]). *Soit X une forme convexe de \mathbb{R}^2 telle que son bord ∂X est C^3 à courbure bornée positive. Alors, l'estimateur digital de courbure $\hat{\kappa}^R$ converge asymptotiquement vers la courbure κ pour la discrétisation de Gauss sur des formes X , avec une vitesse de convergence d'au moins $O(h^{\frac{1}{3}})$ lorsque $R = kh^{\frac{1}{3}}$. Plus précisément :*

$$\forall 0 < h \leq h_0, \forall \mathbf{x} \in \partial X, \forall \hat{\mathbf{x}} \in \partial[\mathbf{G}_h(X)]_h \text{ avec } \|\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\|_\infty \leq h, \\ \left| \hat{\kappa}^R(\mathbf{G}_h(X), \hat{\mathbf{x}}, h) - \kappa(X, \mathbf{x}) \right| \leq O\left(h^{\frac{1}{3}}\right). \quad (3.85)$$

Démonstration. Notons $t := \|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|_2$ la distance d'un point $\hat{\mathbf{x}}$ de $\partial[\mathbf{G}_h(X)]_h$ à un point \mathbf{x} de ∂X . En 3D, le théorème 7 de [Pot+09] permet de quantifier cette erreur :

$$|V_r(\hat{\mathbf{x}}) - V_r(\mathbf{x})| = R^2 \pi t (1 + O(R^2)) + O(t). \quad (3.86)$$

De la même façon en 2D, nous obtenons :

$$|A_r(\hat{\mathbf{x}}) - A_r(\mathbf{x})| = 2Rt(1 + O(R^2)) + O(t). \quad (3.87)$$

Nous pouvons alors réécrire l'équation 3.67 page 52 pour $\hat{\mathbf{x}}$:

$$|\widehat{\text{Area}}(\mathbf{G}_h(B_R(\hat{\mathbf{x}}) \cap X), h) - A_R(\hat{\mathbf{x}})| \leq K_1 h^\beta R^{2-\beta}, \quad (3.88)$$

ce qui implique, avec l'équation 3.87 :

$$|\widehat{\text{Area}}(\mathbf{G}_h(B_R(\hat{\mathbf{x}}) \cap X), h) - A_R(\mathbf{x})| \leq K_1 h^\beta R^{2-\beta} + 2Rt(1 + O(R^2)) + O(t). \quad (3.89)$$

Ensuite, dans le but d'obtenir un estimateur de courbure, nous suivons le même raisonnement que pour la preuve du théorème 3.4 page 53 mais en utilisant l'équation 3.89, ce qui nous donne :

$$|\hat{\kappa}^R(\mathbf{G}_h(X), \hat{\mathbf{x}}, h) - \kappa(X, \mathbf{x})| \leq O(R) + 3K_1 \frac{h^\beta}{R^{1+\beta}} + \frac{6t}{R^2} (1 + O(R^2)) + O(t). \quad (3.90)$$

Puisque nous sommes sur des données digitales, nous savons que $t \leq \frac{\sqrt{2}}{2}h$ d'après la définition 2.6 page 19 de la projection inverse. Dans certains cas, nous pouvons espérer une meilleure localisation de $\hat{\mathbf{x}}$ vers \mathbf{x} [LV06]. Nous noterons alors $t = O(h^{\alpha'})$,

avec $\alpha' \geq 1$. Nous pouvons réécrire la précédente équation afin d'obtenir une borne d'erreur uniquement dépendante de h , avec $R = kh^\alpha$:

$$|\hat{\kappa}^R(\mathbf{G}_h(X), \hat{\mathbf{x}}, h) - \kappa(X, \mathbf{x})| \leq O(h^\alpha) + O(h^{\beta - \alpha(1 + \beta)}) + O(h^{\alpha' - 2\alpha}) + O(h^{\alpha'}) + O(h^{2\alpha' - 2\alpha}). \quad (3.91)$$

Ainsi, comme pour le **théorème 3.4 page 53**, nous devons trouver le meilleur α possible, à la différence ici qu'il dépend de β et α' . Lorsque α augmente, $\beta - \alpha(1 + \beta)$ et $\alpha' - 2\alpha$ sont les erreurs qui diminuent le plus, il faut alors résoudre $\alpha = \beta - \alpha(1 + \beta)$ et $\alpha = \alpha' - 2\alpha$ afin de trouver la valeur de α optimale⁶.

$$\begin{aligned} \alpha = \beta - \alpha(1 + \beta) & \quad \alpha = \alpha' - 2\alpha \\ \alpha = \frac{\beta}{2 + \beta} & \quad \alpha = \frac{\alpha'}{3} \end{aligned} \quad (3.92)$$

Si $\alpha' \geq \frac{3\beta}{2 + \beta}$, alors $\alpha = \frac{\beta}{2 + \beta}$, sinon $\alpha = \frac{\alpha'}{3}$. Si le point $\hat{\mathbf{x}}$ est sur le bord digital $\partial[\mathbf{G}_h(X)]_h$, nous savons que $\alpha' = 1$ grâce à la relation $t \leq \frac{\sqrt{2}}{2}h$, $\beta = 1$ dans le cas général, alors nous obtenons $\alpha = \frac{\alpha'}{3} = \frac{1}{3}$. Donc, lorsque $R = kh^{\frac{1}{3}}$:

$$|\hat{\kappa}^R(\mathbf{G}_h(X), \hat{\mathbf{x}}) - \kappa(X, \mathbf{x})| \leq O(h^{\frac{1}{3}}) \quad (3.93)$$

□

De la même façon, en 3D pour la courbure moyenne, nous pouvons prouver la convergence asymptotique de l'estimateur \hat{H}^R sur le bord digital d'un objet suffisamment lisse :

Théorème 3.7 ([Coe+13b; Coe+14]). *Soit X une forme convexe de \mathbb{R}^3 telle que son bord ∂X est C^3 à courbure bornée positive. Alors, l'estimateur digital de courbure \hat{H}^R converge asymptotiquement vers la courbure H pour la discrétisation de Gauss sur des formes X , avec une vitesse de convergence d'au moins $O(h^{\frac{1}{3}})$ lorsque $R = kh^{\frac{1}{3}}$. Plus précisément :*

$$\begin{aligned} \forall 0 < h \leq h_0, \forall \mathbf{x} \in \partial X, \forall \hat{\mathbf{x}} \in \partial[\mathbf{G}_h(X)]_h \text{ avec } \|\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\|_\infty \leq h, \\ \left| \hat{H}^R(\mathbf{G}_h(X), \hat{\mathbf{x}}, h) - H(X, \mathbf{x}) \right| \leq O\left(h^{\frac{1}{3}}\right). \end{aligned} \quad (3.94)$$

Démonstration. Notons $t := \|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|_2$ la distance d'un point $\hat{\mathbf{x}}$ de $\partial[\mathbf{G}_h(X)]_h$ à un point \mathbf{x} de ∂X . En 3D, le théorème 7 de [Pot+09] permet de quantifier cette erreur :

$$|V_r(\hat{\mathbf{x}}) - V_r(\mathbf{x})| = R^2 \pi t (1 + O(R^2) + O(t)). \quad (3.95)$$

⁶Une erreur s'est glissée dans ce calcul dans [Coe+13b].

Nous pouvons alors réécrire l'équation 3.68 page 52 pour $\hat{\mathbf{x}}$:

$$|\widehat{\text{Vol}}(\mathbb{G}_h(B_R(\hat{\mathbf{x}}) \cap X), h) - V_R(\hat{\mathbf{x}})| \leq K_1 h^\gamma R^{3-\gamma}, \quad (3.96)$$

ce qui implique, avec l'équation 3.95 page précédente :

$$|\widehat{\text{Vol}}(\mathbb{G}_h(B_R(\hat{\mathbf{x}}) \cap X), h) - V_R(\mathbf{x})| \leq K_1 h^\gamma R^{3-\gamma} + R^2 \pi t (1 + O(R^2) + O(t)). \quad (3.97)$$

Ensuite, nous suivons le même raisonnement que pour la preuve du théorème 3.5 page 55 mais en utilisant l'équation 3.97, ce qui nous donne :

$$|\hat{H}^R(\mathbb{G}_h(X), \hat{\mathbf{x}}, h) - H(X, \mathbf{x})| \leq O(R) + \frac{4K_1}{\pi} \frac{h^\gamma}{R^{1+\gamma}} + \frac{4t}{R^2} (1 + O(R^2) + O(t)). \quad (3.98)$$

À nouveau, nous savons que $t \leq \frac{\sqrt{3}}{2} h$ [LT15]. Nous noterons alors $t = O(h^{\alpha'})$, avec $\alpha' \geq 1$. Nous pouvons réécrire la précédente équation afin d'obtenir une borne d'erreur uniquement dépendante de h , avec $R = kh^\alpha$:

$$|\hat{H}^R(\mathbb{G}_h(X), \hat{\mathbf{x}}, h) - H(X, \mathbf{x})| \leq O(h^\alpha) + O(h^{\gamma - \alpha(1+\gamma)}) + O(h^{\alpha' - 2\alpha}) + O(h^{\alpha'}) + O(h^{2\alpha' - 2\alpha}). \quad (3.99)$$

Ainsi, comme pour le théorème 3.5 page 55, nous devons trouver le meilleur α possible. Les exposants étant les mêmes qu'en dimension 2, nous obtenons $\alpha = \frac{\gamma}{2+\gamma}$ si $\alpha' \geq \frac{3\gamma}{1+\gamma}$, sinon $\alpha = \frac{\alpha'}{3}$. Si le point $\hat{\mathbf{x}}$ est sur le bord digital $\partial[\mathbb{G}_h(X)]_h$, nous savons que $\alpha' = 1$ grâce à la relation $t \leq \frac{\sqrt{3}}{2} h$, $\gamma = 1$ dans le cas général, alors nous obtenons $\alpha = \frac{\alpha'}{3} = \frac{1}{3}$. Donc, lorsque $R = kh^{\frac{1}{3}}$:

$$|\hat{H}^R(\mathbb{G}_h(X), \hat{\mathbf{x}}) - H(X, \mathbf{x})| \leq O(h^{\frac{1}{3}}) \quad (3.100)$$

□

Dans les prochains paragraphes, nous allons nous intéresser à calculer les courbures principales sur des objets digitaux, en calculant des matrices de covariance sur la surface de l'objet. Comme pour la courbure en dimension 2 et la courbure moyenne en dimension 3, nous chercherons à prouver la convergence asymptotiques de ces estimateurs.

3.3.3 Analyse digitale de la matrice de covariance et relation aux courbures principales en 3D

Nous souhaitons maintenant calculer les moments sur l'intersection entre la forme X et la boule, c'est-à-dire à $B_R(\mathbf{x}) \cap X$, dont la taille décroît avec le pas de discrétisation h . Nous ne pouvons pas utiliser directement les résultats de l'équation 2.23 page 25 car les constantes cachées dans le terme en grand « O » dépendent de la

taille de la forme, de son échelle et de la courbure maximale. Nous devons normaliser l'estimation des moments de telle sorte que le terme d'erreur ne soit plus influencé par l'échelle. Comme en 2D, cela revient à se rapporter à la sphère unité. Pour plus de lisibilité, nous noterons $\sigma = p + q + s$:

$$\begin{aligned}
\hat{m}_h^{pqs}(\mathbb{G}_h(B_R(\mathbf{x}) \cap X), h) &= h^{3+\sigma} m^{pqs} \left(\left(\frac{1}{h} \cdot B_R(\mathbf{x}) \cap X \right) \cap \mathbb{Z}^3 \right) \\
&= h^{3+\sigma} m^{pqs} \left(\frac{R}{h} \cdot \left(B_1 \left(\frac{1}{R} \cdot \mathbf{x} \right) \cap \frac{1}{R} \cdot X \right) \cap \mathbb{Z}^3 \right) \\
&= R^{3+\sigma} \left(\frac{h}{R} \right)^{3+\sigma} m^{pqs} \left(\mathbb{G}_{h/R} \left(B_1 \left(\frac{1}{R} \cdot \mathbf{x} \right) \cap \frac{1}{R} \cdot X \right) \right) \\
&= R^{3+\sigma} \hat{m}_h^{pqs} \left(\mathbb{G}_{h/R} \left(B_1 \left(\frac{1}{R} \cdot \mathbf{x} \right) \cap \frac{1}{R} \cdot X \right), \frac{h}{R} \right).
\end{aligned} \tag{3.101}$$

Ainsi, la forme $B_1 \left(\frac{1}{R} \cdot \mathbf{x} \right) \cap \frac{1}{R} \cdot X$ tend vers la demi-boule de rayon 1 lorsque R décroît. Par conséquent, nous pouvons appliquer l'équation 2.23 page 25 à l'équation 3.101 et considérer à présent que la constante impliquée dans le terme d'erreur n'est plus liée à R ni à h . Comme $m^{pqs}(R \cdot Y) = R^{3+p+q+s} m^{pqs}(Y)$, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}
\hat{m}_h^{pqs}(\mathbb{G}_h(B_R(\mathbf{x}) \cap X), h) &= R^{3+\sigma} m^{pqs} \left(B_1 \left(\frac{1}{R} \cdot \mathbf{x} \right) \cap \frac{1}{R} \cdot X \right) + R^{3+\sigma} O \left(\frac{h}{R} \right)^{\mu_\sigma} \\
&= m^{pqs}(B_R(\mathbf{x}) \cap X) + O(R^{3+\sigma-\mu_\sigma} h^{\mu_\sigma}).
\end{aligned} \tag{3.102}$$

Alors, l'équation 3.102 est le résultat de la convergence asymptotique des moments digitaux des sous-ensembles $B_R(\mathbf{x}) \cap X$ lorsque R et h décroissent.

3.3.3.1 Matrice de covariance digitale et estimateurs digitaux de courbures principales

De la même façon que pour la matrice de covariance, nous définissons la matrice de covariance digitale au pas de discrétisation h pour tout sous-ensemble $Z \subset \mathbb{Z}^3$ en fonction des moments digitaux d'ordre 0, 1 et 2 :

Définition 3.6 (Matrice de covariance digitale). Pour tout sous ensemble $Z \subset \mathbb{Z}^3$, sa matrice de covariance digitale \mathcal{V}_h au pas de discrétisation h est :

$$\mathcal{V}_h(Z) := \begin{bmatrix} \hat{m}_h^{200}(Z) & \hat{m}_h^{110}(Z) & \hat{m}_h^{101}(Z) \\ \hat{m}_h^{110}(Z) & \hat{m}_h^{020}(Z) & \hat{m}_h^{011}(Z) \\ \hat{m}_h^{101}(Z) & \hat{m}_h^{011}(Z) & \hat{m}_h^{002}(Z) \end{bmatrix} - \frac{1}{\hat{m}_h^{000}(Z)} \begin{bmatrix} \hat{m}_h^{100}(Z) \\ \hat{m}_h^{010}(Z) \\ \hat{m}_h^{001}(Z) \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \hat{m}_h^{100}(Z) \\ \hat{m}_h^{010}(Z) \\ \hat{m}_h^{001}(Z) \end{bmatrix}^T. \tag{3.103}$$

En suivant l'approximation de Taylor du [lemme 3.3 page 48](#), nous pouvons définir les estimateurs digitaux de courbures principales à partir de la diagonalisation de la matrice de covariance digitale :

Définition 3.7 Soit $Z \subset \mathbb{Z}^3$ une forme digitale et $h > 0$ un pas de discrétisation. Pour $R \geq h$, nous définissons les estimateurs digitaux par intégration de courbures principales $\hat{\kappa}_1^R$ et $\hat{\kappa}_2^R$ de Z au point $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ et au pas de discrétisation h , et les estimateurs digitaux par intégration de leurs directions principales de courbure respectives $\hat{\mathbf{w}}_1^R$ et $\hat{\mathbf{w}}_2^R$, ainsi que l'estimateur digital de normale par intégration $\hat{\mathbf{n}}^R$ comme :

$$\hat{\kappa}_1^R(Z, \mathbf{y}, h) := \frac{6}{\pi R^6} (\hat{\lambda}_2 - 3\hat{\lambda}_1) + \frac{8}{5R}, \quad \hat{\mathbf{w}}_1^R(Z, \mathbf{y}, h) := \hat{v}_1 \quad (3.104)$$

$$\hat{\kappa}_2^R(Z, \mathbf{y}, h) := \frac{6}{\pi R^6} (\hat{\lambda}_1 - 3\hat{\lambda}_2) + \frac{8}{5R}, \quad \hat{\mathbf{w}}_2^R(Z, \mathbf{y}, h) := \hat{v}_2 \quad (3.105)$$

$$\hat{\mathbf{n}}^R(Z, \mathbf{y}, h) := \hat{v}_3, \quad (3.106)$$

où $\hat{\lambda}_1 \geq \hat{\lambda}_2 \geq \hat{\lambda}_3$ sont les valeurs propres de $\mathcal{V}_h(B_{R/h}(\mathbf{y}/h) \cap Z)$, et $\hat{v}_1, \hat{v}_2, \hat{v}_3$ sont leurs vecteurs propres correspondantes.

Dans les paragraphes suivants nous allons montrer la convergence asymptotique de ces estimateurs. La démonstration dépend de la convergence des moments digitaux, de la stabilité des moments face à des petits déplacements provoqués par la discrétisation, ainsi que de la théorie de perturbation de matrice.

3.3.3.2 Propriétés des matrices de covariance et de moments

Dans un premier temps, nous allons étudier les propriétés des matrices de covariance et des moments face aux perturbations. Nous pouvons établir l'invariance des matrices de covariances :

Lemme 3.4 Invariance à la translation pour les matrices de covariance :

- $\forall Y \subset \mathbb{R}^3, \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3, \mathcal{V}(Y + \mathbf{v}) = \mathcal{V}(Y)$.
- $\forall Z \subset \mathbb{Z}^3, \forall \mathbf{v} \in \mathbb{Z}^3, \forall h > 0, \mathcal{V}_h(Z + \mathbf{v}) = \mathcal{V}_h(Z)$.

Démonstration. La preuve est directe par additivité des moments géométriques.
□

Nous devons également étudier comment les moments sont perturbés par une erreur de positionnement \mathbf{t} de la boule :

Lemme 3.5 Pour tout point $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, un rayon R positif, pour tout vecteur \mathbf{t} avec pour norme $t := \|\mathbf{t}\|_2 \leq R$, nous avons :

$$\left| m^{000}(B_R(\mathbf{x} + \mathbf{t}) \cap X) - m^{000}(B_R(\mathbf{x}) \cap X) \right| \leq O(tR^2), \quad (3.107)$$

$$\left| m^{100}(B_R(\mathbf{x} + \mathbf{t}) \cap X) - m^{100}(B_R(\mathbf{x}) \cap X) \right| \leq O(tR^3) + O(\|\mathbf{x}\|_\infty tR^2), \quad (3.108)$$

$$\left| m^{200}(B_R(\mathbf{x} + \mathbf{t}) \cap X) - m^{200}(B_R(\mathbf{x}) \cap X) \right| \leq O(tR^4) + O(\|\mathbf{x}\|_\infty tR^3) + O(\|\mathbf{x}\|_\infty^2 tR^2). \quad (3.109)$$

Les bornes sont valides pour tous les moments ayant respectivement le même ordre. Ces relations restent vraies si $B_R(\mathbf{x} + \mathbf{t})$ et $B_R(\mathbf{x})$ intersectent le même ensemble X .

Démonstration.

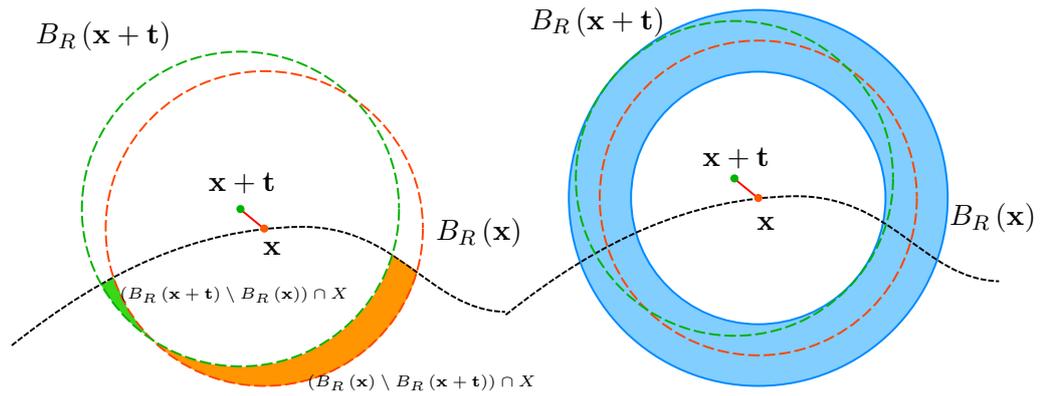


Figure 3.15 Illustration du lemme 3.5.

En décomposant X en fonction de deux boules de rayon R , centrées en \mathbf{x} et $\mathbf{x} + \mathbf{t}$ (voir figure 3.15), nous avons :

$$\Delta(\mathbf{t}) := m^{pqs}(B_R(\mathbf{x} + \mathbf{t}) \cap X) - m^{pqs}(B_R(\mathbf{x}) \cap X) \quad (3.110)$$

$$= m^{pqs}((B_R(\mathbf{x} + \mathbf{t}) \setminus B_R(\mathbf{x})) \cap X) \quad (3.111)$$

$$- m^{pqs}((B_R(\mathbf{x}) \setminus B_R(\mathbf{x} + \mathbf{t})) \cap X) \quad (3.112)$$

Comme :

$$\emptyset \neq Y_1 \subset Y_2 \subset \mathbb{R}^3 \Rightarrow \sup_{Y \subset Y_1} |m^{pqs}(Y)| \leq \sup_{Y \subset Y_2} |m^{pqs}(Y)|, \quad (3.113)$$

et avec la propriété d'additivité des intégrales, nous avons :

$$|\Delta(\mathbf{t})| := |m^{pqs}((B_R(\mathbf{x} + \mathbf{t}) \ominus B_R(\mathbf{x})) \cap X)| \quad (3.114)$$

$$\leq \sup_{Y \subset (B_R(\mathbf{x} + \mathbf{t}) \ominus B_R(\mathbf{x})) \cap X} |m^{pqs}(Y)| \quad (3.115)$$

$$\leq \sup_{Y \subset B_R(\mathbf{x} + \mathbf{t}) \ominus B_R(\mathbf{x})} |m^{pqs}(Y)| \quad (3.116)$$

$$\leq \sup_{Y \subset B_{R+t}(\mathbf{x}) - B_{R-t}(\mathbf{x})} |m^{pqs}(Y)|. \quad (3.117)$$

Pour une meilleure lisibilité, nous noterons $S_{R,t}(\mathbf{x}) := B_{R+t}(\mathbf{x}) \setminus B_{R-t}(\mathbf{x})$. Nous couvrons alors la différence entre les deux boules centrées en des points différents $(B_R(\mathbf{x} + \mathbf{t}) \ominus B_R(\mathbf{x}))$ par la différence entre deux boules de même centre mais de rayons différents ($S_{R,t}(\mathbf{x})$). La [figure 3.15 page ci-contre](#) illustre la différence des deux boules, en bleu. Cela correspond à un anneau en 2D de largeur $2t$. Il s'agit évidemment d'une borne supérieure épaisse, mais les ordres de perturbations sont les mêmes.

Moment d'ordre zéro. Pour le moment d'ordre zéro, nous utilisons simplement le volume de la boule :

$$\sup_{Y \subset S_{R,t}(\mathbf{x})} |m^{000}(Y)| = m^{000}(S_{R,t}(\mathbf{x})) \quad (3.118)$$

$$= \frac{4\pi}{3}(R+t)^3 - \frac{4\pi}{3}(R-t)^3 \quad (3.119)$$

$$= \frac{4\pi}{3}(6R^2t + 2t^3) = O(tR^2). \quad (3.120)$$

Moments du premier ordre. Pour les moments du premier ordre, nous translatons la forme à l'origine du repère et nous utilisons le résultat précédent ainsi que le fait que le 100-moment centré est maximisé pour la demi-boule à valeur de x_1 positive (que nous noterons $B_R^+(\mathbf{x})$)⁷ :

$$\begin{aligned} \sup_{Y \subset S_{R,t}(\mathbf{x})} |m^{100}(Y)| &\leq \sup_{Y \subset S_{R,t}(\mathbf{0})} |m^{100}(Y)| + |x_1| \cdot m^{000}(Y) \\ &= m^{100}(B_{R+t}^+(\mathbf{0}) - B_{R-t}^+(\mathbf{0})) + O(|x_1|tR^2) \\ &= 2\pi(R^3t + Rt^3) + O((\|\mathbf{x}\|_\infty)tR^2) \\ &= O(tR^3) + O(\|\mathbf{x}\|_\infty tR^2). \end{aligned} \quad (3.121)$$

⁷Rappelons que x_i est la i -ème composante de \mathbf{x} .

Moments du second ordre. Pour les moments du second ordre, nous translatons également la forme à l'origine du repère, puis nous utilisons les deux résultats précédents ainsi que le fait que le 200-moment est maximisé pour la boule :

$$\begin{aligned}
\sup_{Y \subset S_{R,t}(\mathbf{x})} |m^{200}(Y)| &\leq \sup_{Y \subset S_{R,t}(\mathbf{0})} |m^{200}(Y)| + 2|x_1| \cdot |m^{100}(Y)| + x_1^2 \cdot m^{000}(Y) \\
&= m^{200}(S_{R,t}(\mathbf{0})) + \|\mathbf{x}\|_\infty (O(tR^3) + O(\|\mathbf{x}\|_\infty tR^2)) + \|\mathbf{x}\|_\infty^2 O(tR^2) \\
&= O(tR^4) + O(\|\mathbf{x}\|_\infty tR^3) + O(\|\mathbf{x}\|_\infty^2 tR^2) \tag{3.122}
\end{aligned}$$

Les autres moments sont prouvés de la même façon. \square

Dans le prochain paragraphe, nous allons injecter ces erreurs de positionnement des moments dans le calcul de la matrice de covariance afin de voir comment ils influent sur la convergence de la matrice.

3.3.3.3 Convergence asymptotique des matrices de covariances digitales

Avec le [lemme 3.4 page 61](#) et le [lemme 3.5 page 62](#), nous pouvons facilement prouver la convergence asymptotique des matrices de covariances digitales. Le théorème suivant établit la convergence lorsque la matrice de covariance est calculée sur le même point \mathbf{y} , et le suivant établira sa convergence asymptotique sur le bord digital de la forme.

Théorème 3.8 (Convergence de la matrice de covariance digitale [Coe+14]).

Soit X une forme convexe de \mathbb{R}^3 à reach positif, dont le bord est C^3 et peut être décomposé en nombre fini de parties monotones. Alors, il existe une constante h_0 telle que pour tout pas de discrétisation $0 < h < h_0$, pour tout $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$, pour un rayon $R \geq h$, nous avons⁸ :

$$\left\| \mathcal{V}_h(B_{R/h}(\mathbf{y}/h) \cap \mathbf{G}_h(X)) - \mathcal{V}(B_R(\mathbf{y}) \cap X) \right\| \leq \sum_{i=0}^2 O(R^{5-\mu_i} h^{\mu_i}). \tag{3.123}$$

La constante cachée derrière le terme en grand « O » ne dépend pas de la taille de la forme ni de sa géométrie. $\|\cdot\|$ est la norme spectrale des matrices.

Démonstration. Afin de faciliter la lecture, nous noterons $A := B_R(\mathbf{y}) \cap X$ et $A_h := B_{R/h}(\mathbf{y}/h) \cap \mathbf{G}_h(X) = \mathbf{G}_h(B_R(\mathbf{y}) \cap X)$ (au sens de la discrétisation de Gauss). Nous commençons par translater les ensembles A et A_h centrés en \mathbf{y} vers l'origine du repère. Nous devons alors utiliser un vecteur qui tient compte de la discrétisation

⁸ $\mu_i \geq 1$ d'après l'équation 2.23 page 25

puisque nous décalons A_h par le vecteur $\left[\frac{\mathbf{y}}{h}\right]$ (vecteur de nombres entiers le plus proche de $\frac{\mathbf{y}}{h}$) et nous décalons A par le vecteur $h \left[\frac{\mathbf{y}}{h}\right]$. Nous noterons alors $\tilde{A} := A - h \left[\frac{\mathbf{y}}{h}\right]$ et $\tilde{A}_h := A_h - \left[\frac{\mathbf{y}}{h}\right]$. Avec ces deux définitions et la propriété d'invariance des matrices de covariances digitales ([lemme 3.4 page 61](#)), nous obtenons :

$$\mathcal{V}_h(B_{R/h}(\mathbf{y}/h) \cap \mathbf{G}_h(X)) = \mathcal{V}_h(A_h) \quad (3.124)$$

$$= \mathcal{V}_h\left(\tilde{A}_h + \left[\frac{\mathbf{y}}{h}\right]\right) \quad (3.125)$$

$$= \mathcal{V}_h(\tilde{A}_h) \quad (3.126)$$

$$= \mathcal{V}_h(\mathbf{G}_h(\tilde{A})). \quad (3.127)$$

La dernière égalité vient du fait que $\tilde{A}_h = \mathbf{G}_h(A) - \left[\frac{\mathbf{y}}{h}\right] = \mathbf{G}_h(A - h \left[\frac{\mathbf{y}}{h}\right]) = \mathbf{G}_h(\tilde{A})$. Nous faisons de même avec la matrice de covariance continue :

$$\mathcal{V}(B_R(\mathbf{y}) \cap X) = \mathcal{V}(A) \quad (3.128)$$

$$= \mathcal{V}\left(\tilde{A} + h \left[\frac{\mathbf{y}}{h}\right]\right) \quad (3.129)$$

$$= \mathcal{V}(\tilde{A}). \quad (3.130)$$

Alors, nous pouvons réécrire l'erreur d'estimation de la matrice de covariance digitale comme :

$$\|\mathcal{V}_h(B_{R/h}(\mathbf{y}/h) \cap \mathbf{G}_h(X)) - \mathcal{V}(B_R(\mathbf{x}) \cap X)\| = \|\mathcal{V}_h(\mathbf{G}_h(\tilde{A})) - \mathcal{V}(\tilde{A})\|. \quad (3.131)$$

Détaillons maintenant $\mathcal{V}_h(\mathbf{G}_h(\tilde{A}))$:

$$\mathcal{V}_h(\mathbf{G}_h(\tilde{A})) = \begin{bmatrix} \hat{m}_h^{200}(\tilde{A}_h) & & \\ & \ddots & \\ & & \end{bmatrix} - \frac{1}{\hat{m}_h^{000}(\tilde{A}_h)} \begin{bmatrix} \hat{m}_h^{100}(\tilde{A}_h) \\ \vdots \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \hat{m}_h^{100}(\tilde{A}_h) \\ \vdots \end{bmatrix}^T. \quad (3.132)$$

En utilisant les résultats de l'équation 3.102 page 60, nous obtenons :

$$\mathcal{V}_h(\mathbf{G}_h(\tilde{A})) = \begin{bmatrix} m^{200}(\tilde{A}) + O(R^{5-\mu_2}h^{\mu_2}) & & \\ & \ddots & \\ & & \end{bmatrix} - \frac{1}{m^{000}(\tilde{A}) + O(R^{3-\mu_0}h^{\mu_0})} \begin{bmatrix} (m^{100}(\tilde{A}) + O(R^{4-\mu_1}h^{\mu_1}))^2 \\ \vdots \end{bmatrix}. \quad (3.133)$$

Il est à noter que les constantes dans les termes en grand « O » sont indépendantes de X grâce à la normalisation. La précédente équation nous donne $\mathcal{V}(\tilde{A})$ et des termes d'erreurs sur les moments. Nous allons alors chercher les bornes supérieures de ces moments dans le calcul de $\mathcal{V}_h(\mathbf{G}_h(\tilde{A}))$ en sachant que le rayon R est supérieur à h . Puisque \tilde{A} n'est pas vide et est proche de l'origine, nous pouvons alors utiliser les

équations 3.41 et 3.43 page 47 du lemme 3.2 page 47 pour l'ensemble $\tilde{A} \subset B_R(t)$, pour les points $\mathbf{t} = \mathbf{x} - h \left[\frac{\mathbf{x}}{h} \right]$, en sachant que $\|\mathbf{t}\|_\infty \leq \frac{h}{2}$. Nous obtenons alors :

$$\mathcal{V}_h(\mathbf{G}_h(\tilde{A})) = \mathcal{V}(\tilde{A}) + O(R^{5-\mu_2}h^{\mu_2}) + O(R^{5-\mu_0}h^{\mu_0}) + O(R^{5-\mu_1}h^{\mu_1}). \quad (3.134)$$

Puisque $\mathcal{V}(\tilde{A}) = \mathcal{V}(A - h \left[\frac{\mathbf{x}}{h} \right]) = \mathcal{V}(A)$ grâce à la propriété d'invariance à la translation des matrice de covariance du lemme 3.4 page 61 :

$$\mathcal{V}_h(\mathbf{G}_h(\tilde{A})) = \mathcal{V}(A) + O(R^{5-\mu_2}h^{\mu_2}) + O(R^{5-\mu_0}h^{\mu_0}) + O(R^{5-\mu_1}h^{\mu_1}). \quad (3.135)$$

□

Comme pour le calcul de la courbure en 2D ou courbure moyenne en 3D, afin d'obtenir un résultat de convergence asymptotique, nous devons placer notre estimateur digital sur le bord digital de la forme, ajoutant ainsi une erreur de positionnement. Cela équivaut à estimer les moments à une position $\mathbf{x} + \mathbf{t}$, et pour cela nous allons nous servir des précédents lemmes.

Théorème 3.9 (Convergence asymptotique de la matrice de covariance digitale [Coe+14]). Soit X une forme convexe de \mathbb{R}^3 à reach positif, dont le bord est C^3 et peut être décomposé en nombre fini de parties monotones. Alors, il existe une constante h_0 telle que pour tout pas de discrétisation $0 < h < h_0$, pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, pour un rayon $R \geq h$, nous avons⁹ :

$$\begin{aligned} \forall 0 < h < h_0, \quad \forall \mathbf{x} \in \partial X, \quad \forall \hat{\mathbf{x}} \in \partial[\mathbf{G}_h(X)]_h \text{ avec } \|\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\|_\infty \leq h, \\ \left\| \mathcal{V}_h(B_{R/h}(\hat{\mathbf{x}}/h) \cap \mathbf{G}_h(X)) - \mathcal{V}(B_R(\mathbf{x}) \cap X) \right\| \leq O(\|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|R^4) + \sum_{i=0}^2 O(R^{5-\mu_i}h^{\mu_i}), \end{aligned} \quad (3.136)$$

La constante cachée derrière le terme en grand « O » ne dépend pas de la taille de la forme ni de sa géométrie. $\|\cdot\|$ est la norme spectrale des matrices.

Démonstration. Le fait que $\|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|_\infty \leq h \leq R$ implique que $B_R(\mathbf{x}) \cap X$ et $B_R(\hat{\mathbf{x}}) \cap X$ ne sont pas vides. Nous séparons alors la différence des matrices en deux parties :

$$\begin{aligned} & \left\| \mathcal{V}_h(B_{R/h}(\hat{\mathbf{x}}/h) \cap \mathbf{G}_h(X)) - \mathcal{V}(B_R(\mathbf{x}) \cap X) \right\| \\ & \leq \left\| \mathcal{V}_h(B_{R/h}(\hat{\mathbf{x}}/h) \cap \mathbf{G}_h(X)) - \mathcal{V}(B_R(\hat{\mathbf{x}}) \cap X) \right\| + \left\| \mathcal{V}(B_R(\hat{\mathbf{x}}) \cap X) - \mathcal{V}(B_R(\mathbf{x}) \cap X) \right\|. \end{aligned} \quad (3.137)$$

Nous avons borné le premier terme par $\sum_{i=0}^2 O(R^{5-\mu_i}h^{\mu_i})$ dans le théorème 3.8 page 64 si nous l'appliquons au point $\hat{\mathbf{x}}$. Pour le second terme, nous définissons

⁹ $\mu_i \geq 1$ d'après l'équation 2.23 page 25

$\mathbf{t} := \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}$, $t := \|\mathbf{t}\|_2$, and $X' := X - \mathbf{x}$. Nous utilisons alors la propriété d'invariance à la translation des matrices de covariance ([lemme 3.4 page 61](#)) afin de déplacer les matrices à l'origine du repère :

$$\|\mathcal{V}(B_R(\hat{\mathbf{x}}) \cap X) - \mathcal{V}(B_R(\mathbf{x}) \cap X)\| = \|\mathcal{V}(B_R(\mathbf{x} + \mathbf{t}) \cap X) - \mathcal{V}(B_R(\mathbf{x}) \cap X)\| \quad (3.138)$$

$$= \|\mathcal{V}(B_R(\mathbf{x} + \mathbf{t}) \cap X - \mathbf{x}) - \mathcal{V}(B_R(\mathbf{x}) \cap X - \mathbf{x})\| \quad (3.139)$$

$$= \|\mathcal{V}((B_R(\mathbf{x} + \mathbf{t}) - \mathbf{x}) \cap (X - \mathbf{x})) - \mathcal{V}((B_R(\mathbf{x}) - \mathbf{x}) \cap (X - \mathbf{x}))\| \quad (3.140)$$

$$= \|\mathcal{V}(B_R(\mathbf{t}) \cap (X - \mathbf{x})) - \mathcal{V}(B_R(\mathbf{0}) \cap (X - \mathbf{x}))\| \quad (3.141)$$

$$= \|\mathcal{V}(B_R(\mathbf{t}) \cap X') - \mathcal{V}(B_R(\mathbf{0}) \cap X')\|. \quad (3.142)$$

Nous appliquons maintenant le [lemme 3.5 page 62](#) pour les différents moments qui interviennent dans la matrice de covariance \mathcal{V} . Pour une facilité de lecture, nous noterons $Y_{\mathbf{t}}$ l'ensemble $B_R(\mathbf{t}) \cap X'$ et $Y_{\mathbf{0}}$ l'ensemble $B_R(\mathbf{0}) \cap X'$:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{V}(Y_{\mathbf{t}}) - \mathcal{V}(Y_{\mathbf{0}})\| &= \left\| \begin{bmatrix} m^{200}(Y_{\mathbf{t}}) - m^{200}(Y_{\mathbf{0}}) & & \\ & \ddots & \\ & & \end{bmatrix} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{m^{000}(Y_{\mathbf{t}})} \begin{bmatrix} m^{100}(Y_{\mathbf{t}}) \\ \vdots \\ \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} m^{100}(Y_{\mathbf{t}}) \\ \vdots \\ \end{bmatrix}^T \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{m^{000}(Y_{\mathbf{0}})} \begin{bmatrix} m^{100}(Y_{\mathbf{0}}) \\ \vdots \\ \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} m^{100}(Y_{\mathbf{0}}) \\ \vdots \\ \end{bmatrix}^T \right\|. \quad (3.143) \end{aligned}$$

La matrice $\mathcal{V}(Y_{\mathbf{t}}) - \mathcal{V}(Y_{\mathbf{0}})$ contient alors la différence des moments géométriques du second ordre comme par exemple $m^{200}(Y_{\mathbf{t}}) - m^{200}(Y_{\mathbf{0}})$ et des quantités de la forme de $\Delta := \frac{m^{100}(Y_{\mathbf{t}})^2}{m^{000}(Y_{\mathbf{t}})} - \frac{m^{100}(Y_{\mathbf{0}})^2}{m^{000}(Y_{\mathbf{0}})}$ si nous décomposons les termes de droite. D'après le [lemme 3.5 page 62](#), nous savons que les erreurs des moments du second ordre sont bornées en $O(tR^4)$. Pour borner Δ , nous savons déjà $|m^{000}(Y_{\mathbf{t}}) - m^{000}(Y_{\mathbf{0}})| = \pi R^2(t + O(t^2) + O(tR^2))$ en utilisant le théorème 7 de [Pot+09]. Alors, nous obtenons :

$$\Delta = \frac{m^{100}(Y_{\mathbf{t}})^2}{m^{000}(Y_{\mathbf{0}}) + O(tR^2)} - \frac{m^{100}(Y_{\mathbf{0}})^2}{m^{000}(Y_{\mathbf{0}})} \quad (3.144)$$

$$= O(tR^2) \frac{m^{100}(Y_{\mathbf{t}})^2}{m^{000}(Y_{\mathbf{0}})^2} + \frac{m^{100}(Y_{\mathbf{t}})^2 - m^{100}(Y_{\mathbf{0}})^2}{m^{000}(Y_{\mathbf{0}})}. \quad (3.145)$$

Puisque $\frac{a}{b+O(x)} = \frac{a}{b} + \frac{a}{b^2}O(x)$, $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ et en utilisant de nouveau le [lemme 3.5 page 62](#), nous avons :

$$\begin{aligned}\Delta &= O(tR^4) + (m^{100}(Y_t) + m^{100}(Y_0)) \frac{m^{100}(Y_t) - m^{100}(Y_0)}{m^{000}(Y_0)} \\ &= O(tR^4) + (O(tR^3) + O(R^4)) \frac{m^{100}(Y_t) - m^{100}(Y_0)}{m^{000}(Y_0)}\end{aligned}$$

Puisque $t < R$ nous obtenons $m^{000}(Y_0) = \Theta(R^3)$, si nous utilisons le [lemme 3.5 page 62](#), nous avons :

$$\Delta = O(tR^4) + (O(tR^3) + O(R^4)) \frac{O(tR^3)}{m^{000}(Y_0)} = O(tR^4). \quad (3.146)$$

Les mêmes bornes sont trouvées pour tous les termes de la matrice. Lorsqu'on les rassemble toutes, nous obtenons le résultat du théorème. \square

3.3.3.4 Théorie de perturbation de matrices

Nous venons de montrer que la matrice de covariance digitale tend vers la matrice de covariance continue lorsque nous la calculons à partir de l'intersection de la forme avec une boule. Nous avons défini des estimateurs de courbures principales et de directions principales de courbure à partir des valeurs propres et des vecteurs propres de la matrice de covariance digitale dans le [paragraphe 3.7 page 61](#). Afin de pouvoir obtenir des preuves de convergence asymptotique, il est nécessaire de comprendre comment une erreur sur une matrice peut perturber sa décomposition. C'est pour cela que nous allons dans un premier temps présenter un résultat de la théorie de perturbation de matrices [BF60 ; SS90 ; Bha97].

Soit M et M' deux matrice symétriques, nous voulons alors quantifier la différence entre les valeurs propres (respectivement les vecteurs propres) de M et les valeurs propres (resp. les vecteurs propres) de M' comme des fonctions de la norme de $M - M'$. Par exemple, si M' est la matrice de covariance sur des données bruitées et M la matrice de covariance sur des données non bruitées, les résultats de perturbation de matrice pourront nous indiquer les bornes d'erreurs des valeurs propres (et ainsi celles de l'estimation des courbures principales).

Théorème 3.10 (Inégalité de Lidskii-Weyl). *Si $\lambda_i(M)$ désigne la i -ième valeur propre ordonnée d'un matrice symétrique M et $\lambda_i(M')$ la i -ième valeur propre ordonnée d'un matrice symétrique M' , alors :*

$$\max_i |\lambda_i(M) - \lambda_i(M')| \leq \|M - M'\|. \quad (3.147)$$

Dans notre contexte où les valeurs propres sont utilisées pour estimer les courbures principales, nous pouvons espérer une convergence de ces valeurs. Le prochain paragraphe va répondre à cette interrogation.

3.3.3.5 Convergence asymptotique des estimateurs digitaux de courbures principales

La convergence asymptotique des matrices de covariances digitales et les résultats de stabilité de la théorie de perturbation des matrices induisent la convergence asymptotique des estimateurs de courbures principales par intégration :

Théorème 3.11 (Convergence asymptotique des estimateurs digitaux de courbures principales $\hat{\kappa}_1^R$ et $\hat{\kappa}_2^R$ [Coe+14]). Soit X une forme convexe de \mathbb{R}^3 à reach positif telle que son bord ∂X est C^3 et peut être décomposée en nombre fini de parties monotones. Alors, pour la discrétisation de Gauss, les estimateurs digitaux de courbures principales $\hat{\kappa}_1^R$ et $\hat{\kappa}_2^R$ convergent asymptotiquement vers les courbures principales κ_1 et κ_2 pour des constantes positives h_0, k telles que, pour tout pas de discrétisation $h \leq h_0$, en définissant le rayon de la boule $R = kh^{\frac{1}{3}}$, nous avons :

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{x} \in \partial X, \quad \forall \hat{\mathbf{x}} \in \partial[\mathbf{G}_h(X)]_h, \text{ avec } \|\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\|_\infty \leq h, \\ |\hat{\kappa}_1^R(\mathbf{G}_h(X), \hat{\mathbf{x}}, h) - \kappa_1(X, \mathbf{x})| \leq O(h^{\frac{1}{3}}), \quad (3.148) \\ |\hat{\kappa}_2^R(\mathbf{G}_h(X), \hat{\mathbf{x}}, h) - \kappa_2(X, \mathbf{x})| \leq O(h^{\frac{1}{3}}). \quad (3.149) \end{aligned}$$

Démonstration. Nous allons prouver la convergence asymptotique pour l'estimateur digital de la première courbure principale. Le raisonnement est le même pour la seconde courbure principale. D'après la [définition 3.7 page 61](#), $\hat{\lambda}_1$ et $\hat{\lambda}_2$ sont les deux plus grandes valeurs propres de $\mathcal{V}_h(B_{R/h}(\mathbf{x}/h) \cap Z)$ avec $Z = \mathbf{G}_h(X)$. Nous désignons $M' := \mathcal{V}_h(B_{R/h}(\hat{\mathbf{x}}/h) \cap \mathbf{G}_h(X))$ et $M := \mathcal{V}(B_R(\mathbf{x}) \cap X)$. Comme M et M' sont symétriques par définition, le [théorème 3.10 page ci-contre](#) implique que les valeurs propres de M et M' sont proches, avec les mêmes bornes. Il est à noter que puisque les bornes d'erreurs tendent vers zéro lorsque h tend vers zéro, l'ordre des valeurs propres des deux matrices est le même pour un h suffisamment petit. Alors, nous pouvons écrire :

$$\hat{\kappa}_1^R(\mathbf{G}_h(X), \hat{\mathbf{x}}, h) = \frac{6}{\pi R^6} (\hat{\lambda}_2 - 3\hat{\lambda}_1) + \frac{8}{5R} \quad (3.150)$$

$$= \frac{6}{\pi R^6} \left(\lambda_2 - 3\lambda_1 + O(\|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\| R^4) + \sum_{i=0}^2 O(R^{5-\mu_i} h^{\mu_i}) \right) + \frac{8}{5R}. \quad (3.151)$$

Alors, en substituant avec l'approximation de Taylor du [lemme 3.3 page 48](#), nous obtenons :

$$\hat{\kappa}_1^R(\mathbf{G}_h(X), \hat{\mathbf{x}}, h) = \kappa_1(X, \mathbf{x}) + O(R) + O(h/R^2) + \sum_{i=0}^2 O(h^{\mu_i}/R^{1+\mu_i}), \quad (3.152)$$

avec $\mu_i \geq 1$ pour la forme X (voir [équation 2.23 page 25](#)). En donnant pour valeur $R = kh^\alpha$, k étant une constante, la valeur optimale pour α minimisant le plus les erreurs est $\frac{1}{3}$. Ainsi, nous obtenons :

$$\hat{\kappa}_1^R(\mathbf{G}_h(X), \hat{\mathbf{x}}, h) = \kappa_1(X, \mathbf{x}) + O(h^{\frac{1}{3}}). \quad (3.153)$$

□

Ces bornes d'erreurs peuvent être améliorées sur les voisinages où la courbure gaussienne n'est pas nulle. Alors, les constantes μ_i se rapprochent de 1.5. De plus, une meilleure estimation de la distance entre \mathbf{x} et $\hat{\mathbf{x}}$ permettrait d'améliorer les vitesses de convergence.

Des résultats de convergence asymptotique sur l'estimation digitale des directions principales de courbure et de la normale peuvent être également apportés. Les détails sont expliqués dans [\[Lac+16\]](#). La preuve est un peu plus compliquée que pour les courbures principales car des problèmes interviennent aux points ombilic de la surface, c'est-à-dire lorsque les deux courbures principales sont égales. De ce fait, pour tous ces points, les deux valeurs propres de la matrice de covariance coïncident et leurs vecteurs propres couvrent un plan. Cependant, nous pouvons écrire :

Théorème 3.12 (Convergence asymptotique des estimateurs digitaux de directions principales de courbure par intégration $\hat{\mathbf{w}}_1^R$ et $\hat{\mathbf{w}}_2^R$, et de l'estimateur digital des normales par intégration $\hat{\mathbf{n}}^R$ [\[Lac+16\]](#).) Soit X une forme convexe de \mathbb{R}^3 telle que son bord ∂X a un reach supérieur à ρ et est C^3 .

Alors, pour la discrétisation de Gauss, les estimateurs digitaux de directions principales de courbure par intégration convergent asymptotiquement vers les directions principales de courbure \mathbf{w}_1 et \mathbf{w}_2 sur des formes X pour des pas de discrétisation h et rayon R donnant des courbures principales distinctes. L'estimateur digital des normales par inté-

gration converge également vers la normale \mathbf{n} . Plus précisément, en donnant $R = kh^{\frac{1}{3}}$ avec k une constante positive arbitraire, nous avons :

$$\exists h_X \in \mathbb{R}^+, \forall h \in \mathbb{R}, 0 < h < h_X,$$

$$\forall \mathbf{x} \in \partial X, \forall \hat{\mathbf{x}} \in \partial[\mathbb{G}_h(X)]_h \text{ avec } \|\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\|_\infty \leq h,$$

$$\|\hat{\mathbf{w}}_1^R(\mathbb{G}_h(X), \hat{\mathbf{x}}, h) - \mathbf{w}_1(X, \mathbf{x})\| \leq \frac{1}{|\kappa_1(X, \mathbf{x}) - \kappa_2(X, \mathbf{x})|} O(h^{\frac{1}{3}}), \quad (3.154)$$

$$\|\hat{\mathbf{w}}_2^R(\mathbb{G}_h(X), \hat{\mathbf{x}}, h) - \mathbf{w}_2(X, \mathbf{x})\| \leq \frac{1}{|\kappa_1(X, \mathbf{x}) - \kappa_2(X, \mathbf{x})|} O(h^{\frac{1}{3}}), \quad (3.155)$$

$$\|\hat{\mathbf{n}}^R(\mathbb{G}_h(X), \hat{\mathbf{x}}, h) - \mathbf{n}(X, \mathbf{x})\| \leq O(h^{\frac{2}{3}}). \quad (3.156)$$

Les vecteurs propres issus de la décomposition de la matrice de covariance ne sont pas orientés. Afin de pouvoir comparer les directions principales de courbure, celles-ci doivent être orientées dans la même direction afin d'éviter les erreurs angulaires provoqués par cette absence d'orientation. La convergence asymptotique est alors valide si nous avons au préalable orienté les vecteurs dans la même direction.

La démonstration complète est donnée dans [Lac+16]. L'intuition de la preuve est d'analyser l'écart entre deux valeurs propres successives (« *eigengap* ») afin de pouvoir borner l'erreur d'estimation des vecteurs propres. Cet écart joue un rôle important dans la variation des vecteurs propres puisque plus sa valeur est petite, plus il y a de risques en cas de perturbation de la surface d'obtenir des rotations. Enfin, l'utilisation du théorème 3 de [Pot+07] sur la proximité des vecteurs propres de la matrice de covariance et des directions de courbures principales permet de conclure à une convergence asymptotique.

3.3.4 Résultats sur l'estimation de la courbure par intégration volumique de la boule

Avant de conclure sur cette méthode, nous allons montrer quelques résultats des estimateurs. Une comparaison expérimentale complète sera proposée dans le [paragraphe 3.5 page 85](#).

Les estimateurs sont définis sur des formes X de la famille \mathbb{X} des formes convexes à bord C^3 et à courbure bornée positive, cependant nous voulons tester également sur d'autres formes ne rentrant pas dans ce cadre. Nous avons choisi l'objet digital OCTAFLOWER de dimension 256^3 . L'unique paramètre de nos estimateurs est le rayon de la boule : nous avons choisi $R = 15$ pour toutes les images des [figures 3.16 page suivante](#) et [3.17 page 73](#). La carte des couleurs pour les estimateurs de courbure

moyenne, gaussienne et courbures principales va du bleu (valeur minimale) au jaune (valeur maximale).

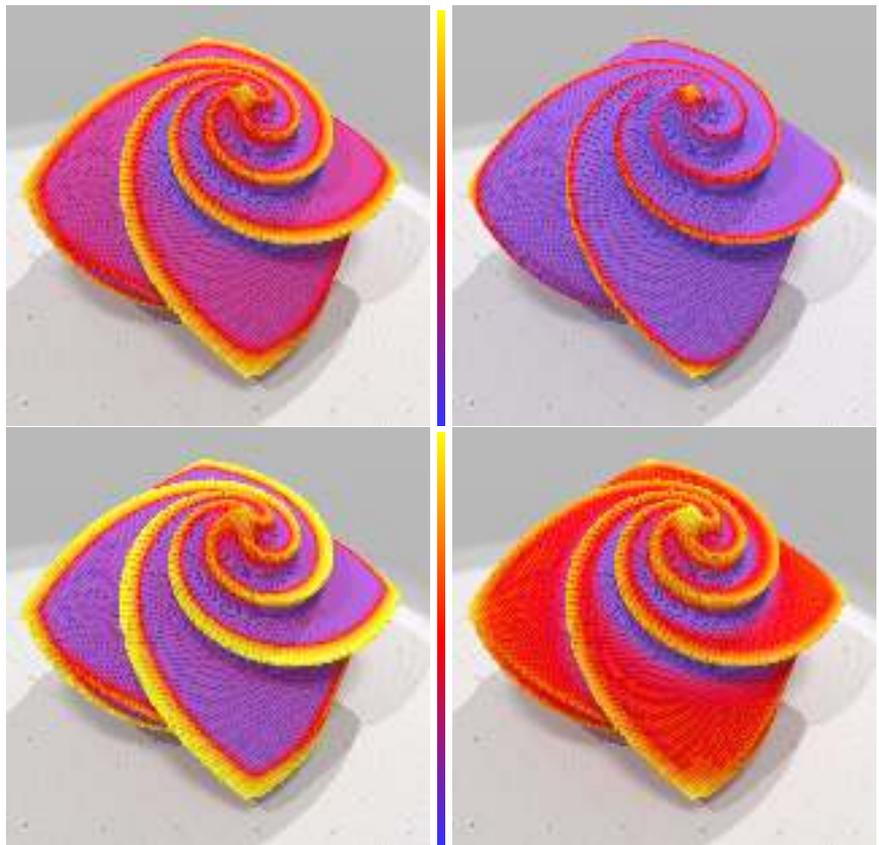


Figure 3.16 Estimateurs différentiels digitaux par intégration sur une surface digitale (OCTAFLOWER de dimension 256^3) avec $R = 15$. De gauche à droite, de haut en bas : courbure moyenne, courbure gaussienne, première et seconde courbures principales.

3.4 Estimation sans paramètre de la courbure par intégration volumique de la boule

Dans ce paragraphe, nous allons proposer une version sans paramètre des estimateurs de courbure du [paragraphe 3.3 page 45](#). Ces travaux ont été publiés dans [\[Lev+14\]](#). Dans le contexte de la convergence asymptotique, la notion d'échelle est explicitement donnée grâce au paramètre de discrétisation h . C'est d'ailleurs pour cela que les rayons de boules doivent être en relation avec h (R est en $O(h^{\frac{1}{3}})$). Cependant, pour un objet digital donné, ce choix de rayon nécessite d'étudier au préalable la forme dont nous souhaitons estimer la courbure, et la qualité d'estimation dépend de ce paramètre. La [figure 3.18](#) montre le résultat de l'estimation de la courbure moyenne et de la courbure gaussienne avec différents rayons R pour la forme OCTAFLOWER.

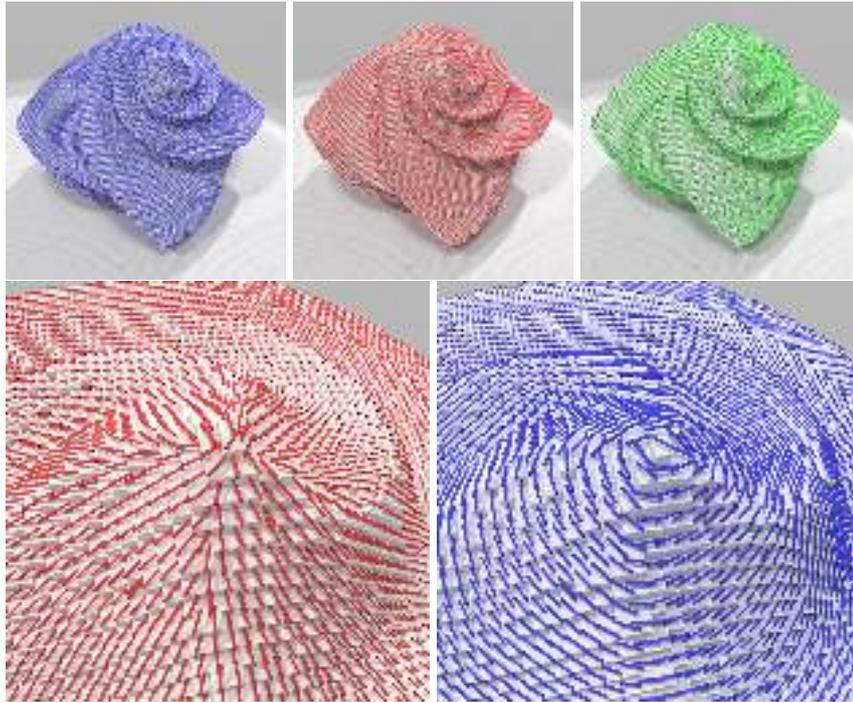


Figure 3.17 Estimateurs différentiels digitaux par intégration sur une surface digitale (OCTAFLOWER de dimension 256^3) avec $R = 15$. De gauche à droite, de haut en bas : première et seconde direction principale de courbure et normale (zoom sur la dernière ligne).

Nous voulons alors automatiquement détecter ce paramètre de rayon pour des objets digitaux Z de dimension 2 et 3 tout en garantissant les propriétés de convergence asymptotique si ceux-ci respectent les conditions de convergence des estimateurs de courbure du [paragraphe 3.3 page 45](#). La technique est simple : nous devons extraire les informations géométriques de la forme afin de pouvoir retrouver quel est le paramètre asymptotique h pour la forme donnée. Pour ce faire, nous utiliserons les segments maximaux digitaux décrits dans le [paragraphe 2.8 page 25](#).

3.4.1 Estimateur digital de courbure sans paramètre en 2D

Dans le [paragraphe 2.8 page 25](#) nous avons rappelé les propriétés des longueurs des segments maximaux sur les bords d'objets digitaux ([lemme 2.1 page 26](#)). Nous allons tirer parti de ces propriétés afin de définir un nouvel estimateur de courbure sur des objets digitaux $Z \subset \mathbb{Z}^2$. Nous allons reprendre l'estimateur digital de courbure défini dans la [définition 3.4 page 53](#). Celui-ci nécessite un rayon R qui doit être en $O(h^{\frac{1}{3}})$ afin d'avoir une convergence asymptotique de la courbure. Nous allons exploiter les primitives digitales décrits dans le [paragraphe 2.8 page 25](#), en particulier des segments maximaux de droite digitale et de leurs lois asymptotiques.

Nommons $L_D(Z)$ la longueur moyenne des segments maximaux sur Z et $\rho(Z) = L_D^2(Z)$ le carré de cette longueur. Alors, définissons un estimateur digital de courbure



Figure 3.18 Estimateurs différentiels digitaux par intégration sur une surface digitale (OCTAFLLOWER de dimension 256^3) avec trois rayons différents : $R = 15, 25, 30$. De haut en bas, courbure moyenne, courbure gaussienne.

sans paramètre en 2D $\hat{\kappa}^*$ pour tout pointel $\mathbf{p} \in Bd(Z)$ (le [paragraphe 2.4 page 12](#) introduit la notion de pointel et plus généralement la topologie de Khalimsky qui sera utilisée ici) :

Définition 3.8 Soit une forme $Z \subset \mathbb{Z}^2$. L'estimateur digital de courbure sans paramètre en 2D $\hat{\kappa}^*$ au pointel $\mathbf{p} \in Bd(Z)$ est défini comme :

$$\hat{\kappa}^*(Z, \mathbf{p}) := \frac{3\pi}{2\rho(Z)} - \frac{3A(Z, \mathbf{p})}{\rho(Z)^3} \quad (3.157)$$

où $\rho(Z) = L_D^2(Z)$ et $A(Z, \mathbf{p}) = \text{Card}(B_{\rho(Z)}(\mathbf{p}) \cap Z)$.

Pour paraphraser cette définition, nous devons dans un premier temps calculer la moyenne des longueurs des segments discret sur le bord $Bd(Z)$ de Z . Nous élevons au carré cette longueur moyenne afin de donner ρ . Ainsi, l'estimateur $\hat{\kappa}^*$ est une fonction du nombre de points digitaux¹⁰ de Z intersecté avec une boule de rayon ρ centrée au pointel \mathbf{p} . Cette version de l'estimateur de la [définition 3.4 page 53](#) s'adapte alors à l'échelle de la forme.

Si nous souhaitons rendre compatible l'estimateur dans le cadre de la convergence asymptotique, afin qu'il puisse se comparer avec des données de l'espace euclidien,

¹⁰C'est un abus de langage désignant le centre de la cellule de Khalimsky, c'est-à-dire le spel, d'après le choix de plongement dont nous avons parlé dans le [paragraphe 2.4 page 12](#).

nous devons y appliquer un facteur d'échelle du pas de discrétisation h . En effet, comme nous l'avons dit précédemment, l'estimateur ne contient pas d'information d'échelle. De plus, pour $Z = G_h(X)$, avec $\rho(Z) = L_D^2(Z)$, nous avons (d'après le lemme 2.1 page 26) :

$$\Theta(h^{-\frac{1}{3}}) \leq L_D(Z) \leq \Theta\left(h^{-\frac{1}{3}} \log\left(\frac{1}{h}\right)\right) \quad (3.158)$$

$$\Theta(h^{-\frac{2}{3}}) \leq L_D^2(Z) \leq \Theta\left(h^{-\frac{2}{3}} \log^2\left(\frac{1}{h}\right)\right) \quad (3.159)$$

$$\Theta(h^{\frac{1}{3}}) \leq hL_D^2(Z) \leq \Theta\left(h^{\frac{1}{3}} \log^2\left(\frac{1}{h}\right)\right). \quad (3.160)$$

Ainsi, à l'exception du terme en $\log^2(\cdot)$, $h\rho(Z)$ semble être un candidat idéal comme paramètre de rayon R , puisqu'il suit $\Theta(h^{\frac{1}{3}})$, pour obtenir un estimateur digital de courbure sans paramètre.

Théorème 3.13 (Convergence asymptotique de l'estimateur digital de courbure sans paramètre $\hat{\kappa}^*$). Soit X une forme convexe de \mathbb{R}^2 telle que son bord ∂X est C^3 et sa courbure bornée non nulle. Soit $Z = G_h(X)$. Alors, avec une constante positive h_0 , nous avons :

$$\begin{aligned} \forall 0 < h \leq h_0, \quad \forall \mathbf{x} \in \partial X, \quad \forall \mathbf{p} \in Bd(Z) \text{ avec } \|h\mathbf{p} - \mathbf{x}\|_\infty \leq h, \\ \left| \frac{1}{h} \hat{\kappa}^*(Z, \mathbf{p}) - \kappa(X, \mathbf{x}) \right| \leq O\left(h^{\frac{1}{3}} \log^2\left(\frac{1}{h}\right)\right). \end{aligned} \quad (3.161)$$

Il est à noter que $\mathbf{p} \in Bd(Z)$ implique que $h\mathbf{p} \in \partial[G_h(X)]_h$.

Démonstration. Dans un premier temps, nous allons décomposer $\frac{1}{h} \hat{\kappa}^*(Z, \mathbf{p})$:

$$\frac{1}{h} \hat{\kappa}^*(Z, \mathbf{p}) = \frac{3\pi}{2h\rho(Z)} - \frac{3A(Z, \mathbf{p})}{h\rho(Z)^3} \quad (3.162)$$

$$= \frac{3\pi}{2h\rho(Z)} - \frac{3 \text{Card}(B_{\rho(Z)}(\mathbf{p}) \cap G_h(X))}{h\rho(Z)^3} \quad (3.163)$$

$$= \frac{3\pi}{2h\rho(Z)} - \frac{3 \text{Card}(B_{(h\rho(Z))/h}\left(\frac{1}{h} \cdot (h\mathbf{p})\right) \cap G_h(X), h)}{h\rho(Z)^3} \quad (3.164)$$

$$= \hat{\kappa}^R(G_h(X), \hat{\mathbf{x}}, h) \quad (\text{avec } R := h\rho(Z) \text{ et } \hat{\mathbf{x}} := h\mathbf{p}) \quad (3.165)$$

Il suffit alors de borner simplement $|\hat{\kappa}^R(G_h(X), \hat{\mathbf{x}}, h) - \kappa(G_h(X), \mathbf{x})|$ en tenant compte du comportement asymptotique de $R := h\rho(Z)$. D'après l'équation 3.160, r est compris entre deux bornes :

- Si $R = \Theta(h^{\frac{1}{3}})$, nous sommes exactement dans les hypothèses du **théorème 3.4 page 53**, et le terme d'erreur est alors en $O(h^{\frac{1}{3}})$.
- Si $R = \Theta(h^{\frac{1}{3}} \log^2(\frac{1}{h}))$, nous décomposons le terme d'erreur du **théorème 3.4 page 53** en utilisant l'équation 3.91 page 58¹¹ :

$$|\hat{\kappa}^R(\mathbf{G}_h(X), \hat{\mathbf{x}}, h) - \kappa(X, \mathbf{x})| \leq O(h\rho(Z)) + O\left(\frac{h}{(h\rho(Z))^2}\right) + O\left(\frac{h}{(h\rho(Z))^2}\right) (1 + O((h\rho(Z))^2) + O(h)) \quad (3.166)$$

$$\leq O(h^{\frac{1}{3}} \log^2(\frac{1}{h})) + O\left(\frac{h^{\frac{1}{3}}}{\log^4(\frac{1}{h})}\right) + O(h) + O\left(\frac{h^{\frac{4}{3}}}{\log^4(\frac{1}{h})}\right) \quad (3.167)$$

Alors le terme d'erreur dominant de cette expression est $O(h^{\frac{1}{3}} \log^2(\frac{1}{h}))$.

Ainsi, nous allons borner par le terme d'erreur dominant des deux possibilités. Puisque $\frac{1}{h} \hat{\kappa}^*(Z, \mathbf{p}) = \hat{\kappa}^R(\mathbf{G}_h(X), \hat{\mathbf{x}}, h)$, nous pouvons conclure que son erreur est en $O(h^{\frac{1}{3}} \log^2(\frac{1}{h}))$. \square

De ce fait, nous avons un estimateur digital de courbure convergent, ne nécessitant aucun paramètre de rayon. Le paramètre d'échelle h est présent seulement pour déterminer l'unité utilisée pour mesurer les courbures comme l'explique la **figure 3.19**.

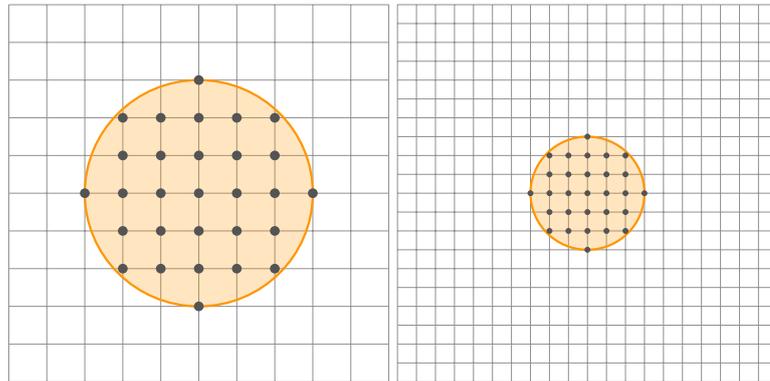


Figure 3.19 Illustration de la dépendance du paramètre d'échelle h . L'objet euclidien de gauche donne le même objet digital que l'objet euclidien de droite alors qu'ils sont à des échelles différentes. La courbure à la surface de l'objet dépend alors de h .

Nous utilisons un unique rayon pour estimer la courbure sur tout le bord de l'objet. En sachant que nous pouvons extraire des faisceaux de segments maximaux

¹¹En tenant compte que $\alpha' = 1$ et $\beta = 1$ dans le cas général

en chaque point du bord de l'objet, pouvons-nous modifier notre estimateur afin de la taille de la boule s'adapte localement à la géométrie de l'objet? En étant adaptatif, nous pouvons espérer obtenir de meilleures vitesses de convergence en moyenne (erreur en norme l_2) de l'estimateur. Le paragraphe suivant traite cette question.

3.4.2 Estimateur digital local de courbure sans paramètre en 2D

Nous allons noter $\rho(Z, \mathbf{p})$ la longueur moyenne du faisceau de segments maximaux au point \mathbf{p} élevé au carré. Nous définissons alors une version locale de l'estimateur de la [définition 3.8 page 73](#) :

Définition 3.9 Soit une forme $Z \subset \mathbb{Z}^2$. L'estimateur digital local sans paramètre de courbure en 2D au pointel $\mathbf{p} \in Bd(Z)$ est défini par :

$$\hat{\kappa}_l^*(Z, \mathbf{p}) := \frac{3\pi}{2\rho(Z, \mathbf{p})} - \frac{3A'(Z, \mathbf{p})}{\rho(Z, \mathbf{p})^3} \quad (3.168)$$

où $A'(Z, \mathbf{p}) = \text{Card}(B_{\rho(Z, \mathbf{p})}(\mathbf{p}) \cap Z)$.

Pour résumer, nous calculons le faisceau de segments maximaux en tout point \mathbf{p} du bord de Z , puis nous calculons la moyenne de leurs longueurs. Cette longueur au carré nous donne la taille à utiliser pour la boule localement pour le point \mathbf{p} . La conséquence de ceci est d'avoir une plus grosse boule sur les parties à faible courbure et de diminuer la taille de la boule sur les zones fortement courbées. La [figure 3.20](#) montre la différence entre $\hat{\kappa}^*$ et $\hat{\kappa}_l^*$: dans sa version locale, le rayon est adapté localement à la géométrie de la forme.

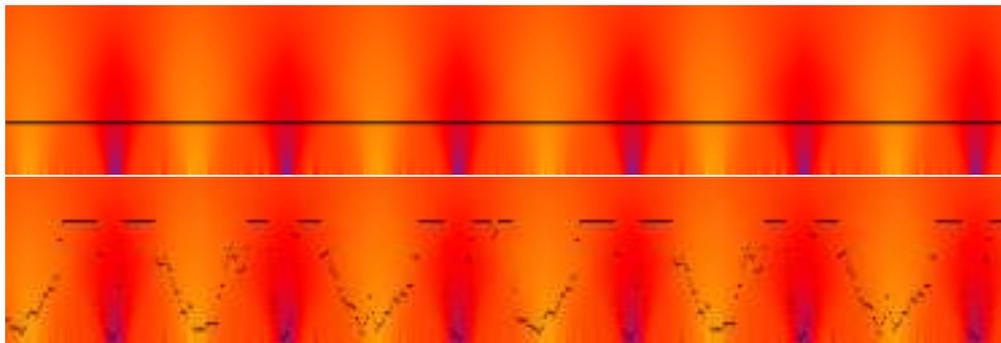


Figure 3.20 Valeur de courbure estimée en fonction du rayon R sur le bord de l'objet ACCFLOWER allant du bleu (valeur minimale) au jaune (valeur maximale). *En abscisse* : position sur la surface de l'objet, *en ordonnée* : différents rayons R . *En noir sur l'image du haut* : rayon choisi par l'estimateur $\hat{\kappa}^*$. *En noir sur l'image du bas* : différents rayons choisis par l'estimateur $\hat{\kappa}_l^*$ en fonction de la géométrie locale de la forme.

Dans cette version locale, quelques segments maximaux peuvent avoir une longueur trop importante, ce qui nous empêche d'obtenir des preuves de convergence asymptotique. En effet, si, dans le faisceau de segments maximaux, les longueurs sont globalement dans l'intervalle $\Theta(h^{-\frac{1}{3}}) \leq L_D(Z) \leq \Theta(h^{-\frac{1}{3}} \log(\frac{1}{h}))$, un bon comportement asymptotique peut être envisagé pour cet estimateur local. Cependant, des problèmes interviennent avec les segments maximaux les plus longs : à cause de leur borne supérieure en $O(h^{-\frac{1}{2}})$ aucune convergence ne peut être attendue. Néanmoins, l'évaluation expérimentale (voir [paragraphe 3.5 page 85](#)) montre de bonnes propriétés de convergence asymptotique et nous pouvons observer que la version locale $\hat{\kappa}_l^*$ est plus performante que $\hat{\kappa}^*$.

3.4.3 Estimateur digital de courbures sans paramètre en 3D

Intéressons-nous maintenant à la version en 3D de ces estimateurs sans paramètre. Nous devons adapter l'utilisation des longueurs des segments maximaux à des objets $Z \subset \mathbb{Z}^3$. Comme le montre la [figure 3.21](#), nous proposons d'utiliser des coupes de l'objet afin d'extraire des contours 2D, et ainsi pouvoir calculer les segments maximaux.

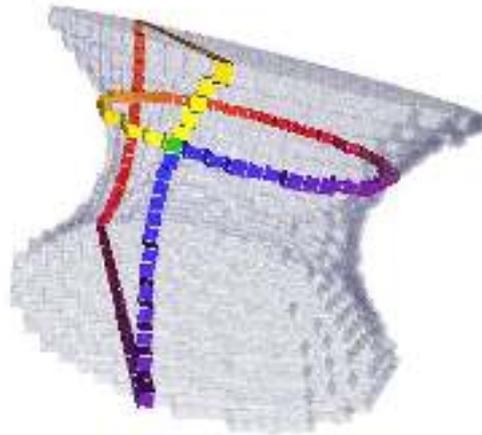


Figure 3.21 Coupes sur un objet digital 3D dans deux directions alignées sur les axes.

Formalisons cela avec une proposition sur les variétés lisses :

Proposition 3.1 *Soit un objet $X \subset \mathbb{R}^3$ avec un bord C^2 sur lequel la valeur absolue des courbures principales (notées respectivement κ_1 et κ_2) est bornée par une constante K . La normale de ∂X au point \mathbf{x} est notée $\vec{\mathbf{n}}(\mathbf{x})$. Pour tout $\mathbf{x} \in \partial X$, on considère le plan $\pi_{\vec{\mathbf{e}}}(\mathbf{x})$ contenant \mathbf{x} et perpendiculaire à un vecteur canonique $\vec{\mathbf{e}}$ de la base de \mathbb{R}^3 (i.e. $\vec{\mathbf{e}} \in \{\vec{\mathbf{x}}_1, \vec{\mathbf{x}}_2, \vec{\mathbf{x}}_3\}$).*

*Soit $\partial X_{\vec{\mathbf{e}}}(\mathbf{x})$ le bord de l'intersection $X \cap \pi_{\vec{\mathbf{e}}}(\mathbf{x})$. Alors, il y a **au moins** deux ensembles*

parmi $\partial X_{\vec{x}_1}(\mathbf{x})$, $\partial X_{\vec{x}_2}(\mathbf{x})$ et $\partial X_{\vec{x}_3}(\mathbf{x})$ qui sont localement des courbes dont la courbure est bornée par $\sqrt{2}K$ en valeur absolue.

Démonstration. Afin d'alléger la lecture, nous avons retiré les (\mathbf{x}) de toutes les notations puisqu'il ne peut y avoir d'ambiguïté. La figure 3.22 illustre les notations utilisées. Tout d'abord, si un des plans $\pi_{\vec{x}_1}$, $\pi_{\vec{x}_2}$ ou $\pi_{\vec{x}_3}$ est le plan tangent à \mathbf{x} , les

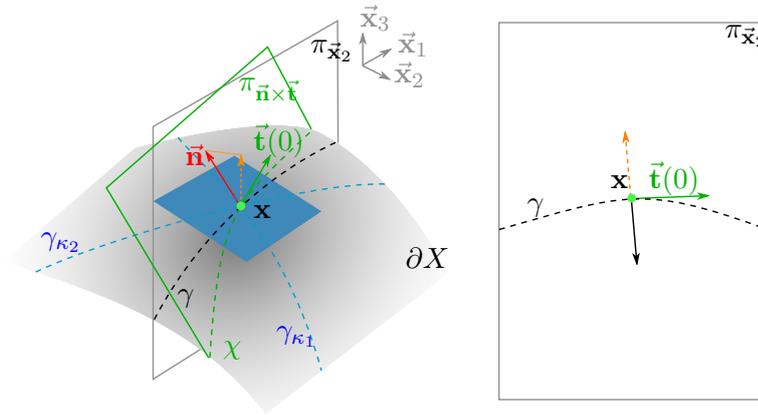


Figure 3.22 Notations pour la proposition 3.1 page précédente.

deux autres sont des plans normaux de ∂X au point \mathbf{x} , c'est-à-dire qu'ils contiennent la normale \vec{n} . Dans ce cas, le théorème d'EULER [Eul60] sur la courbure des surfaces nous dit que toutes les courbes définies par l'intersection entre le plan normal et la surface ∂X ont une courbure κ égale à :

$$\kappa_1 \cos^2 \theta + \kappa_2 \sin^2 \theta, \quad (3.169)$$

θ étant un angle. Il est alors immédiat que :

$$|\kappa| \in [\min(|\kappa_1|, |\kappa_2|), \max(|\kappa_1|, |\kappa_2|)], \quad (3.170)$$

et est de ce fait borné par K sur ces deux plans. Ensuite, pour tout $\vec{e} \in \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\}$, l'ensemble $\partial X_{\vec{e}}$ est localement une courbe 3D qui croise \mathbf{x} sur la surface ∂X . Il y a au moins un $\vec{e} \in \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\}$ dont $\vec{n} \cdot \vec{e} \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$. En effet, notons la normale $\vec{n} = a\vec{x}_1 + b\vec{x}_2 + c\vec{x}_3$ et supposons que, par exemple, $\vec{n} \cdot \vec{x}_1 \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$, alors :

$$b^2 + c^2 = 1 - a^2 = 1 - (\vec{n} \cdot \vec{x}_1)^2 < \frac{1}{2}. \quad (3.171)$$

De ce fait, $b = \vec{n} \cdot \vec{x}_2$ et $c = \vec{n} \cdot \vec{x}_3$ sont plus petits que $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Dans la suite, nous considérons seulement un vecteur $\vec{e} \in \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\}$ dont $\vec{n} \cdot \vec{e} \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Soit χ une courbe définie comme l'intersection entre ∂X et le plan $\pi_{\vec{n} \times \vec{t}}$ contenant \vec{n} et la tangente \vec{t} au point \mathbf{x} de $\partial X_{\vec{e}}$. D'après le Théorème de Meusnier [BG92],

nous avons la relation suivante entre la courbure κ_χ de χ et la courbure κ de $\partial X_{\vec{e}}$ au point \mathbf{x} :

$$\kappa_\chi = \kappa \cdot \cos \alpha \quad (3.172)$$

où α est l'angle entre les plans $\pi_{\vec{e}}$ et $\pi_{\vec{n} \times \vec{t}}$. Puisque $\cos \alpha = \vec{n} \cdot \vec{e}$ et $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \cos \alpha \leq 1$, nous avons au final :

$$|\kappa_\chi| \leq |\kappa| \leq \sqrt{2} |\kappa_\chi|. \quad (3.173)$$

À nouveau, puisque $|\kappa_\chi|$ est compris entre $[\min(|\kappa_1|, |\kappa_2|), \max(|\kappa_1|, |\kappa_2|)]$, il est borné par K et ainsi nous obtenons le résultat final. \square

Nous allons définir une version sans paramètre de l'estimateur de courbure moyenne \hat{H}^R (voir **définition 3.5** page 53). Comme pour la version 2D sans paramètre, nous allons automatiquement calculer le rayon R en fonction de la géométrie de l'objet. Le rayon $\rho'(Z)$ de l'estimateur \hat{H}^* sera alors le carré de la moyenne de certaines longueurs de segments maximaux. Nous allons détailler plus précisément cela dans les définitions suivantes (plus particulièrement à la **définition 3.12**) :

Définition 3.10 Pour un objet digital $Z \subset \mathbb{Z}^3$, l'estimateur digital de courbure moyenne sans paramètre \hat{H}^* au pointel $\mathbf{p} \in Bd(Z)$ est défini par :

$$\hat{H}^*(Z, \mathbf{p}) := \frac{8}{3\rho'(Z)} - \frac{4V_{\rho'(Z)}(Z, \mathbf{p})}{\pi\rho'(Z)^4}, \quad (3.174)$$

où $V_{\rho'(Z)}(Z, \mathbf{p}) = Card(B_{\rho'(Z)}(\mathbf{p}) \cap Z)$.

De plus, nous pouvons estimer les courbures principales, directions principales et la normale de la même manière :

Définition 3.11 Soit Z une forme digitale de \mathbb{Z}^3 , nous définissons les estimateurs digitaux sans paramètre de courbures principales $\hat{\kappa}_1^*$ et $\hat{\kappa}_2^*$, de directions principales de courbure $\hat{\mathbf{w}}_1^*$ et $\hat{\mathbf{w}}_2^*$ et de normale $\hat{\mathbf{n}}^*$ au pointel $\mathbf{p} \in Bd(Z)$ de Z comme :

$$\hat{\kappa}_1^*(Z, \mathbf{p}) := \frac{6}{\pi(\rho'(Z))^6} (\hat{\lambda}_2^* - 3\hat{\lambda}_1^*) + \frac{8}{5\rho'(Z)}, \quad \hat{\mathbf{w}}_1^*(Z, \mathbf{p}) := \hat{\nu}_1^* \quad (3.175)$$

$$\hat{\kappa}_2^*(Z, \mathbf{p}) := \frac{6}{\pi(\rho'(Z))^6} (\hat{\lambda}_1^* - 3\hat{\lambda}_2^*) + \frac{8}{5\rho'(Z)}, \quad \hat{\mathbf{w}}_2^*(Z, \mathbf{p}) := \hat{\nu}_2^* \quad (3.176)$$

$$\hat{\mathbf{n}}^*(Z, \mathbf{p}) := \hat{\nu}_3^*, \quad (3.177)$$

où $\hat{\lambda}_1^*$ et $\hat{\lambda}_2^*$ sont les deux plus grandes valeurs propres de la matrice de covariance de $B_{\rho'(Z)}(\mathbf{p}) \cap Z$, et $\hat{\nu}_1^*$, $\hat{\nu}_2^*$ et $\hat{\nu}_3^*$ ses vecteurs propres.

Précisons maintenant à quoi correspond exactement le paramètre $\rho'(Z)$. Nous apportons une définition pour sa version globale $\rho'(Z)$ ainsi que pour sa version locale $\rho'(Z, \mathbf{p})$ pour $\mathbf{p} \in Bd(Z)$:

Définition 3.12 *Pour un objet digital Z , chaque surfel $\mathbf{p} \in Bd(Z)$ est orthogonal à deux coupes $\pi_{\vec{e}_1}(\mathbf{p})$ et $\pi_{\vec{e}_2}(\mathbf{p})$. Pour toutes les coupes $\pi_{\vec{e}_i}(\mathbf{p}) \cap Z$, le faisceau de segments maximaux recouvrant \mathbf{p} détermine un ensemble de nombres entiers $l_i(\mathbf{p})$, construit à partir des longueurs de ces segments maximaux. Enfin, nous désignons par $M(\mathbf{p})$ la coupe au point \mathbf{p} contenant le segment maximal le plus long, c'est-à-dire la coupe i pour laquelle l'ensemble $l_i(\mathbf{p})$ contient le plus grand nombre entier. Alors, nous définissons :*

- $\rho'(Z)$ comme le carré de la moyenne des longueurs des segments maximaux pour toutes les coupes $\pi_{\vec{e}_i}(\mathbf{p}) \cap Z$ de Z ;
- $\rho'(Z, \mathbf{p})$ comme le carré de la moyenne des longueurs contenu dans $l_{M(\mathbf{p})}(\mathbf{p})$.

Comme en 2D, des cas pathologiques peuvent apparaître à cause du segment maximal le plus long et de sa borne $h\rho'(Z, \mathbf{p}) \in \Theta(1)$ (cas plat). Dans ces conditions, nous ne pouvons rien espérer en terme de convergence asymptotique. Mais à nouveau, expérimentalement ce mauvais comportement n'est pas observé (voir [paragraphe 3.5 page 85](#)). Supposons alors la conjecture suivante :

Conjecture 3.1 *Soit X une forme convexe de \mathbb{R}^3 , avec un bord C^3 à courbure bornée. Soit $Z := G_h(X)$, alors avec une constante positive h_0 , nous avons :*

$$\forall 0 < h \leq h_0, \quad \Theta(h^{\frac{1}{3}}) \leq h\rho'(Z) \leq \Theta(h^{\frac{1}{3}} \log^2(\frac{1}{h})). \quad (3.178)$$

La logique de cette conjecture est la suivante : en coupant l'objet (convexe) dans toutes les directions, avec la [proposition 3.1 page 78](#), nous savons qu'au moins deux des trois coupes définissent des courbes convexes avec une information de courbure bornée. Puisque deux coupes sont disponibles à partir d'un surfel comme le montre la [figure 3.22 page 79](#), au moins une coupe par surfel donne une courbe convexe à courbure bornée. Nous espérons alors qu'au moins la moitié des longueurs des segments maximaux suivent les bornes de la [conjecture 3.1](#). De plus, calculer la moyenne de ces longueurs fournit une quantité stable et cohérente qui suit également les bornes de la conjecture. La [figure 3.23 page suivante](#) confirme expérimentalement ces bornes.

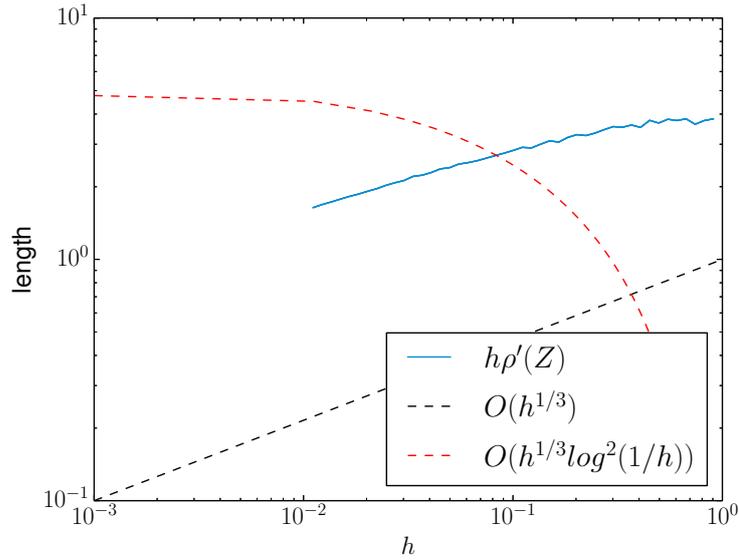


Figure 3.23 Comportement asymptotique (en échelle logarithmique) de $h\rho'(Z)$ sur l'objet « ELLIPSOID ».

Si nous supposons la **conjecture 3.1**, nous pouvons prouver alors la convergence asymptotique des estimateurs digitaux sans paramètre de courbure moyenne \hat{H}^* , courbures principales $\hat{\kappa}_1^*$ et $\hat{\kappa}_2^*$ au travers de ces deux observations :

Observation 3.1 (Convergence asymptotique de l'estimateur digital de courbure moyenne sans paramètre \hat{H}^*). Soit X une forme convexe de \mathbb{R}^3 , avec un bord C^3 à courbure bornée non nulle. Soit $Z := G_h(X)$. Alors, avec une constante positive h_0 , nous avons :

$$\forall 0 < h \leq h_0, \quad \forall \mathbf{x} \in \partial X, \quad \forall \mathbf{p} \in Bd(Z) \text{ avec } \|h\mathbf{p} - \mathbf{x}\|_\infty \leq h, \\ \left| \frac{1}{h} \hat{H}^*(Z, \mathbf{p}) - H(X, \mathbf{x}) \right| \leq O\left(h^{\frac{1}{3}} \log^2\left(\frac{1}{h}\right)\right). \quad (3.179)$$

Démonstration. En supposons la **conjecture 3.1** page précédente, la démonstration est la même que pour le **théorème 3.13** page 75. \square

Observation 3.2 (Convergence asymptotique des estimateurs digitaux sans paramètre de courbures principales $\hat{\kappa}_1^*$ et $\hat{\kappa}_2^*$). Soit X une forme convexe de \mathbb{R}^3 , avec

un bord C^3 à courbure bornée non nulle. Soit $Z := G_h(X)$. Alors, avec une constante positive h_0 , nous avons :

$$\forall 0 < h \leq h_0, \quad \forall \mathbf{x} \in \partial X, \quad \forall \mathbf{p} \in Bd(Z) \text{ avec } \|h\mathbf{p} - \mathbf{x}\|_\infty \leq h, \\ \left| \frac{1}{h} \hat{\kappa}_1^*(Z, \mathbf{p}) - \kappa_1(X, \mathbf{x}) \right| \leq O\left(h^{\frac{1}{3}} \log^2\left(\frac{1}{h}\right)\right), \quad (3.180)$$

$$\left| \frac{1}{h} \hat{\kappa}_2^*(Z, \mathbf{p}) - \kappa_2(X, \mathbf{x}) \right| \leq O\left(h^{\frac{1}{3}} \log^2\left(\frac{1}{h}\right)\right). \quad (3.181)$$

Démonstration. En suivant les même étapes que la démonstration du [théorème 3.13 page 75](#) et en supposant la [conjecture 3.1 page précédente](#), nous avons :

- Si $h\rho'(Z) = \Theta(h^{\frac{1}{3}})$, nous sommes dans les hypothèses du [théorème 3.11 page 69](#), et ainsi le terme d'erreur est en $O(h^{\frac{1}{3}})$.
- Si $h\rho'(Z) = \Theta(h^{\frac{1}{3}} \log^2(\frac{1}{h}))$, nous décomposons le terme d'erreur de l'équation [3.152 page 70](#)¹² :

$$\left| \frac{1}{h} \hat{\kappa}_1^*(Z, \mathbf{p}) - \kappa_1(X, \mathbf{x}) \right| = \left| \hat{\kappa}_1^R(G_h(X), \hat{\mathbf{x}}, h) - \kappa_1(X, \mathbf{x}) \right| \\ \leq O(R) + O\left(\frac{h}{R^2}\right) \quad (3.182)$$

$$\leq O\left(h^{\frac{1}{3}} \log^2\left(\frac{1}{h}\right)\right) + O\left(\frac{h^{\frac{1}{3}}}{\log^4\left(\frac{1}{h}\right)}\right). \quad (3.183)$$

La borne supérieure de ces deux termes d'erreurs est $O\left(h^{\frac{1}{3}} \log^2\left(\frac{1}{h}\right)\right)$. Nous avons alors :

$$\Theta(h^{\frac{1}{3}}) \leq h\rho'(Z) \leq \Theta(h^{\frac{1}{3}} \log^2(\frac{1}{h})) \Rightarrow \left| \frac{1}{h} \hat{\kappa}_1^*(Z, \mathbf{p}) - \kappa_1(X, \mathbf{x}) \right| \leq O(h^{\frac{1}{3}} \log^2(\frac{1}{h})). \quad (3.184)$$

La démonstration pour $\hat{\kappa}_2^*$ est similaire. \square

3.4.4 Estimateur digital local de courbures sans paramètre en 3D

Comme en 2D, nous pouvons changer le rayon de la boule localement en fonction de la géométrie de la forme grâce aux longueurs des segments maximaux, et comme en 2D, nous ne pouvons pas espérer de convergence asymptotique à cause du comportement des segments maximaux les plus longs. Cependant, nous pouvons

¹²avec $\mu_i = 1$ dans le cas général

déjà les définir, et nous verrons dans la partie expérimentale du [paragraphe 3.5 page 85](#) que nous obtenons des convergences.

Définition 3.13 Pour un objet digital $Z \subset \mathbb{Z}^3$, l'estimateur digital local de courbure moyenne sans paramètre \hat{H}_l^* au point $\mathbf{p} \in Bd(Z)$ est défini par :

$$\hat{H}_l^*(Z, \mathbf{p}) := \frac{8}{3\rho'(Z, \mathbf{p})} - \frac{4V_{\rho'(Z, \mathbf{p})}(Z, \mathbf{p})}{\pi\rho'(Z, \mathbf{p})^4}, \quad (3.185)$$

où $V_{\rho'(Z, \mathbf{p})}(Z, \mathbf{p}) = Card(B_{\rho'(Z, \mathbf{p})}(\mathbf{p}) \cap Z)$.

Définition 3.14 Soit Z une forme digitale de \mathbb{Z}^3 , nous définissons les estimateurs digitaux local sans paramètre de courbures principales $\hat{\kappa}_{1l}^*$ et $\hat{\kappa}_{2l}^*$, de directions principales de courbure $\hat{\mathbf{w}}_{1l}^*$ et $\hat{\mathbf{w}}_{2l}^*$ et de normale $\hat{\mathbf{n}}_l^*$ au point $\mathbf{p} \in Bd(Z)$ de Z comme :

$$\hat{\kappa}_{1l}^*(Z, \mathbf{p}) := \frac{6}{\pi(\rho'(Z, \mathbf{p}))^6}(\hat{\lambda}_{2l}^* - 3\hat{\lambda}_{1l}^*) + \frac{8}{5\rho'(Z)}, \quad \hat{\mathbf{w}}_{1l}^*(Z, \mathbf{p}) := \hat{\nu}_{1l}^* \quad (3.186)$$

$$\hat{\kappa}_{2l}^*(Z, \mathbf{p}) := \frac{6}{\pi(\rho'(Z, \mathbf{p}))^6}(\hat{\lambda}_{1l}^* - 3\hat{\lambda}_{2l}^*) + \frac{8}{5\rho'(Z)}, \quad \hat{\mathbf{w}}_{2l}^*(Z, \mathbf{p}) := \hat{\nu}_{2l}^* \quad (3.187)$$

$$\hat{\mathbf{n}}_l^*(Z, \mathbf{p}) := \hat{\nu}_{3l}^*, \quad (3.188)$$

où $\hat{\lambda}_{1l}^*$ et $\hat{\lambda}_{2l}^*$ sont les deux plus grandes valeurs propres de la matrice de covariance de $B_{\rho'(Z, \mathbf{p})}(\mathbf{p}) \cap Z$, et $\hat{\nu}_{1l}^*$, $\hat{\nu}_{2l}^*$ et $\hat{\nu}_{3l}^*$ ses vecteurs propres.

3.4.5 Optimisation des estimateurs locaux sans paramètre et résultats

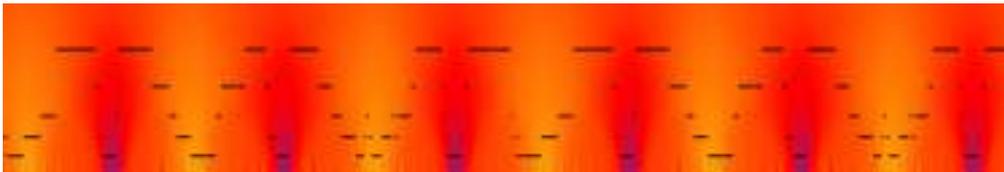


Figure 3.24 Valeur de courbure estimée en fonction du rayon R sur le bord de l'objet ACCFLOWER allant du bleu (valeur minimale) au jaune (valeur maximale). En abscisse : position sur la surface de l'objet, en ordonnée : différents rayons R . En noir sur l'image : $K = 5$ rayons choisis pour l'algorithme de K -moyennes avec les rayons de $\hat{\kappa}_l^*$.

Nous pouvons améliorer le temps de calcul des estimateurs qui s'adaptent à la géométrie locale du bord de l'objet $\hat{\kappa}_l^*$, \hat{H}_l^* et autres. En effet, sur des objets à forte résolution (c'est-à-dire h petit), ces estimateurs sont très coûteux en temps car nous perdons l'optimisation du calcul incrémental dont nous parlerons dans la partie dédiée à la complexité et aux temps de calcul ([paragraphe 3.5.2 page 91](#)) et dans la partie implémentation ([paragraphe 4.3 page 144](#)). Pour donner l'intuition de la

nécessité d'améliorer le temps de calcul, nous optimisons le calcul pour les déplacements 0-adjacent en réutilisant une partie du résultat de l'itération précédente, diminuant ainsi la complexité d'une dimension (passant de la taille de la boule à uniquement ses éléments de surface) et réduisant fortement le temps de calcul. Ici, la version locale des estimateurs sans paramètre respectent la contrainte de déplacement mais le changement local de rayon empêche de précalculer initialement les masques de déplacement. Ainsi, cela revient à calculer sur des boules entières à chaque itération. Nous proposons de limiter le nombre de rayons locaux à K rayons. Cela aura pour conséquence la possibilité de précalculer les boules de différents rayons, au lieu de les recalculer localement pour chaque élément de surface. Nous introduisons ici les variantes des K -moyennes (« K -means »), limitant ainsi le nombre de rayons de boule disponibles à K . Pour se faire, nous distribuons les longueurs des segments maximaux dans K partitions en minimisant la somme des carrés des différences des longueurs. La figure 3.24 page précédente montre le résultat de la répartition des rayons pour $K = 5$. À noter que la couverture tangentielle de la surface est très rapide.

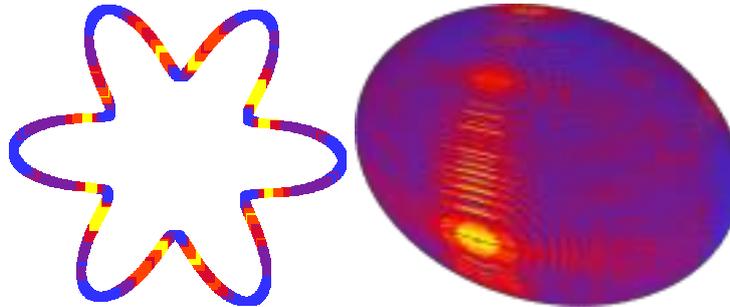


Figure 3.25 Partitionnement du carré des longueurs des segments maximaux en utilisant l'algorithme de K -moyennes (avec $K = 5$), sur le bord de l'objet « FLOWER » et de l'objet « ELLIPSOID » .

La figure 3.25 illustre ces partitions sur deux objets : « FLOWER » pour un objet 2D et « ELLIPSOID » en 3D. Une comparaison complète de tous les estimateurs présentés dans cette section est disponible dans le paragraphe 3.5. La figure 3.26 montre le résultat de l'estimateur digital local sans paramètre \hat{H}_l^* sur des objets de différentes tailles. Nous pouvons alors voir que l'estimateur s'adapte parfaitement à la géométrie locale de la forme et affiche une cohérence de résultat quelque soit l'échelle de l'objet.

3.5 Analyse comparative des estimateurs de courbure

Dans cette section, nous allons évaluer expérimentalement tous les estimateurs de courbure présentés dans ce chapitre.



Figure 3.26 Courbure moyenne affichée sur des objets « BUNNY » à différentes résolutions : 64^3 , 128^3 et 256^3 . La valeur de courbure moyenne est obtenue avec l'estimateur digital local sans paramètre \hat{H}_l^* (la couleur jaune est la plus haute valeur de courbure, la couleur bleue est la plus petite).

3.5.1 Méthodologie d'évaluation

Table 3.2 Équations, paramètres et domaines des formes euclidiennes considérées pour l'évaluation expérimentale ($t \in [0, 2\pi]$ pour les courbes paramétriques). Les illustrations sont disponibles avec la figure 3.27 page suivante.

Forme	Équation (paramétrique en 2D, implicite en 3D)	Paramètres	Domaine	k_{min}	k_{max}
ELLIPSE	$(x(t), y(t)) = (\rho(t) \cdot \cos(t), \rho(t) \cdot \sin(t))$ avec $\rho(t) = \frac{b}{\sqrt{1 - (a^2 - b^2)/a^2 \cdot \cos(t + \phi)}}$	$(a, b) = (20, 7)$	$[-20, 20]^2$	0.018	0.408
FLOWER	$(x(t), y(t)) = (\rho(t) \cdot \cos(t), \rho(t) \cdot \sin(t))$ avec $\rho(t) = r_1 + r_2 \cdot \cos(p \cdot t)$	$(r_1, r_2, p) = (20, 7, 6)$	$[-20, 20]^2$	-1.414	0.383
ACCFLOWER	$(x(t), y(t)) = (\rho(t) \cdot \cos(t), \rho(t) \cdot \sin(t))$ avec $\rho(t) = r_1 + r_2 \cdot \cos(p \cdot t^3)$	$(r_1, r_2, p) = (20, 5, 3)$	$[-20, 20]^2$	-10.45	3.1482
SPHERE	$x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$	$a = 9$	$[-10, 10]^3$	0.111	0.111
ROUNDED CUBE	$x^4 + y^4 + z^4 - a^4 = 0$	$a = 9$	$[-10, 10]^3$	0	0.282
Surface de GOURSAT	$ax^4 + ay^4 + az^4 + bx^2 + by^2 + bz^2 + c = 0$	$(a, b, c) = (0.03, -2, -8)$	$[-10, 10]^3$	-0.15	0.453

Tous les estimateurs présentés ont été mis en œuvre dans DGtal [Dgt]. Nous reviendrons plus tard sur la mise en œuvre et l'optimisation de ces estimateurs (voir paragraphe 4.3 page 144). DGtal est une bibliothèque C++ open-source dédiée aux outils de géométrie digitale. En plus de proposer nos estimateurs, cette bibliothèque nous permet de construire des formes paramétriques ou implicites en dimension 2 et 3 pour n'importe quel pas de discrétisation h , s'inscrivant dans un processus d'évaluation de convergence asymptotique. De plus, plusieurs estimateurs de courbure de la littérature sont disponibles, rendant facile l'évaluation comparative. Le tableau 3.2 et la figure 3.27 page suivante présentent les formes continues considérées dans cette évaluation. Il est à noter que pour les estimateurs présentés dans ce chapitre, seulement les formes convexes à bord C^3 (« ELLIPSE », « SPHERE », « ROUNDED CUBE », « ELLIPSOID ») respectent les hypothèses des théorèmes de

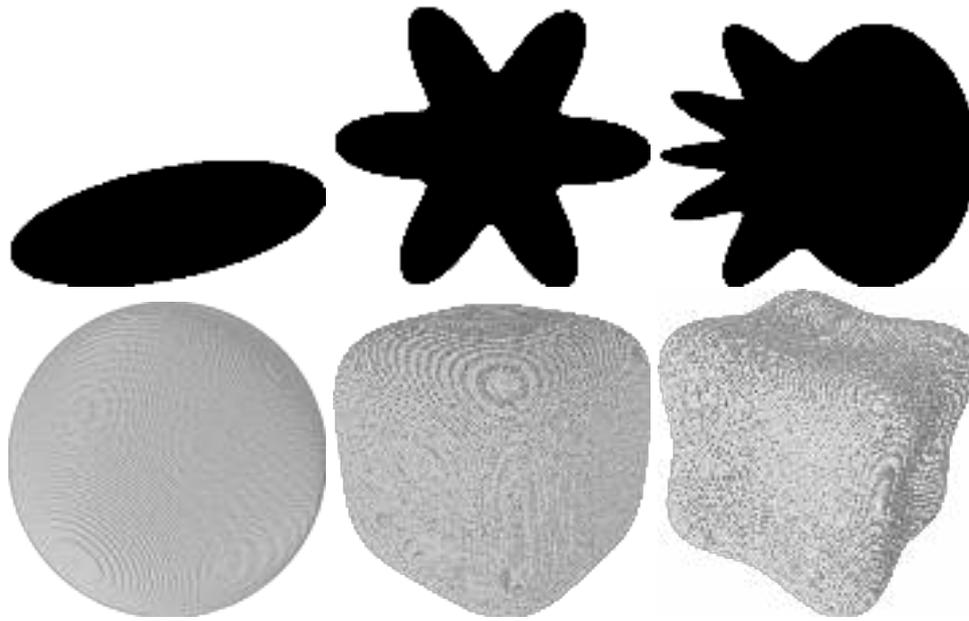


Figure 3.27 Illustration de formes 2D et 3D considérées pour l'évaluation expérimentale (se référer au [tableau 3.2 page ci-contre](#) pour les équations et les paramètres utilisés). De gauche à droite, de haut en bas : ELLIPSE, FLOWER, ACCFLOWER, SPHERE, ROUNDED CUBE et Surface de GOURSAT.

convergence. Cependant, nous pouvons expérimentalement évaluer le comportement de nos estimateurs lorsque nous considérons des formes qui ne satisfont pas les hypothèses, comme les formes avec des parties non convexes.

Pour l'ensemble des formes que nous analysons, nous allons comparer les valeurs de courbure estimées avec les valeurs euclidiennes attendues. Grâce à l'utilisation de courbes et surfaces paramétriques, nous connaissons en tout point du bord de la forme l'information de courbure, rendant la comparaison possible. Ainsi les vecteurs d'erreurs entre les valeurs estimées et les valeurs euclidiennes sont alors calculés avec la norme l_2 et la norme l_∞ (équivalent au pire cas). Considérons a comme l'ensemble des valeurs de courbure euclidienne du bord de l'objet, et b l'ensemble des valeurs estimées; alors les normes l_2 (appelée norme moyenne) et l_∞ (celle qui nous intéresse lorsque nous nous intéressons à la convergence asymptotique, comprendre convergence uniforme) se calculent comme suit :

$$\|a - b\|_2 := \sqrt{\left(\sum_i (a_i - b_i)^2\right)} \quad (\text{norme } l_2) \quad (3.189)$$

$$\|a - b\|_\infty := \max(|a - b|) \quad (\text{norme } l_\infty). \quad (3.190)$$

Nous exportons les résultats sur des graphes dont les échelles sont logarithmiques (avec en abscisse les pas de discrétisation h et en ordonnée l'erreur l_2 ou l_∞) afin de pouvoir comparer plus facilement les vitesses de convergence des estimateurs. Il est à

noter que pour chaque graphe, le pas de discrétisation h décroît (donc l'objet digital se raffine) de la droite vers la gauche. La pente nous informe alors sur la vitesse de convergence de l'estimateur. Plus la pente est forte, plus la vitesse de convergence est grande. Si elle ne décroît pas, alors nous pouvons dire qu'expérimentalement, l'estimateur ne converge pas.

3.5.2 Analyse expérimentale de la convergence asymptotique

Nous allons dans un premier temps confirmer le choix du paramètre α utilisé pour guider le rayon de la boule dans les preuves des [théorèmes 3.6 page 57](#), [3.7 page 58](#) et [3.11 page 69](#).

Choix de $\alpha = \frac{1}{3}$ Dans ces théorèmes, nous avons démontré que choisir un rayon de boule en $R = kh^\alpha$ avec $\alpha = \frac{1}{3}$ permettait de minimiser les termes d'erreur et d'obtenir une convergence asymptotique en $O(h^{\frac{1}{3}})$ pour les estimateurs digitaux de courbure en 2D $\hat{\kappa}^R$, de courbure moyenne \hat{H}^R et de courbures principales $\hat{\kappa}_1^R$ et $\hat{\kappa}_2^R$ en 3D par intégration. La première ligne des [figures 3.28 page 96](#), [3.29 page 97](#) et [3.30 page 98](#) nous montre les vitesses de convergence asymptotique pour 5 valeurs de α différentes : $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{7}$ et $\frac{1}{4}$. L'enjeu du choix de α est également algorithmique, puisqu'il guide la taille du rayon, et donc influe sur le temps de calcul.

Nous observons expérimentalement pour l'objet « ELLIPSE » ([figure 3.28 page 96](#)) une convergence asymptotique pour toutes les valeurs de α à l'exception de $\alpha = \frac{1}{2}$. Comme suggéré dans la preuve du [théorème 3.6 page 57](#), $\alpha = \frac{1}{3}$ donne expérimentalement un comportement (en norme l_∞) en $O(h^{\frac{1}{3}})$ (voir le [tableau 3.3](#) pour les vitesses de convergence observées). Le théorème est défini pour le cas général des formes convexes à bord C^3 , mais comme précisé dans le théorème, le terme d'erreur en grand « O » peut être amélioré si nous ajoutons des hypothèses sur la forme. Cela explique pourquoi de meilleures vitesses de convergence semblent être obtenues lorsque $\alpha = \frac{2}{7}$ et $\frac{1}{4}$. Nous pouvons également observer la convergence asymptotique en $O(h^{\frac{1}{3}})$ sur les formes non-convexes pour $\alpha = \frac{1}{3}$. Il est intéressant de noter que des valeurs de α supérieures à $\frac{1}{3}$ (donc avec une taille de boule supérieure) pour cette catégorie de forme semble obtenir de meilleurs estimations.

Nous avons fait également une évaluation de ce paramètre α sur des formes digitales 3D (voir [figure 3.31 page 99](#)) « ROUNDED CUBE » et surface de « GOURSAT » pour les estimateurs de courbure moyenne \hat{H}^R et de courbures principales $\hat{\kappa}_1^R$ et $\hat{\kappa}_2^R$. Les preuves des [théorèmes 3.7 page 58](#) et [3.11 page 69](#) ont statué à $\alpha = \frac{1}{3}$ afin de minimiser les termes d'erreurs et obtenir une convergence en $O(h^{\frac{1}{3}})$. Nous

Table 3.3 Vitesse de convergence observée de $\hat{\kappa}^R$ en fonction du paramètre α avec $R = kh^\alpha$ sur l'objet « ELLIPSE », en utilisant de l'approximation aux moindres carré pour approcher les données.

α	Vitesse de convergence observée
1/2	$O(h^{0.024})$
2/5	$O(h^{0.24})$
1/3	$O(h^{0.38})$
2/7	$O(h^{0.41})$
1/4	$O(h^{0.44})$

pouvons observer que pour les formes convexes comme non-convexes, $\alpha = \frac{1}{3}$ amène à la vitesse de convergence attendue pour ces trois estimateurs. Nous pouvons noter que de meilleures vitesses de convergence peuvent être obtenues avec $\alpha = \frac{2}{7}$ et $\frac{1}{4}$ pour les mêmes raisons qu'en 2D.

Nous pouvons alors conclure qu'expérimentalement le choix de $\alpha = \frac{1}{3}$ est cohérent pour obtenir une vitesse de convergence des estimateurs $\hat{\kappa}^R, \hat{H}^R, \hat{\kappa}_1^R, \hat{\kappa}_2^R$ en $O(h^{\frac{1}{3}})$.

Convergence expérimentale des estimateurs digitaux de courbure en 2D Avec la seconde ligne des figures 3.28 page 96, 3.29 page 97 et 3.30 page 98, nous comparons l'estimateur digital de courbure par intégration $\hat{\kappa}^R$ (nommé **II** sur les graphes, avec $R = kh^{\frac{1}{3}}$) avec les estimateurs **BC** [Esb+11], **MDSS** [Coe+01 ; DV+07] et **MDCA** [RL11] (que nous avons décrit dans l'état de l'art, paragraphe 3.2 page 30) avec les métriques d'erreurs l_2 et l_∞ . Sur ces formes non bruitées, nous observons que les vitesses de convergence en l_∞ de notre estimateur sont proches de l'estimateur **MDCA**. Nous observons aussi que l'estimateur **BC** converge mais avec des vitesses de convergence plus faibles. Nous noterons également que l'estimateur **MDSS** n'affiche pas de convergence asymptotique expérimentalement sur nos données. En considérant la norme l_2 , nous pouvons observer que **BC** fournit de meilleures vitesses de convergence que notre estimateur, notamment sur l'objet « ELLIPSE », mais lorsque nous mettons en parallèle avec les graphes d'erreur l_∞ , nous pouvons voir que notre estimateur possède un meilleur comportement que **BC** lorsque nous raffinons l'objet. D'ailleurs cette différence de vitesse de convergence est plus faible sur les objets non convexes.

Nous pouvons noter que les calculs de notre estimateur vont à des résolutions supérieures à ceux des autres estimateurs. La raison est simple : dans notre implémentation de l'estimateur **BC** dans DGTAL, la taille du masque¹³ devient trop importante pour de petites valeurs de h , ce qui implique des problèmes de surcharge de la mémoire disponible. Pour l'estimateur **MDCA**, la reconnaissance d'arcs circulaires dans DGTAL est guidé par un prédicat géométrique basé sur le calcul du déterminant

¹³Dans notre implémentation dans DGTAL, nous utilisons comme taille de masque : $d/h^{\frac{1}{3}}$ où d est le diamètre du contour.

de coordonnées de points au carré. Alors, sur des valeurs de h petites, des problèmes de capacité numérique et des instabilités apparaissent (qui peuvent être corrigés en considérant des nombres entiers de précision arbitraire mais cela contrebalancerait avec des problèmes d'efficacité). Notre estimateur n'est pas sensible à cela. Pour notre expérimentation la plus fine, le pas de discrétisation est $h = 0.00017$, ce qui donne des formes digitales définies sur des domaines digitaux de $235 \cdot 295^2$. À cette échelle, le contour de l'objet « ELLIPSE » contient 648 910 éléments.

Sur la troisième ligne des figures 3.28 page 96 et 3.29 page 97, nous comparons la variante sans paramètre de notre estimateur digital de courbure par intégration $\hat{\kappa}^*$ ainsi que celui qui adapte localement le rayon R en fonction de la géométrie locale de la forme $\hat{\kappa}_l^*$ avec comme référence $\hat{\kappa}^R$ et **MDCA**. Nous observons que tous les estimateurs convergent asymptotiquement avec une vitesse de convergence d'au moins $O(h^{\frac{1}{3}})$, à l'exception de $\hat{\kappa}_l^*$ pour l'objet « ELLIPSE » qui a une vitesse un peu inférieure. Cela n'est pas anormal puisque la borne d'erreur de cet estimateur est en $O\left(h^{\frac{1}{3}} \log^2\left(\frac{1}{h}\right)\right)$.

Nous avons également testé l'estimateur $\hat{\kappa}_l^*$ lorsque nous limitons le nombre de rayons disponibles avec l'approche des K -moyennes (voir paragraphe 3.4.5 page 84) pour $K = 5, 10$ et 50 (nommés $\hat{\kappa}_{K=5}^*$, $\hat{\kappa}_{K=10}^*$ et $\hat{\kappa}_{K=50}^*$). Ces tests ont été uniquement faits avec la métrique d'erreur l_2 car, comme nous l'avons expliqué, l'objectif principal de ces estimateurs n'est pas la convergence uniforme mais la diminution du temps de calcul par rapport à $\hat{\kappa}_l^*$. En effet, pour de petits pas de discrétisation h , $\hat{\kappa}_l^*$ est très consommateur de temps de calcul (nous devons créer une nouvelle boule digitale à chaque point). Ainsi, nous voulons analyser les erreurs que génère cette approximation. Nous remarquons alors que l'erreur l_2 de $\hat{\kappa}_l^*$ est inférieure à celles de $\hat{\kappa}^*$ et $\hat{\kappa}^R$, grâce à la nature adaptative de cet estimateur, ce qui était l'objectif visé. Nous remarquons également de très bonnes précisions asymptotiques des résultats des estimateurs $\hat{\kappa}_{K=5}^*$, $\hat{\kappa}_{K=10}^*$ et $\hat{\kappa}_{K=50}^*$, même lorsque le nombre de partitions est faible.

Convergence expérimentale des estimateurs digitaux de courbure en 3D Tout d'abord, la figure 3.36 page 104 montre le résultat de l'estimateur \hat{H}^R sur plusieurs objets courant de la littérature : « BUNNY », « ARMADILLO », « DRAGON », « LUCY » et « ASIAN DRAGON ». Nous avons également comparé expérimentalement nos estimateurs digitaux de courbures moyenne \hat{H}^R et de courbures principales $\hat{\kappa}_1^R$ et $\hat{\kappa}_2^R$ avec l'estimateur **JETFITTING** [CP05]¹⁴ décrit dans la paragraphe 3.2 page 30, avec les métriques l_2 et l_∞ sur les objets « SPHERE » (figure 3.32 page 100), « ROUNDED CUBE » (figure 3.33 page 101) et surface de « GOURSAT » (figure 3.34 page 102). Nous observons que **JETFITTING** obtient de meilleurs résultats sur « SPHERE » pour la

¹⁴Nous utilisons le même voisinage que pour notre estimateur.

courbure moyenne et les courbures principales que nos estimateurs. Pour l'estimation de la courbure moyenne sur « **ROUNDED CUBE** » et surface de « **GOURSAT** », nous obtenons des vitesses de convergence similaires à **JETFITTING** avec des erreurs l_∞ légèrement moins importantes avec notre estimateur. Pour les courbures principales sur ces objets, nos estimateurs obtiennent de bien meilleures vitesses de convergence que **JETFITTING**. Si nous regardons les erreurs moyennes (métrique l_2), des comportements similaires sont observés. À noter que pour notre expérimentation la plus fine, le pas de discrétisation était de $h = 0.04$, les formes digitales sont définies sur un domaine digital de 500^3 . À cette échelle, le bord de l'objet digital « **ROUNDED CUBE** » contient 1 125 222 éléments.

Comme en 2D, nous avons testé expérimentalement les versions sans paramètre de nos estimateurs de courbure moyenne et de courbures principales \hat{H}^* , $\hat{\kappa}_1^*$ et $\hat{\kappa}_2^*$, ainsi que les variantes adaptant le rayon R localement en fonction de la géométrie locale de la forme \hat{H}_l^* , $\hat{\kappa}_{1l}^*$ et $\hat{\kappa}_{2l}^*$ et les versions utilisant les K -moyennes diminuant ainsi le temps de calcul (avec $K = 5, 10$ et 50). Le constat est le même qu'en 2D ; la vitesse de convergence de l'erreur l_2 de ces estimateurs est bien en dessous de $O(h^{\frac{1}{3}})$, même lorsque le nombre de rayons possibles est bas. En ce qui concerne la vitesse de convergence de l'erreur l_∞ des estimateurs \hat{H}^* , $\hat{\kappa}_1^*$ et $\hat{\kappa}_2^*$, ceux-ci semblent expérimentalement suivre la vitesse attendue en $O(h^{\frac{1}{3}})$.

Complexité et temps de calcul Un des éléments qui peut être important dans le choix d'un estimateur est son temps de calcul. En fonction de l'utilisation que nous souhaitons en faire, il peut être judicieux de connaître le comportement d'un estimateur face à des données de plus en plus grandes afin d'en extraire un profil de temps de calcul.

Bien que nos estimateurs soient des estimateurs intégrant des volumes, ceux-ci sont comparables en complexité à des estimateurs surfaciques. En effet, une implémentation naïve calculerait une boule digitale, la centrerait sur le bord de l'objet digital à analyser, calculerait son intersection avec la forme à chaque élément de surface de l'objet. Nous obtiendrions une complexité en $O((R/h)^d)$ par élément de surface, c'est-à-dire la taille de la boule digitale au pas de discrétisation h . Cependant, nous pouvons optimiser cet algorithme en utilisant les avantages que nous offre la structure des surfaces digitales : si nous nous déplaçons sur des éléments de surfaces adjacents, une partie du calcul de l'intersection entre la boule et la forme sont alors déjà calculés à l'itération précédente. Plus formellement, si nous nous déplaçons

d'un point \mathbf{x} à un point \mathbf{y} par un vecteur de translation $\vec{\delta}$ nous avons pour le calcul d'aire ou de volume :

$$\widehat{\text{Area}} \left(\mathbb{G}_h(X) \cap B_R(\mathbf{x} + \vec{\delta}), h \right) = \widehat{\text{Area}} \left(\mathbb{G}_h(X) \cap B_R(\mathbf{x}), h \right) \quad (3.191)$$

$$+ \widehat{\text{Area}} \left(\mathbb{G}_h(X) \cap (B_R(\mathbf{x} + \vec{\delta}) \setminus B_R(\mathbf{x})), h \right) \quad (3.192)$$

$$- \widehat{\text{Area}} \left(\mathbb{G}_h(X) \cap (B_R(\mathbf{x}) \setminus B_R(\mathbf{x} + \vec{\delta})), h \right). \quad (3.193)$$

De la même manière, pour les moments :

$$\hat{m}_h^{pqs} \left(\mathbb{G}_h(X) \cap B_R(\mathbf{x} + \vec{\delta}), h \right) = \hat{m}_h^{pqs} \left(\mathbb{G}_h(X) \cap B_R(\mathbf{x}), h \right) \quad (3.194)$$

$$+ \hat{m}_h^{pqs} \left(\mathbb{G}_h(X) \cap (B_R(\mathbf{x} + \vec{\delta}) \setminus B_R(\mathbf{x})), h \right) \quad (3.195)$$

$$- \hat{m}_h^{pqs} \left(\mathbb{G}_h(X) \cap (B_R(\mathbf{x}) \setminus B_R(\mathbf{x} + \vec{\delta})), h \right). \quad (3.196)$$

Alors, si nous précalculons tous les supports de déplacement $\mathbb{G}_h(B_R(\mathbf{0} \pm \vec{\delta}) \setminus B_R(\mathbf{0}))$ avec $\|\vec{\delta}\|_\infty = h$, la complexité de l'algorithme peut être réduite à $O((R/h)^{d-1})$. Le cas idéal est la traversée hamiltonienne de la surface : seul le premier surfel a besoin de calculer l'intersection entre la boule entière et la forme, tous les autres surfels (du voisinage) n'auront à calculer que les sous-supports $\mathbb{G}_h(B_R(\mathbf{0} \pm \vec{\delta}) \setminus B_R(\mathbf{0}))$.

La [figure 3.37 page 105](#) nous donne les temps de calcul pour nos estimateurs 2D $\hat{\kappa}^R(\mathbf{II})$, $\hat{\kappa}^*$, $\hat{\kappa}_i^*$ et les variantes à nombre de rayons limités $\hat{\kappa}_{K=5}^*$, $\hat{\kappa}_{K=10}^*$ et $\hat{\kappa}_{K=50}^*$, ainsi que pour les estimateurs **BC**, **MDSS** et **MDCA**. Comme attendu, les approches basées sur la reconnaissance d'objets en dimension 2 (**MDSS** et **MDCA**) ont les temps de calcul les plus rapides. Nous pouvons observer que $\hat{\kappa}^R(\mathbf{II})$ est plus lent que ces deux estimateurs mais plus rapide que **BC**. Nous pouvons également remarquer que $\hat{\kappa}_i^*$ est beaucoup plus lent que $\hat{\kappa}^*$, ce qui est normal puisqu'une nouvelle boule prenant en compte les informations locales est calculée à chaque déplacement. Cet écart est très fortement diminué avec les variantes limitant le nombre de rayons possibles pour $\hat{\kappa}_i^*$, se rapprochant des temps de calcul de $\hat{\kappa}^*$ et $\hat{\kappa}^R$.

En 3D, alors que les vitesses de convergence asymptotique entre **JETFITTING** et nos estimateurs sont similaires, nous pouvons observer que nos estimateurs sont environ 10 fois plus rapides que notre implémentation de **JETFITTING** (**CGAL** [**Cga**]).

3.5.3 Robustesse au bruit

Grâce à l'approche par intégration de volume de nos estimateurs, nous pouvons espérer une robustesse aux bruits et aux données aberrantes (**outliers**). Définissons dans un premier temps le modèle de bruit utilisé dans nos expérimentations. Nous

utilisons le modèle de bruit KANUNGO [Kan96] sur les contours des objets digitaux. Ainsi, pour une taille de bruit $t \in [0, 1]$, la probabilité qu'un point digital \mathbf{p} situé à une distance $dt(\mathbf{p})$ de ∂X appartienne au contour bruité est $t^{1+dt(\mathbf{p})}$. Ainsi la majorité des perturbations se situe dans une zone d'épaisseur $\frac{2h}{1-t}$ autour du bord digital de la forme. Ce modèle de KANUNGO est dépendant du pas de discrétisation h , ainsi plus le pas de discrétisation est petit (donc l'objet de plus grande résolution), plus le bruit obtenu est faible. Ce comportement est idéal pour évaluer la stabilité des algorithmes en géométrie digitale [KL12] puisque plus la résolution de l'objet digital augmente, plus il se rapproche de la forme sous-jacente. Ce bruit est comparable au bruit d'acquisition d'un scanner, et est utilisé dans le domaine de l'analyse de documents.

Nous expérimentons nos estimateurs de courbure en 2D et en 3D avec des objets bruités dans les figures 3.38 page 106 et 3.39 page 107 sur les objets « ELLIPSE » et « ROUNDED CUBE » ($h = 0.1$). Nos critères d'expérimentation sont les suivants : à partir d'objets non bruités, nous augmentons progressivement le paramètre de bruit de KANUNGO t de 0 à 1 et nous observons le comportement des estimateurs. En 2D, les approches basées sur la reconnaissance d'objets géométriques (MDSS et MDCA) sont très sensibles aux perturbations du bord de la forme, comme le montre la figure 3.38 page 106. Les estimateurs $\hat{\kappa}^R$ (II) et BC sont extrêmement robustes au bruit lorsqu'il n'est pas trop grand ($t < 0.5$). Nous pouvons d'ailleurs observer que notre estimateur semble plus robuste que l'estimateur BC. En dimension 3, nous pouvons constater que nos estimateurs et l'approche de JETFITTING obtiennent des résultats plutôt stables. Ce n'est pas surprenant pour JETFITTING puisque cette approche dépend d'une analyse en composante principale (ACP) sur un ensemble de points, ce qui est plutôt robuste. En conclusion, expérimentalement, nos estimateurs semblent assez robuste au bruit de KANUNGO.

3.6 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre un ensemble d'estimateurs de courbure, courbure moyenne, courbures principales, directions principales de courbures et normale basés sur le principe d'intégration d'invariants sur des formes de dimension 2 et 3. Nous avons démontré que ces estimateurs convergent asymptotiquement pour une certaine catégorie de formes continues et nous avons explicité leurs vitesses de convergence. Nous avons également évalué expérimentalement ces estimateurs et observé que les vitesses de convergence respectent bien les vitesses attendues, et la comparaison avec les autres méthodes rend nos estimateurs très compétitifs, même en présence de bruit.

Ces estimateurs souffrent par contre de certaines limitations. La première, et probablement la plus grande limitation vient du fait que nous intégrons des données volumiques sur la forme X , et non surfaciques comme la plupart des autres méthodes, comme celles basées sur les nuages de points par exemple. Cela implique une plus grande complexité d'algorithme, mais également de pouvoir quantifier ces données volumiques lorsqu'elles ne sont pas directes. Cependant, cela amène une certaine robustesse sur des données bruitées. Nous verrons dans le [chapitre 4.3 page 144](#) que nous pouvons optimiser l'algorithme afin de se rapprocher de la complexité des méthodes surfaciques. De plus, POTTMANN *et al.* [Pot+07; Pot+09] définissent des estimateurs surfaciques de courbure se basant sur le même principe de l'intersection d'une sphère et de la forme. Il serait intéressant de les définir sur des données digitales, ainsi de pouvoir les comparer – théoriquement et expérimentalement – avec les variantes volumiques (ils seront très probablement plus sensibles au bruit sur la surface, pour une complexité similaire).

La seconde provient de la constante k guidant le rayon de la boule d'intégration ($R = kh^{\frac{1}{3}}$) dans le contexte de la convergence asymptotique des estimateurs. Le choix du k optimal n'est pas évident, et est principalement lié aux bornes d'erreur de l'approximation de Taylor permettant d'extraire l'information de courbure qui ne sont pas explicites. L'intuition est que ce paramètre k doit certainement dépendre de la dérivée des courbures maximales, mais cela reste à prouver. Ainsi, pour une forme donnée, nous pouvons chercher à optimiser cette constante afin d'avoir une erreur asymptotique plus faible mais celle-ci n'influera d'aucune sorte sur la vitesse de convergence.

La troisième limitation est le temps de calcul sur de gros objets digitaux. Il n'est pas rare d'avoir dans l'industrie des objets à analyser avec une haute résolution (par exemple $1\,024^3$) et le coût de l'estimation peut s'avérer élevé pour certaines utilisations. Cependant, cette limitation est à mettre en parallèle avec le fait que nos estimateurs sont robustes au bruit, et c'est certainement le prix à payer (les approches de reconnaissances d'objets par exemple sont plus rapides, mais très sensibles au bruit, comme nous l'avons montré). Il est à noter que pour obtenir exactement les mêmes résultats avec **BC** et **II** (c'est-à-dire quand l'erreur d'estimation en norme l_∞ par rapport à la vraie valeur de courbure est égale entre les deux estimateurs), **BC** a besoin d'aller à une résolution de grille dix fois supérieure par rapport à notre estimateur, comme le montre le [tableau 3.4](#), avec le coût en temps de calcul qui en résulte.

L'inconvénient avec les estimateurs précédents est que lorsque nous souhaitons collecter la valeur de courbure pour un objet particulier, nous devons adapter le rayon de la sphère en fonction de l'objet. Nous avons alors proposé d'analyser la géométrie de l'objet digital en amont à l'aide de segments maximaux afin de

Table 3.4 Comparaison des estimateurs **BC** et **II** sur la forme « ELLIPSE » pour une erreur d'estimation en norme l_∞ égale (erreur de 0.046).

	BC	II
pas de discrétisation h	0.003	0.03
temps de calcul (<i>en ms</i>)	421 945	350
Taille de masque	91 336	8 349
(<i>avec optimisation</i>)		8×145

proposer des estimateurs de courbures en dimension 2 et 3 sans paramètre. En effet, les segments maximaux permettent d'extraire l'échelle de la forme digitale lorsque nous ne connaissons pas le pas de discrétisation h pour une forme digitale donnée. De plus, les propriétés sur les longueurs des segments maximaux en font de très bons candidats pour remplacer le rayon de la boule d'intégration des estimateurs de courbures précédents, les rendant ainsi sans paramètre.

Nous avons alors défini deux approches d'estimateurs grâce à ces longueurs. Une approche « globale », c'est-à-dire que l'ensemble des longueurs des segments maximaux de la forme nous donnent un rayon global pour la sphère d'intégration. La convergence asymptotique des estimateurs dont le rayon est guidé par la longueur moyenne des segments maximaux a alors été prouvé en dimension 2 ($O(h^{\frac{1}{3}} \log^2(\frac{1}{3}))$), se basant une grande partie sur la preuve des estimateurs précédents et des lois asymptotiques des longueurs des segments maximaux. En dimension 3, la preuve de convergence en $O(h^{\frac{1}{3}} \log^2(\frac{1}{3}))$ des estimateurs de courbure sans paramètre repose sur une supposition non vérifiée à ce jour, qui mériterait d'être étudiée. L'analyse comparative de ces estimateurs sans paramètre ont montré que la convergence asymptotique était plutôt en $O(h^{\frac{1}{3}})$ (le terme en $\log^2(\frac{1}{3})$ de l'erreur semble ne pas intervenir dans notre évaluation expérimentale), comme les versions avec le paramètre de rayon.

Ensuite, nous avons défini une approche « locale », où le rayon de la sphère est adapté localement en fonction de la géométrie de la forme (en fonction des longueurs des segments maximaux). À cause de la borne d'erreur d'un cas pathologique des segments maximaux, nous ne pouvons espérer de preuves théoriques de convergence asymptotique de ces estimateurs. Cependant, d'après l'évaluation expérimentale, ces estimateurs semblent suivre le comportement asymptotique de l'approche « globale ». La distinction se fait avec l'erreur moyenne, l'erreur de norme l_2 où ces estimateurs obtiennent de très bons résultats.

La principale limitation de ces méthodes sans paramètre est qu'elles sont très dépendantes de la qualité de discrétisation de l'objet digital, comme la plupart des estimateurs reconnaissant des primitives sur la surface digitale.

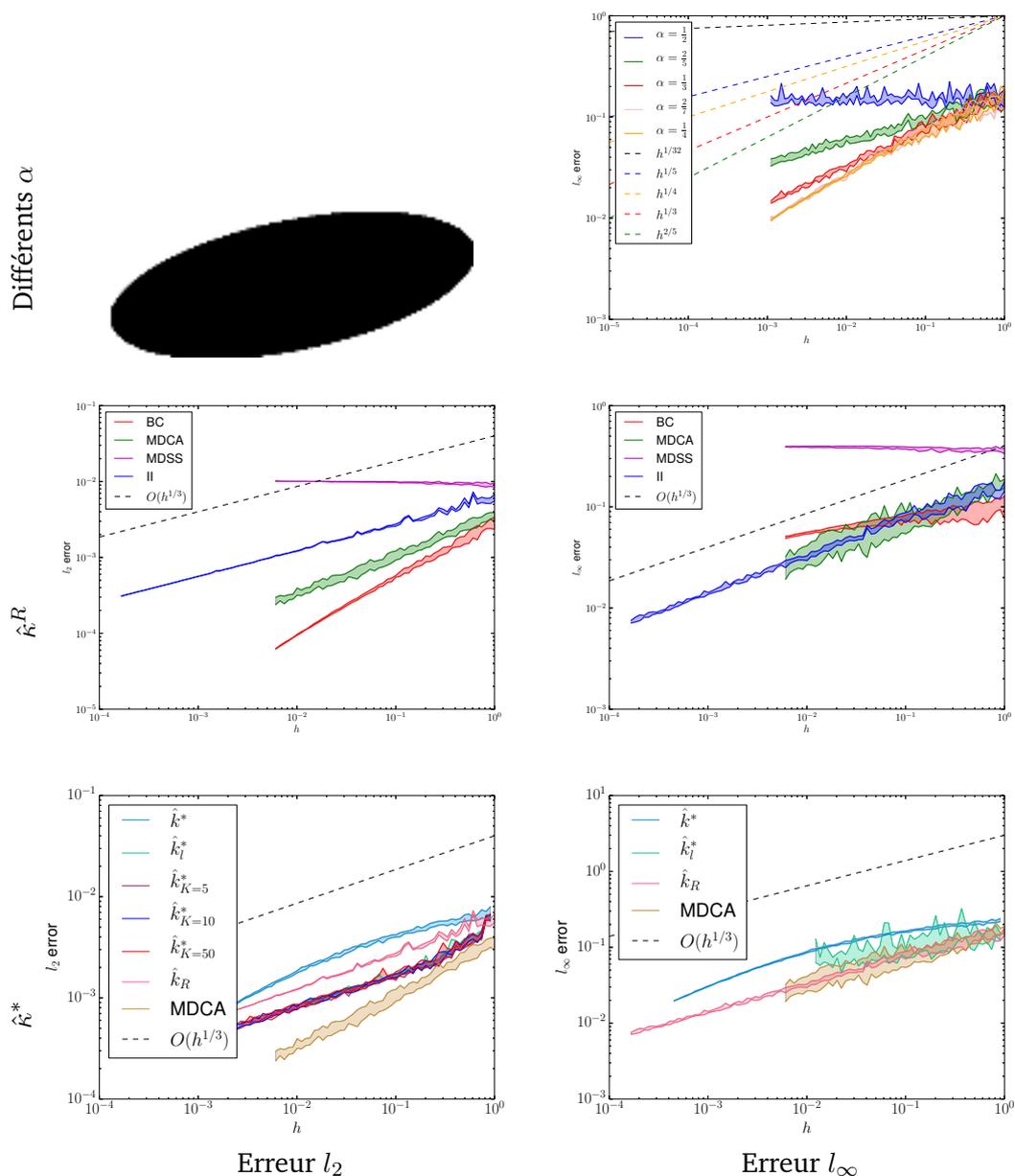


Figure 3.28 Première ligne : Illustration de l'objet « ELLIPSE » et comparaison des vitesses de convergence asymptotique de l'estimateur $\hat{\kappa}^R$ avec **différents valeurs de α** pour le rayon R (avec $R = kh^\alpha$).
 Seconde ligne : Comparaison des erreurs l_2 (à gauche) et l_∞ (à droite) d'estimation de **courbure** en 2D de $\hat{\kappa}^R$ (II) avec les estimateurs BC [Esb+11], MDSS [Coe+01 ; DV+07] et MDCA [RL11].
 Troisième ligne : Comparaison des erreurs l_2 (à gauche) et l_∞ (à droite) d'estimation de **courbure** en 2D de $\hat{\kappa}^*$, $\hat{\kappa}_l^*$, $\hat{\kappa}_{K=5}^*$, $\hat{\kappa}_{K=10}^*$ et $\hat{\kappa}_{K=50}^*$ avec l'estimateur MDCA [RL11].

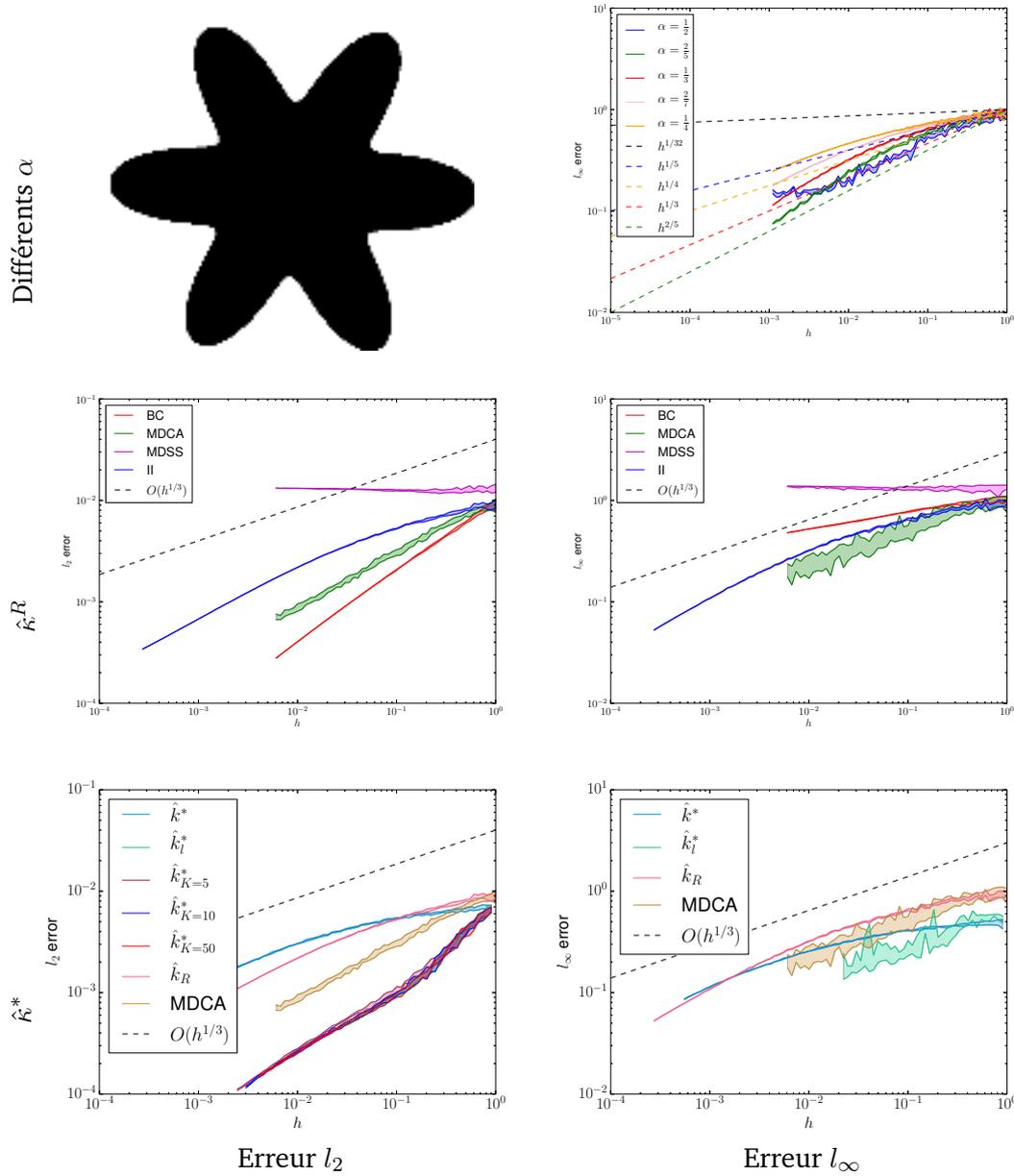


Figure 3.29 Première ligne : Illustration de l'objet « FLOWER » et comparaison des vitesses de convergence asymptotique de l'estimateur $\hat{\kappa}^R$ avec différentes valeurs de α pour le rayon R (avec $R = kh^\alpha$).
 Seconde ligne : Comparaison des erreurs l_2 (à gauche) et l_∞ (à droite) d'estimation de courbure en 2D de $\hat{\kappa}^R$ (II) avec les estimateurs BC [Esb+11], MDSS [Coe+01 ; DV+07] et MDCA [RL11].
 Troisième ligne : Comparaison des erreurs l_2 (à gauche) et l_∞ (à droite) d'estimation de courbure en 2D de $\hat{\kappa}^*$, $\hat{\kappa}_l^*$, $\hat{\kappa}_{K=5}^*$, $\hat{\kappa}_{K=10}^*$ et $\hat{\kappa}_{K=50}^*$ avec l'estimateur MDCA [RL11].

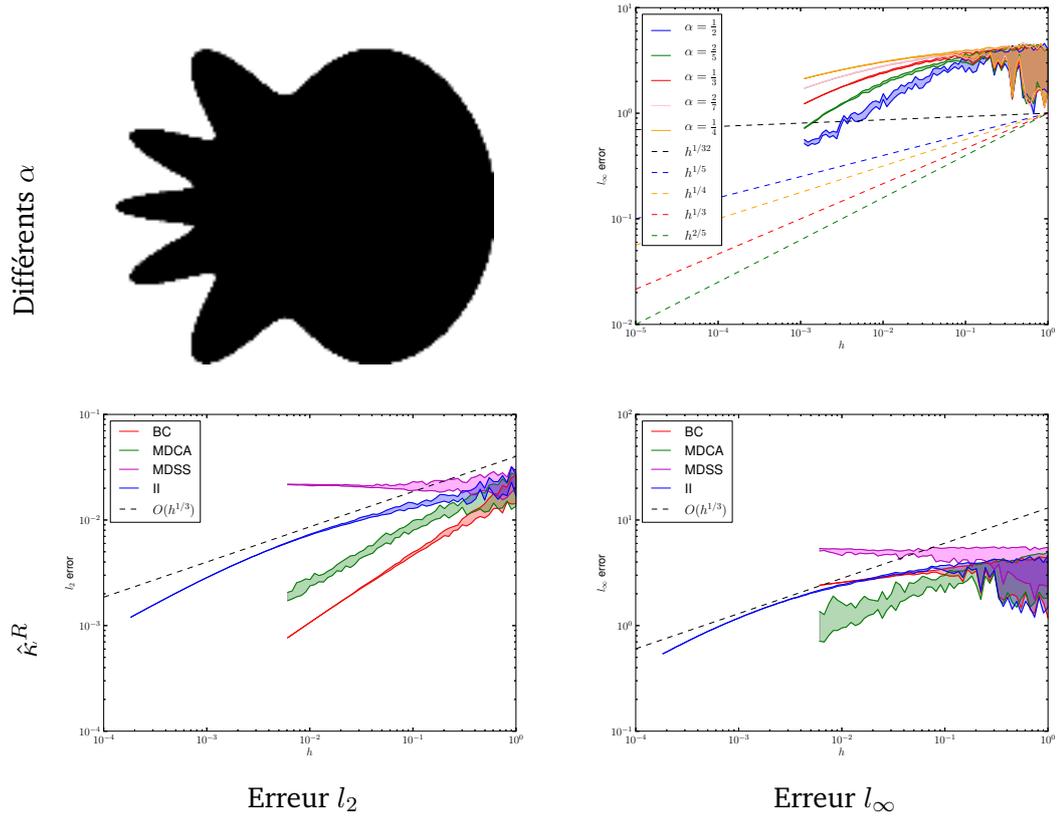


Figure 3.30 Première ligne : Illustration de l'objet « ACCFLOWER » et comparaison des vitesses de convergence asymptotique de l'estimateur $\hat{\kappa}^R$ avec **différentes valeurs de α** pour le rayon R (avec $R = kh^\alpha$).

Seconde ligne : Comparaison des erreurs l_2 (à gauche) et l_∞ (à droite) d'estimation de **courbure** en 2D de $\hat{\kappa}^R$ (II) avec les estimateurs **BC** [Esb+11], **MDSS** [Coe+01; DV+07] et **MDCA** [RL11].

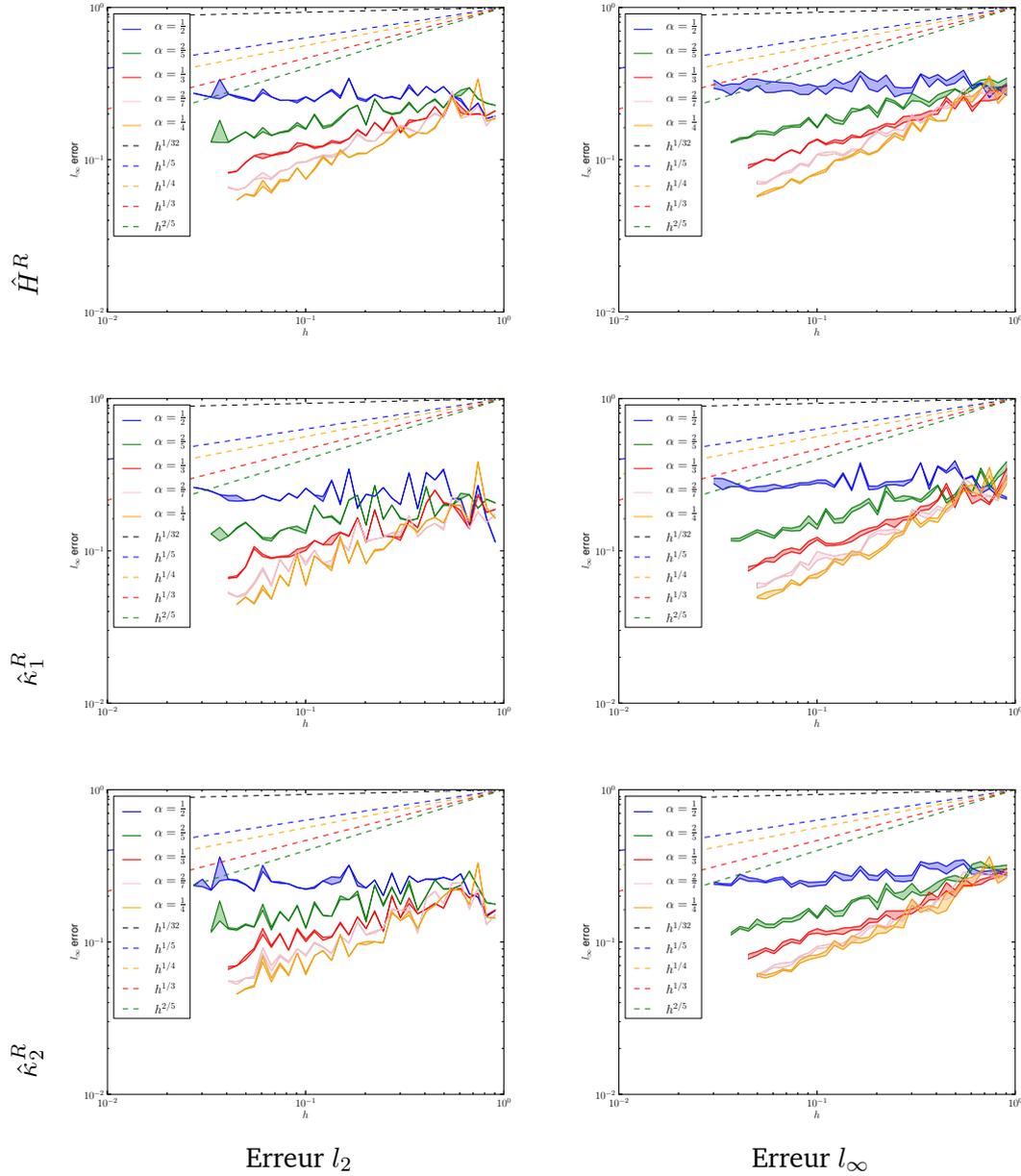


Figure 3.31 Comparaison des convergences asymptotiques des estimateurs \hat{H}^R (première ligne), $\hat{\kappa}_1^R$ (seconde ligne) et $\hat{\kappa}_2^R$ (troisième ligne) avec différentes valeurs de α pour le rayon R ($R = kh^\alpha$) sur l'objet « ROUNDED CUBE » et surface de « GOURSAT ». L'erreur est en l_2 pour la première colonne, et en l_∞ pour la seconde.

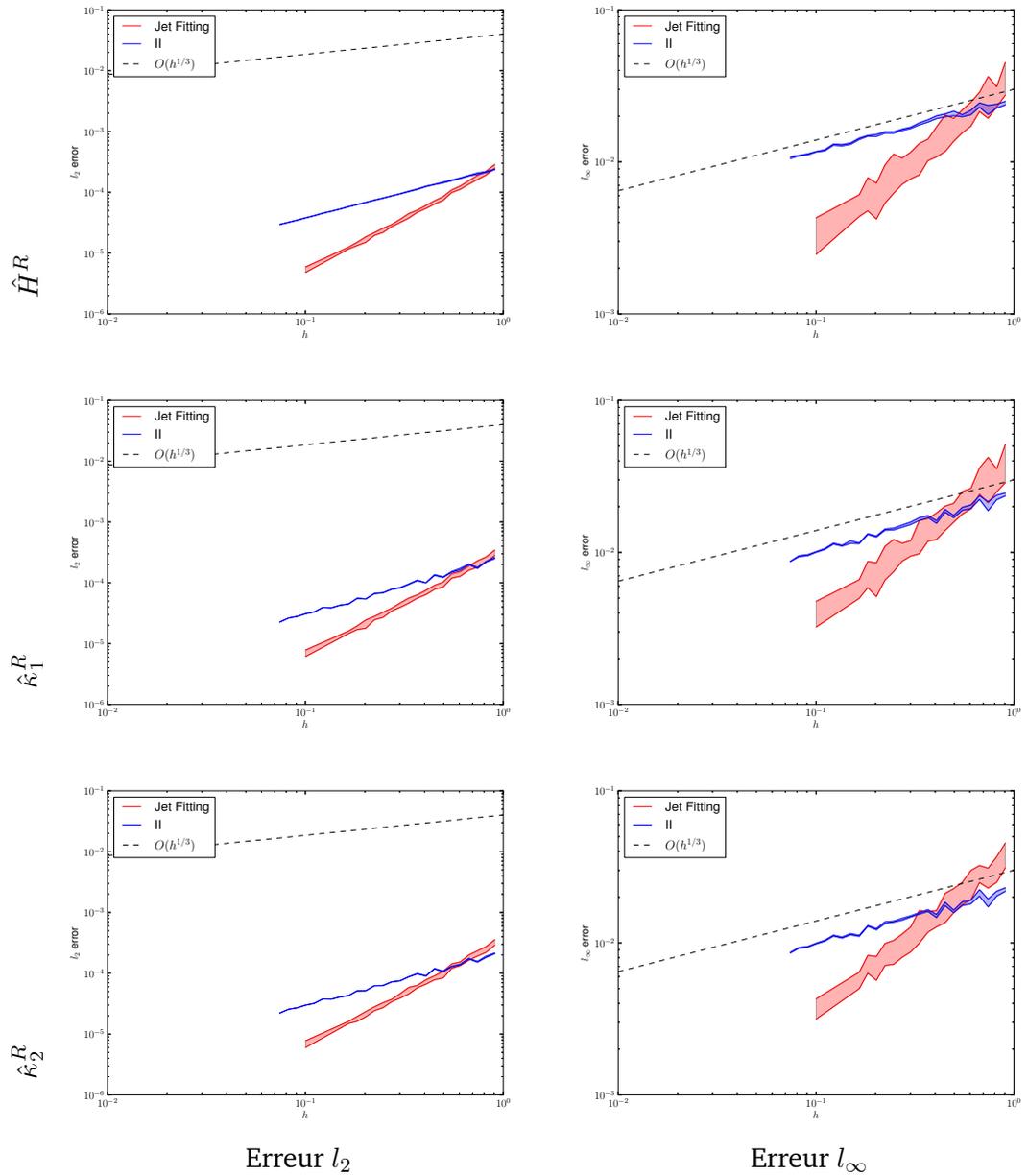


Figure 3.32 Première ligne : Comparaison des erreurs l_2 (à gauche) et l_∞ (à droite) d'estimation de **courbure moyenne** de \hat{H}^R avec JETFITTING [CP05] sur l'objet « SPHERE ».
 Seconde ligne : Comparaison des erreurs l_2 (à gauche) et l_∞ (à droite) d'estimation de la **première courbure principale** de $\hat{\kappa}_1^R$ avec JETFITTING [CP05] sur l'objet « SPHERE ».
 Troisième ligne : Comparaison des erreurs l_2 (à gauche) et l_∞ (à droite) d'estimation de la **seconde courbure principale** de $\hat{\kappa}_2^R$ avec JETFITTING [CP05] sur l'objet « SPHERE ».

ROUNDED CUBE

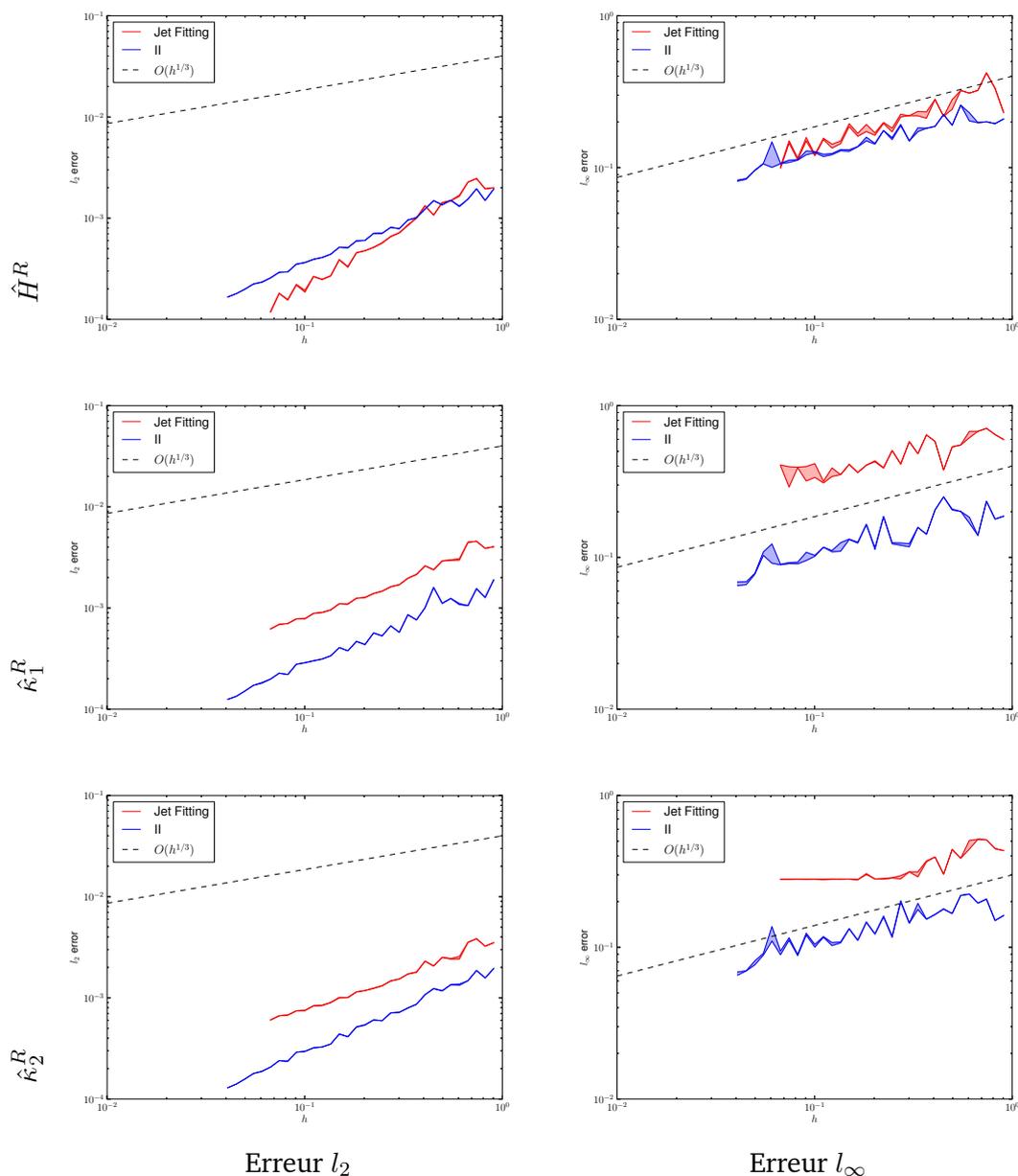


Figure 3.33 Première ligne : Comparaison des erreurs l_2 (à gauche) et l_∞ (à droite) d'estimation de courbure moyenne de \hat{H}^R avec JETFITTING [CP05] sur l'objet « ROUNDED CUBE ».
 Seconde ligne : Comparaison des erreurs l_2 (à gauche) et l_∞ (à droite) d'estimation de la première courbure principale de $\hat{\kappa}_1^R$ avec JETFITTING [CP05] sur l'objet « ROUNDED CUBE ».
 Troisième ligne : Comparaison des erreurs l_2 (à gauche) et l_∞ (à droite) d'estimation de la seconde courbure principale de $\hat{\kappa}_2^R$ avec JETFITTING [CP05] sur l'objet « ROUNDED CUBE ».

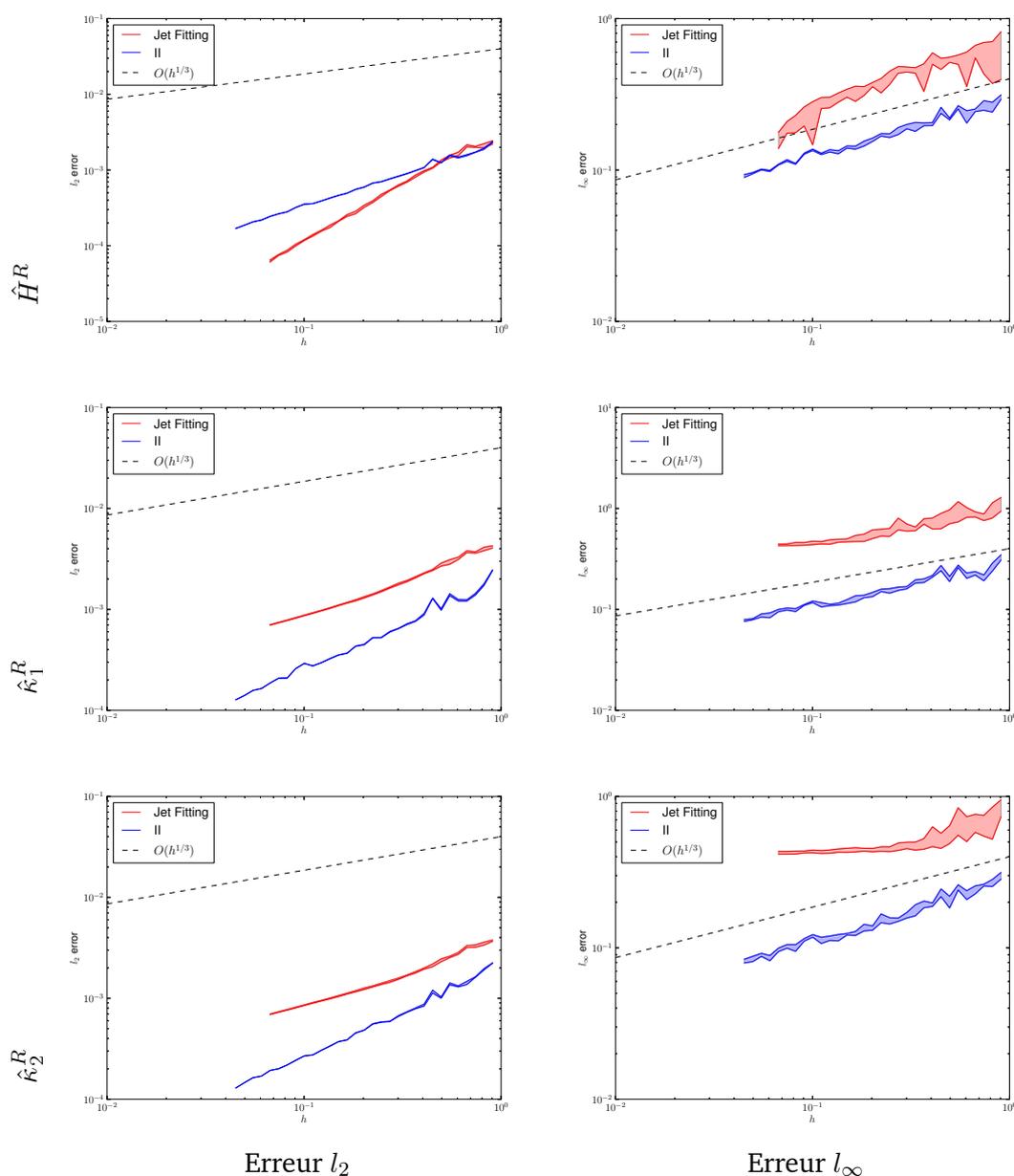


Figure 3.34 Première ligne : Comparaison des erreurs l_2 (à gauche) et l_∞ (à droite) d'estimation de **courbure moyenne** de \hat{H}^R avec JETFITTING [CP05] sur l'objet surface de « GOURSAT ».
 Seconde ligne : Comparaison des erreurs l_2 (à gauche) et l_∞ (à droite) d'estimation de la **première courbure principale** de $\hat{\kappa}_1^R$ avec JETFITTING [CP05] sur l'objet surface de « GOURSAT ».
 Troisième ligne : Comparaison des erreurs l_2 (à gauche) et l_∞ (à droite) d'estimation de la **seconde courbure principale** de $\hat{\kappa}_2^R$ avec JETFITTING [CP05] sur l'objet surface de « GOURSAT ».

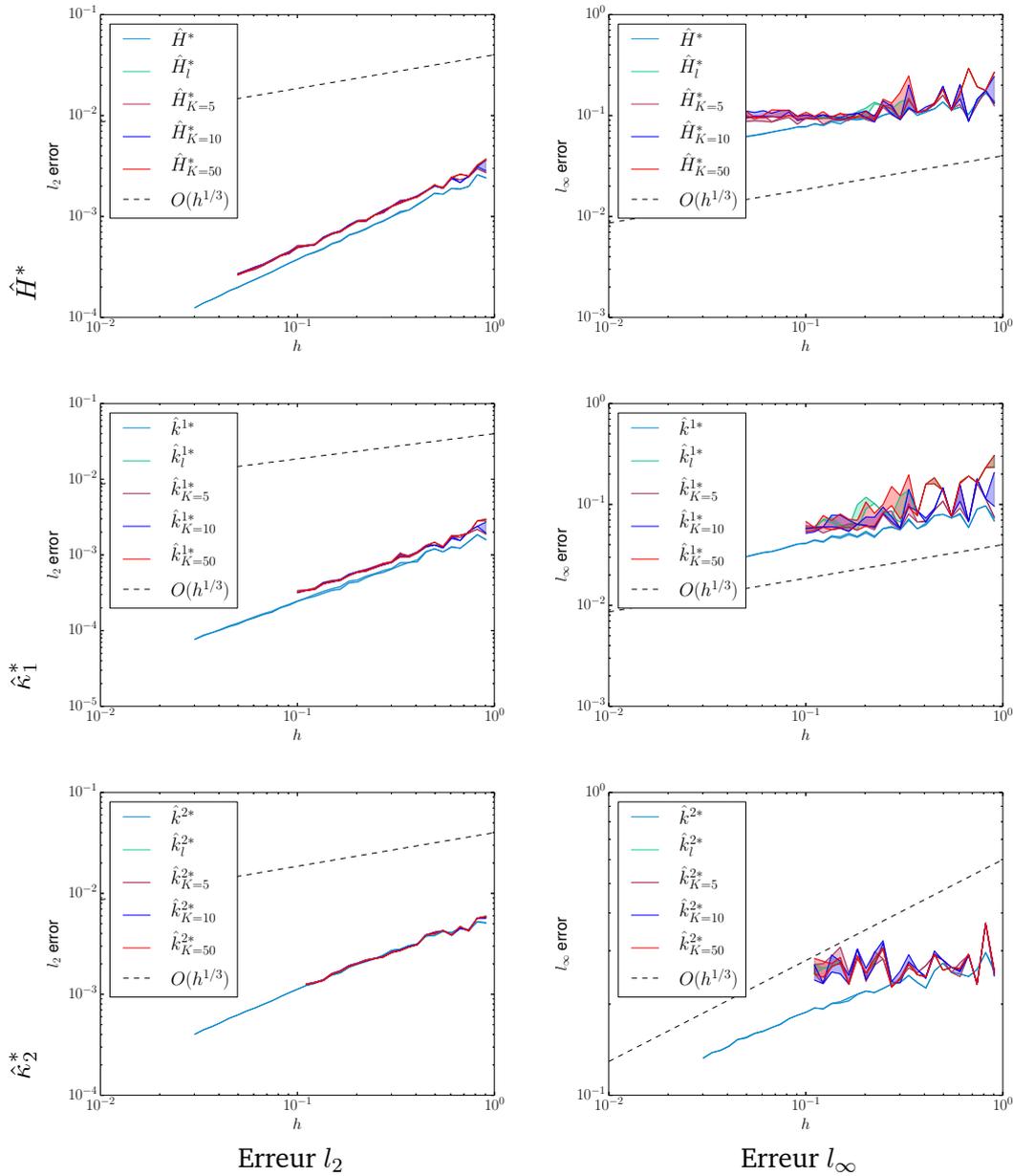


Figure 3.35 Première ligne : Comparaison des erreurs l_2 (à gauche) et l_∞ (à droite) d'estimation de courbure moyenne de \hat{H}^* , \hat{H}_l^* , $\hat{H}_{K=5}^*$, $\hat{H}_{K=10}^*$ et $\hat{H}_{K=50}^*$ sur l'objet « ELLIPSOID ».
 Seconde ligne : Comparaison des erreurs l_2 (à gauche) et l_∞ (à droite) d'estimation de la première courbure principale de $\hat{\kappa}_1^*$, $\hat{\kappa}_{1l}^*$, $\hat{\kappa}_{1K=5}^*$, $\hat{\kappa}_{1K=10}^*$ et $\hat{\kappa}_{1K=50}^*$ sur l'objet « ELLIPSOID ».
 Troisième ligne : Comparaison des erreurs l_2 (à gauche) et l_∞ (à droite) d'estimation de la seconde courbure principale de $\hat{\kappa}_2^*$, $\hat{\kappa}_{2l}^*$, $\hat{\kappa}_{2K=5}^*$, $\hat{\kappa}_{2K=10}^*$ et $\hat{\kappa}_{2K=50}^*$ sur l'objet « ELLIPSOID ».

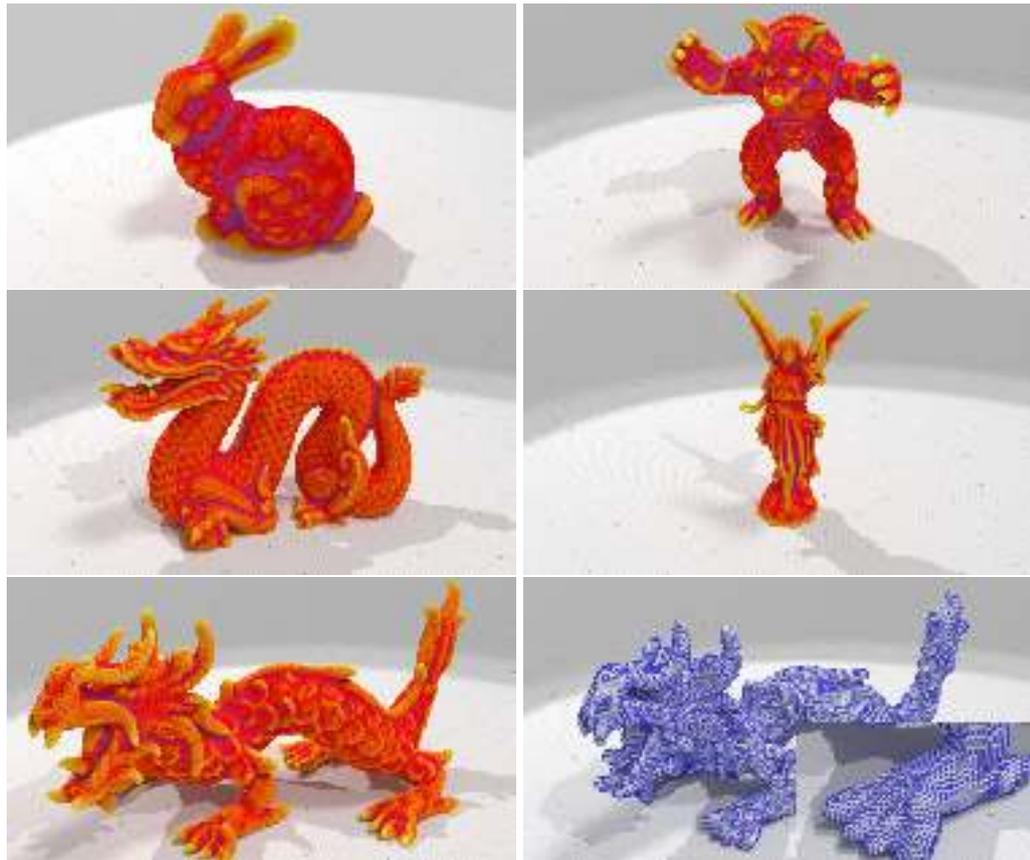


Figure 3.36 Courbure moyenne estimée avec \hat{H}^R sur des objets courant de la littérature (« BUNNY », « ARMADILLO », « DRAGON », « LUCY », « ASIAN DRAGON »), avec $R = 15$. L'image en bas à droite représente les premières directions principales de courbure estimées avec \hat{w}_1^R sur l'objet « ASIAN DRAGON ».

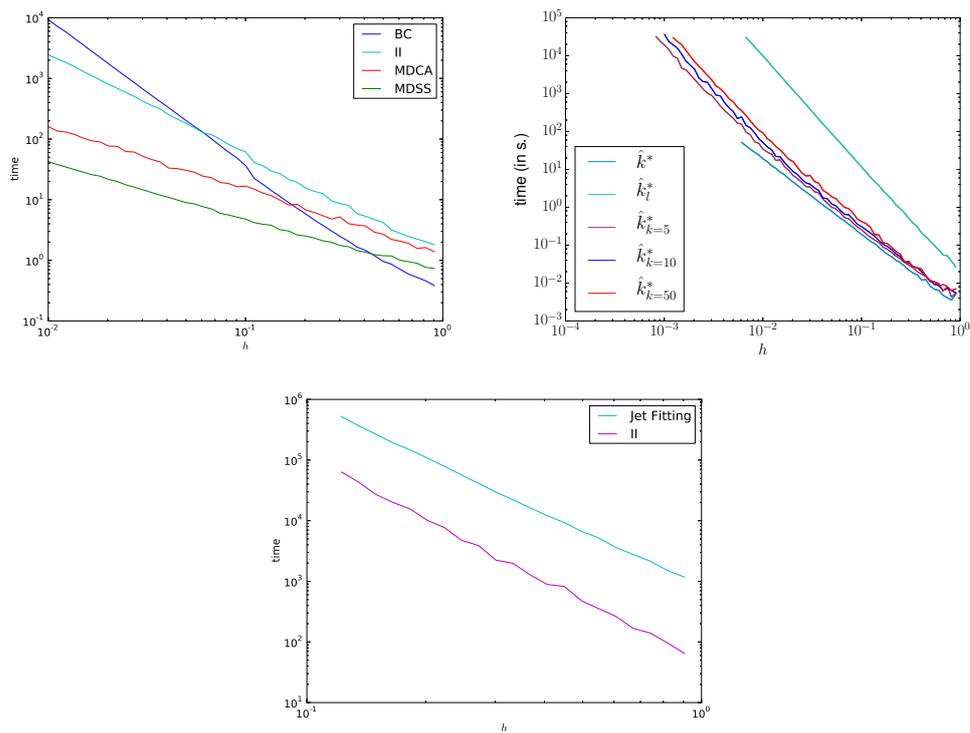


Figure 3.37 Temps de calcul (en échelle logarithmique) en millisecondes pour les estimateurs de **courbure** en 2D sur l'objet « FLOWER » (*en haut à gauche*) et des estimateurs de **courbure moyenne** en 3D sur l'objet « ROUNDED CUBE » (*en bas*). Temps de calcul en secondes pour les estimateurs de **courbure** en 2D sans paramètre sur l'objet « ELLIPSE » (*en haut à droite*). Les résultats ont été obtenus sur un ordinateur de travail Intel Xeon 2.27GHz.

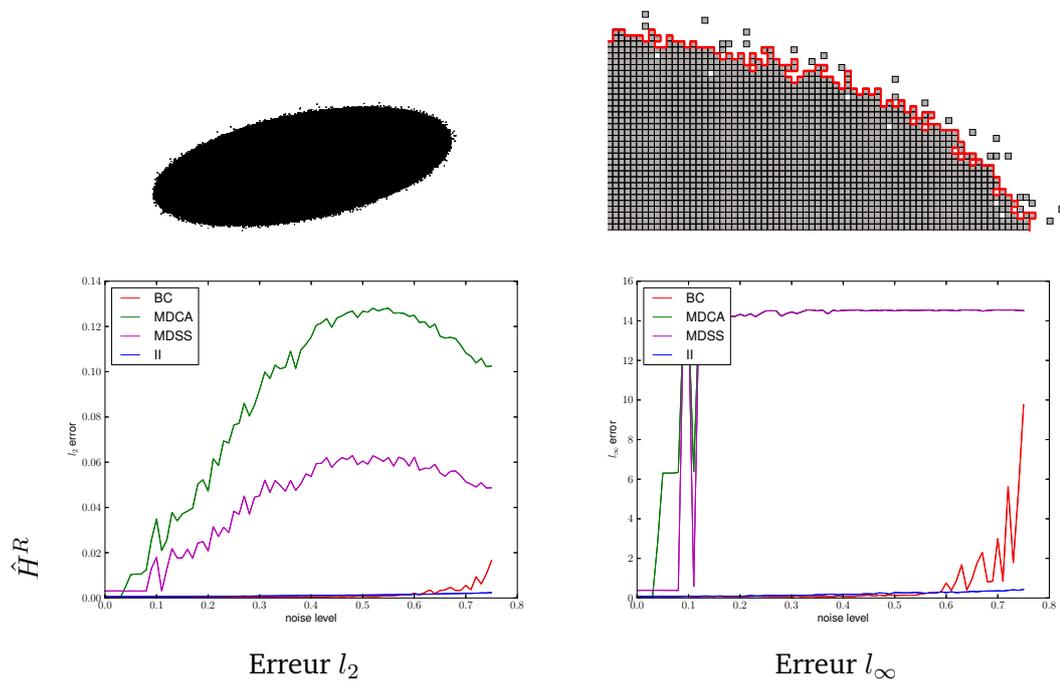


Figure 3.38 Première ligne : « ELLIPSE » avec du bruit de KANUNGO sur sa surface. Seconde ligne : Comparaison des erreurs l_2 (à gauche) et l_∞ (à droite) d'estimation de courbure de $\hat{\kappa}^R$ (II) avec MDCA, MDSS et BC sur l'objet « ELLIPSE » bruité avec différents paramètres t de bruit de KANUNGO.

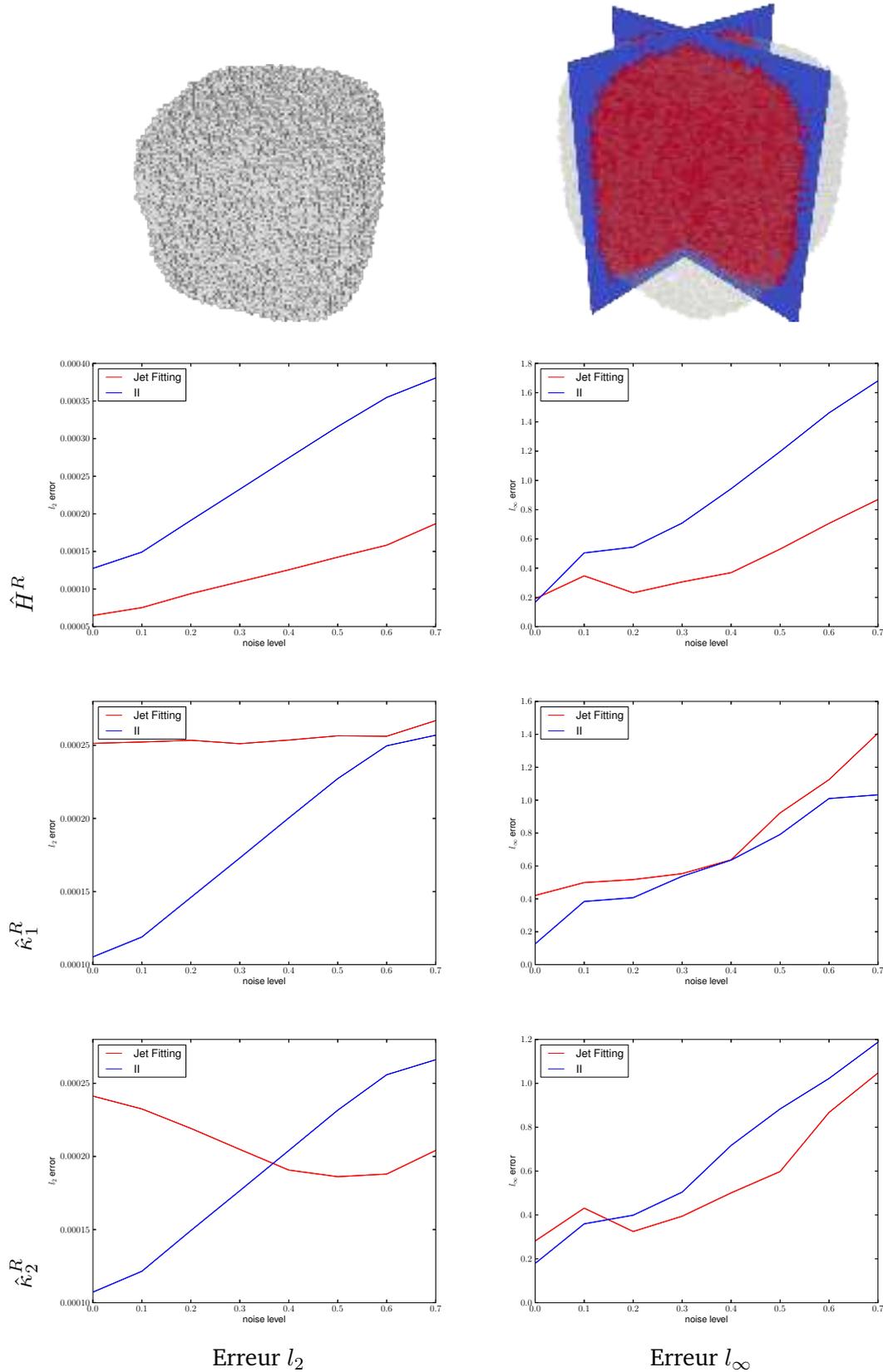


Figure 3.39 Première ligne : « ROUNDED CUBE » avec du bruit de KANUNGO sur sa surface. Comparaison des erreurs l_2 (à gauche) et l_∞ (à droite) d'estimation de **courbure moyenne** de \hat{H}^R (seconde ligne), de **première courbure principale** de $\hat{\kappa}_1^R$ (troisième ligne) et de **seconde courbure principale** de $\hat{\kappa}_2^R$ (quatrième ligne) avec JETFITTING sur l'objet « ROUNDED CUBE » bruité avec différents paramètres t de bruit de KANUNGO.

Applications

” [S’adressant à JD.] Ce n’est sans doute pas la réponse que tu attendais Joséphine, mais comme toujours, je m’en fiche !

— Perry COX (*John C. MCGINLEY*)
Scrubs.

Sommaire

4.1	Estimation de singularités	110
4.1.1	État de l’art	111
4.1.1.1	Méthodes « Ridges and Valleys »	111
4.1.1.2	Méthodes basées sur un voisinage surfacique	112
4.1.1.3	Méthodes basées sur de l’analyse spectrale	121
4.1.2	Estimation de singularités par l’analyse en espace d’échelle de la courbure	123
4.1.2.1	Analyse en espace d’échelle de $\tilde{\kappa}^R(x)$ et $\tilde{H}^R(x)$	124
4.1.2.2	Influence de la discrétisation	127
4.1.2.3	Classification basée sur la distance aux modèles linéaires	129
4.1.2.4	Transitions de modèles et classification générale	131
4.1.2.5	Résultats	132
4.1.3	Comparaison des estimateurs de points caractéristiques	133
4.1.4	Conclusion sur l’estimation de singularité	136
4.2	Application dans le contexte du projet <i>digitalSnow</i>	142
4.3	Mises en œuvre dans DGtal	144

Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux applications des estimateurs locaux introduits dans le [chapitre 3](#). Dans un premier temps, nous détaillons une méthode d'extraction de singularités (« ~~features~~ ») à partir de formes 2D et 3D ([paragraphe 4.1](#)). Ces travaux ont été publiés dans [\[Lev+15b\]](#). Nous verrons ensuite le lien entre les travaux présentés dans cette thèse et le projet DIGITALSNOW auquel nous avons contribué. Enfin, nous parlerons de l'implémentation de ces travaux au sein de la bibliothèque open-source de géométrie digitale DGITAL [\[Dgt\]](#) ([paragraphe 4.3 page 144](#)).

4.1 Estimation de singularités

L'extraction de points caractéristiques sur des formes géométriques apparaît comme essentiel depuis plusieurs années. Il existe bon nombre d'applications les utilisant, allant de la reconnaissance d'objets dans une scène [\[BL05\]](#) à la compression de données [\[Pen+10\]](#), l'analyse de données médicales [\[Thi96\]](#) ou bien archéologiques [\[Mel13\]](#). Plus récemment, la rapide démocratisation de systèmes d'acquisition 3D à bas coût comme la *Microsoft Kinect* amène un nouveau regain d'intérêt pour l'analyse de formes [\[Jan+13 ; Kin\]](#). Dès lors que nous voulons étudier un objet dont on ne connaît pas les propriétés mathématiques, nous nous intéressons à récupérer des informations permettant de l'identifier de manière unique. Une information pertinente beaucoup étudiée ces dernières années est la détection de points caractéristiques. Derrière ce terme se cachent deux notions : la saillance et les singularités. Les définitions de ces deux termes ne sont pas clairement établies. Nous allons considérer que la détection de saillances s'intéresse à récupérer les zones remarquables de l'objet d'un point de vue perceptif/cognitif (par exemple le nez sur un visage, les bras et les jambes sur un corps) tandis que la détection de singularités extrait les discontinuités locales distinguables de son voisinage (par exemple les rides sur un visage). La première est plutôt une information visuelle alors que l'autre intègre des informations géométriques de l'objet. Nous nous intéresserons ici uniquement aux singularités.

Nous allons tout d'abord proposer un aperçu des méthodes utilisées dans la littérature pour extraire les singularités ([paragraphe 4.1.1 page ci-contre](#)), puis nous détaillerons notre méthode basée sur l'analyse de la variation de l'estimateur de courbure par intégration défini dans le [paragraphe 3.3 page 45](#) en fonction de la géométrie de la forme ([paragraphe 4.1.2 page 123](#)). Enfin, nous présenterons une évaluation expérimentale complète de notre estimateur face à ceux de la littérature ([paragraphe 4.1.3 page 133](#)).

4.1.1 État de l'art

Il existe une très vaste littérature sur les problèmes d'extraction de points caractéristiques sur des formes. Nous avons choisi les méthodes les plus représentatives de cette littérature afin d'avoir un ensemble complet d'estimateurs auxquels nous pourrions nous comparer. Nous les avons classés par catégories : les méthodes « [Ridges and Valleys](#) » ([paragraphe 4.1.1.1](#)), les méthodes basées sur un morceau surfacique ([paragraphe 4.1.1.2 page suivante](#)) et les méthodes d'analyse spectrale ([paragraphe 4.1.1.3 page 121](#)). Nous comparerons ces estimateurs dans le [paragraphe 4.1.3 page 133](#).

4.1.1.1 Méthodes « Ridges and Valleys »

Nous souhaitons caractériser les discontinuités du bord d'un objet ; une méthode naturelle est de s'intéresser aux maxima et minima locaux, nommés respectivement « *Ridge* » et « *Valley* » (« Crête » et « Vallée » en français, car cette notion est assez similaire aux crêtes géographiques). VERGNE *et al.* [Ver+11] définissent cela plus formellement :

$$\mathcal{S} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{\delta f(\mathbf{x})}{\delta \theta(\mathbf{x})} = 0, \frac{\delta^2 f(\mathbf{x})}{\delta \theta(\mathbf{x})^2} < 0 \right\}, \quad (4.1)$$

où $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^2$, f une fonction de hauteur C^2 et θ une champ de direction C^1 . Afin de détecter les maxima et minima locaux, il convient de remplacer f et θ par les valeurs du [tableau 4.1](#). Dans ce contexte, les discontinuités sont déduites de quantités

Table 4.1 Tableau des fonctions pour détecter les crêtes, les vallées et les points d'inflexion d'une surface. κ_{max} et κ_{min} désignent les fonctions donnant les valeurs de la courbure principale maximale et minimale au point \mathbf{x} , \mathbf{w}_{max} et \mathbf{w}_{min} les fonctions donnant les directions de courbure maximale et minimale \mathbf{x} , et \mathbf{v}_{max} la fonction donnant la valeur du gradient de courbure \mathbf{x} .

	$f(\mathbf{x})$	$\theta(\mathbf{x})$
Crêtes de la surface	$\kappa_{max}(\mathbf{x})$	$\mathbf{w}_{max}(\mathbf{x})$
Vallées de la surface	$-\kappa_{min}(\mathbf{x})$	$\mathbf{w}_{min}(\mathbf{x})$
Points d'inflexion de la surface	$ \mathbf{v}_{max}(\mathbf{x}) $	$\mathbf{v}_{max}(\mathbf{x})/ \mathbf{v}_{max}(\mathbf{x}) $

différentielles d'ordre 3 en s'intéressant aux variations des directions principales de courbure dans un voisinage de la surface [Lai+07; Yan+06]. En seuillant les déviations angulaire significatives des directions principales de courbure, nous pouvons alors détecter les discontinuités.

Ces techniques amènent une approche formelle à l'extraction de discontinuités, mais sont dépendantes de l'échelle à travers le seuillage. De plus, elles nécessitent d'avoir une estimation robuste de quantités différentielles d'ordre 3. Lorsque la

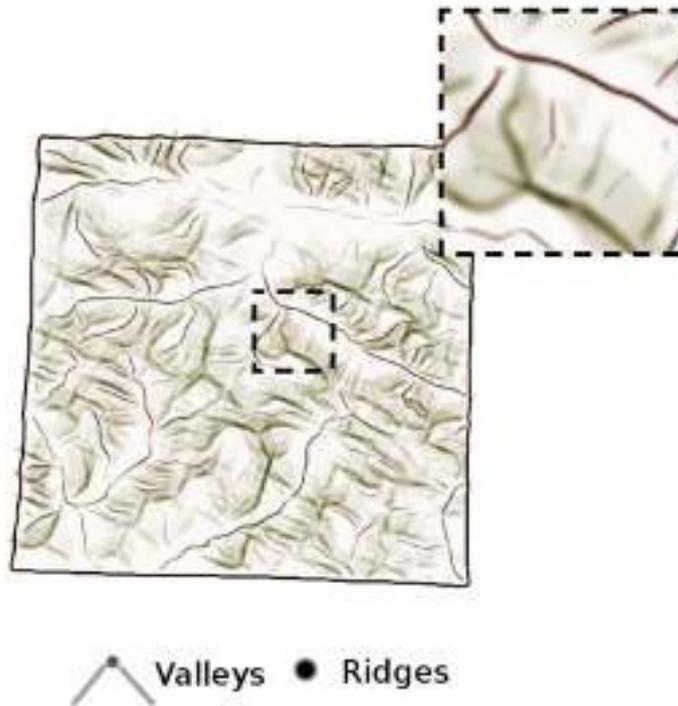


Figure 4.1 « Crêtes » et « Vallées » (Figure 12 de [Ver+11]).

forme d'entrée est bruitée, ou dans le cadre de données digitales, ces approches ne s'avèrent pas pertinentes.

4.1.1.2 Méthodes basées sur un voisinage surfacique

Lorsque nous traitons les maillages ou les nuages de points, beaucoup d'approches se basent sur des quantités calculées par intégration sur des voisinages de la surface. La caractéristique est déterminée en fonction d'un score évalué sur la géométrie de voisinages surfaciques centrés autour du point à considérer. Généralement, les voisinages sont simplement issus d'un noyau sphérique.

Certaines approches produisent des résultats pour une échelle donnée (pour une taille de voisinage fixée). Toutefois, les techniques récentes s'intéressent à analyser la forme à plusieurs échelles, permettant d'en extraire des informations de toutes tailles. Ces approches sont nommées « des méthodes en espace d'échelle » [Wit83] («  *Scale-space* »), avec généralement la taille du voisinage comme paramètre.

Valeurs propres de la matrice de covariance PAULY *et al.* [Pau+03] utilisent les valeurs propres de la matrice de covariance J calculée en chaque point $\mathbf{x} \in \partial X$ de la surface de la forme $X \subset \mathbb{R}^3$ pour un voisinage donné. Ils exploitent les trois valeurs

propres $\lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2$ de cette matrice afin d'obtenir une valeur de variation de surface (introduite dans [Pau+02]) en fonction d'un ensemble de rayons $\{R_i\}_{0 \leq i \leq n}$:

$$\tau_{R_i}(\mathbf{x}) := \frac{\lambda_0(J_{R_i}(\mathbf{x}))}{\lambda_0(J_{R_i}(\mathbf{x})) + \lambda_1(J_{R_i}(\mathbf{x})) + \lambda_2(J_{R_i}(\mathbf{x}))}. \quad (4.2)$$

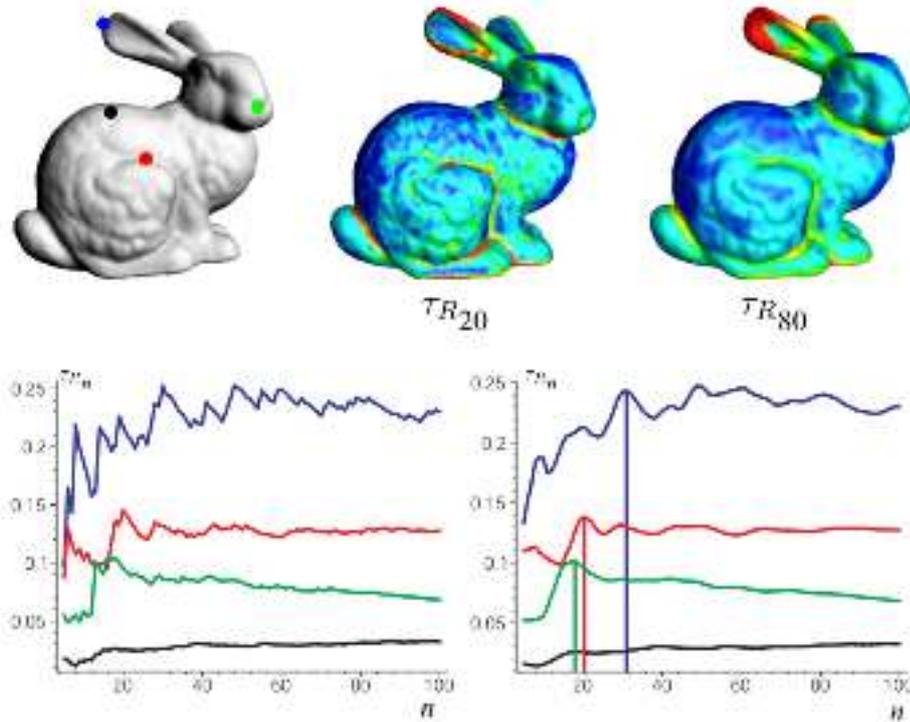


Figure 4.2 Valeurs retournées par τ_{R_i} (Figure 7 de [Pau+03]).

Puisque les valeurs propres diminuent lorsque la courbure augmente, il apparaît que la valeur de τ_{R_i} sera plus grande sur les singularités que sur les parties à courbure nulle de la surface. Pour appuyer cette distinction, les auteurs calculent un poids sur chaque point : pour tous les rayons, le poids est incrémenté à chaque fois que τ_{R_i} est supérieur à un seuil τ_{max} défini par l'utilisateur. Plus formellement :

$$\omega(\mathbf{x}) := \text{Card}\{\tau_{R_i}(\mathbf{x}) \geq \tau_{max} \mid 0 \leq i < n\}. \quad (4.3)$$

Il est alors évident que le poids sera plus important sur les zones angulaires (de couleur jaune sur la figure 4.3 page suivante) tandis qu'il sera faible sur le reste de la forme (en bleu).

Puisque ce détecteur est relié à la variation de la surface, il fournit des résultats géométriquement valides. Cependant, cela nécessite que l'utilisateur fournisse un paramètre τ_{max} qui dépend de la géométrie de la forme : il peut considérer des petites parties lisses comme des zones caractéristiques si τ_{max} est choisi trop petit. C'est ce que nous voyons sur la figure 4.3 avec la petite sphère sur la face verticale.

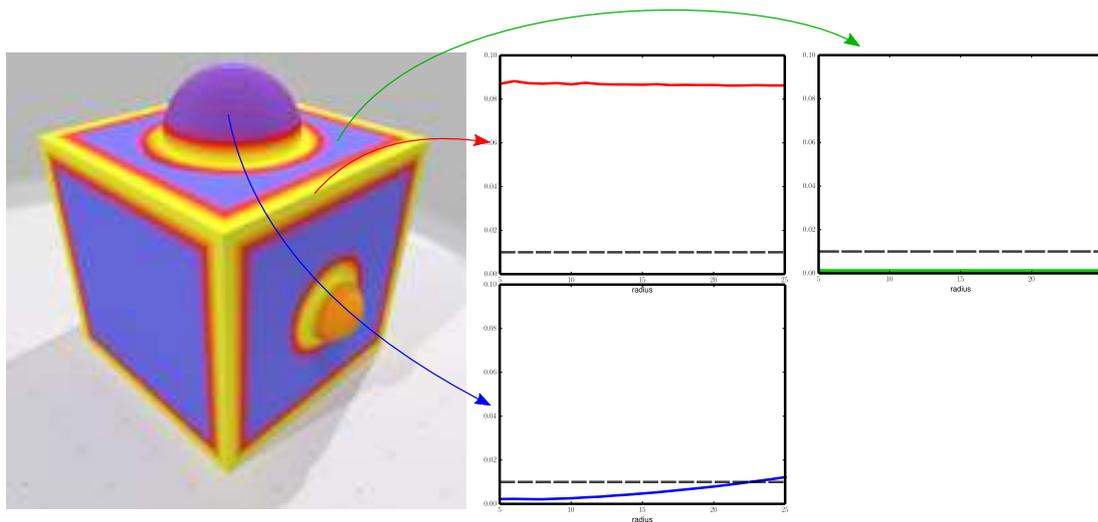


Figure 4.3 Résultat de l'équation 4.3 page précédente avec comme paramètres $\tau_{max} = 0.01$, $5 \leq i \leq 25$.

Également, puisque ce détecteur se base sur des informations surfaciques, il est assez sensible au bruit comme nous le verrons plus tard dans le [paragraphe 4.1.3](#) page 133.

Variation de barycentre CLARENZ *et al.* [Cla+04] définissent quant à eux un critère de classification de surface basé sur la variation du barycentre \mathbf{b} et de la matrice de covariance¹ de morceaux surfaciques $B_R(\mathbf{x}) \cap \partial X$.

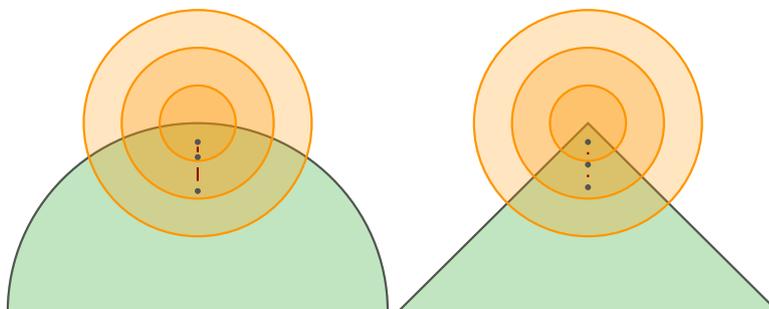


Figure 4.4 Analyse de la variation de la distance du barycentre $|n_R|$ sur une surface lisse (à gauche) et sur une singularité (à droite). La longueur croît de façon quadratique sur la surface lisse et linéairement sur la singularité.

Ils définissent alors une analyse en espace d'échelle de $|n_R|$ (la distance de \mathbf{x} au barycentre \mathbf{b}) comme fonction du rayon du voisinage R (voir [figure 4.4](#)). Ils démontrent alors que cette longueur croît de façon quadratique sur des surfaces lisses lorsque le voisinage augmente, tandis que la longueur croît linéairement sur

¹Dans [Cla+04], les auteurs nomment le moment d'ordre zéro comme le barycentre et le moment d'ordre un comme la matrice de covariance, ce qui peut porter à confusion avec notre définition des moments vue dans le [paragraphe 2.3.3](#) page 8.

des singularités. Cependant, ils n'utilisent pas cette propriété dans leur méthode de classification et ne l'évaluent pas expérimentalement, probablement à cause de la difficulté à distinguer les deux comportements (linéaire et quadratique) comme le montre la [figure 4.5](#).

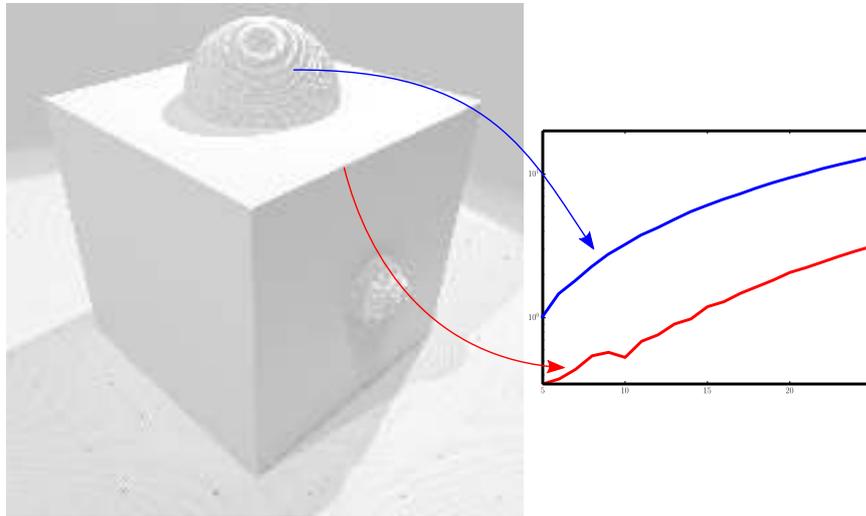


Figure 4.5 Évolution de n_R en fonction de la taille du voisinage R .

Ils proposent alors deux méthodes² à taille de voisinage fixe qui produisent un score de lissage :

- Le premier est basé sur la longueur $|n_R|$ pour une taille donnée de voisinage :

$$C_R^1 := \frac{1}{\alpha + \beta(|n_R|/R)^2}. \quad (4.4)$$

- Le second est basé sur la longueur $|n_R|$, la plus petite des valeurs propres λ_{min} et la plus grande des valeurs propres λ_{max} de la matrice de covariance de $B_R(\mathbf{x}) \cap \partial X$:

$$C_R^{1,2} := \frac{1}{\alpha + \beta \left(\frac{|n_R| \lambda_{min}}{R \lambda_{max}} \right)^2}. \quad (4.5)$$

α et β sont deux paramètres (positifs), laissées à la discrétion de l'utilisateur, pour lisser le score de zones caractéristiques et donc contrôler la précision du calcul par rapport à la robustesse au bruit. Le second estimateur, que nous utiliserons dans les expériences, produit des résultats légèrement meilleurs sur des données bruitées grâce au renforcement des valeurs propres de la matrice de covariance, liées à la normale et à la plus forte des courbures principales.

²Notées C_ϵ^0 et $C_\epsilon^{0,1}$ dans leur papier, $\epsilon := R$.

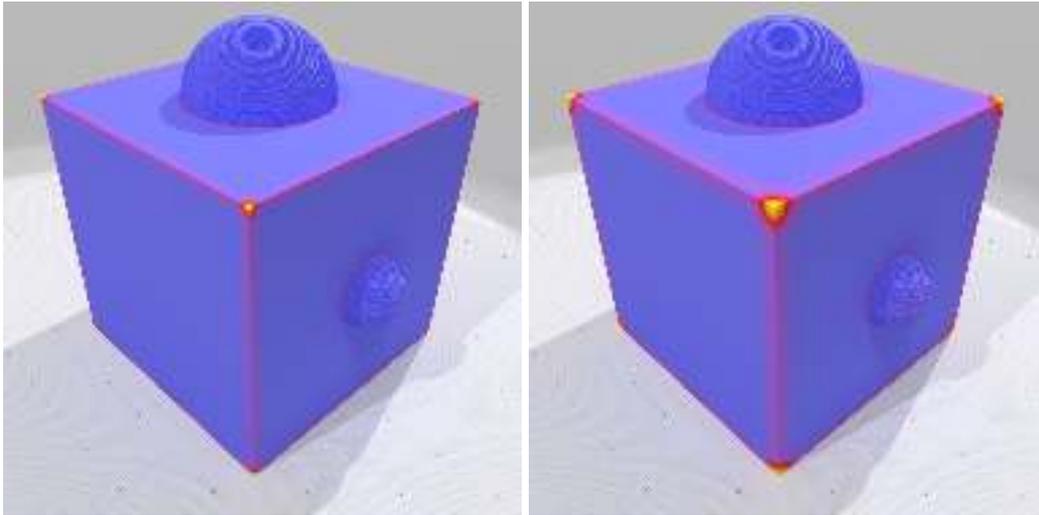


Figure 4.6 Résultat de l'équation 4.5 page précédente avec comme paramètres $\alpha = 1$, $\beta = 50$ pour deux tailles de voisinage $R = 10$ et $R = 22$.

Il y a alors trois paramètres à choisir : α , β , ainsi que la taille du voisinage, rendant la détection compliquée sans analyse au préalable de la forme d'entrée. Le paragraphe 4.1.3 page 133 compare le résultat de l'équation 4.5 page précédente avec deux rayons différents.

Mesure de covariance des cellules de Voronoï Nous avons parlé de la mesure de covariance des cellules de Voronoï de MÉRIGOT *et al.* [Mér+11] (basée sur les travaux de ALLIEZ *et al.* [All+07]) dans l'état de l'art du chapitre 3 page 29. Pour résumer, chaque point \mathbf{p} est associé à une *mesure de covariance des cellules de Voronoï* $\mathcal{V}_{K,R}$ (🇬🇧Voronoi Covariance Measure — **VCM**—) dont ils peuvent extraire des informations sur la géométrie sous-jacente.

L'estimateur **VCM** a alors besoin de deux paramètres : le rayon de dilatation R de l'ensemble d'entrée (la fonction distance est plus robuste lorsqu'elle est loin de la surface), et le rayon de convolution r qui définit quelles cellules de Voronoï vont être intégrées pour lisser la mesure. Ces deux paramètres permettent également de limiter l'impact du bruit sur la surface tout en préservant les informations géométriques. Un score de point caractéristique $r(\mathbf{p})$ est alors calculé à l'aide d'un ratio des valeurs propres de la convolution du **VCM** $\mathcal{V}_{K,R} * \chi_r(\{\mathbf{p}\})$ pour chaque point \mathbf{p} :

$$r(\mathbf{p}) := \frac{\lambda_2(\mathbf{p})}{\lambda_0(\mathbf{p}) + \lambda_1(\mathbf{p}) + \lambda_2(\mathbf{p})}. \quad (4.6)$$

Le point est alors considéré comme une singularité si son ratio est supérieur à un paramètre de seuillage T donné par l'utilisateur.

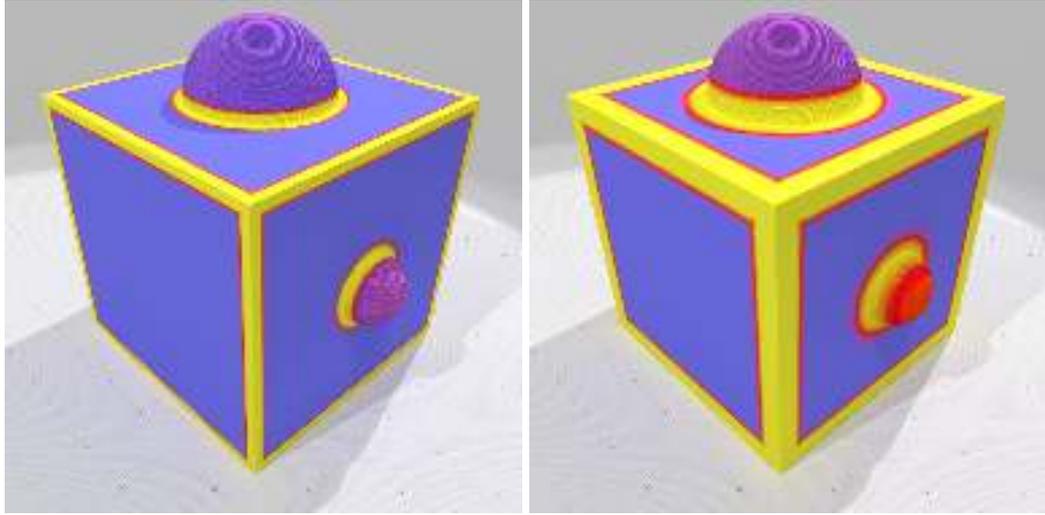


Figure 4.7 Résultat de l'équation 4.6 page ci-contre avec comme paramètres $T = 0.2$, $R_1 = 10$, $r_1 = 10$ (à gauche) et $R_2 = 22$, $r_2 = 22$ (à droite).

Vote de tenseur Dans un esprit similaire aux méthodes précédentes, certains auteurs [Par+12] ont proposé une stratégie de vote de tenseur ( *Tensor Voting*) sur des morceaux surfaciques. Ce dernier, défini par MEDIONI *et al.* [Med+00] est l'intégration du tenseur des points d'un voisinage, contenant des informations de la surface sous-jacente. Ils utilisent alors un comportement en espace d'échelle du vote du tenseur lorsque la taille du voisinage augmente afin d'extraire les singularités sur des nuages de points. Cependant, ces méthodes sont très sensibles et ne produisent pas de résultats suffisamment robustes sur des données digitales.

Plus concrètement, pour un voisinage donné ³, PARK *et al.* [Par+12] accumulent dans une matrice les tenseurs :

$$T_i = \sum_{j \in N(i)} \left(\mathcal{I}_3 - \frac{\vec{v}_j \vec{v}_j^T}{\|\vec{v}_j \vec{v}_j^T\|} \right), \quad (4.7)$$

avec $\vec{v}_j = \vec{x}_j - \vec{x}_i$.

Avec un ratio sur les valeurs propres de cette matrice, PARK *et al.* veulent obtenir un poids ω_i déterminant si le point est caractéristique :

$$\omega_i = \frac{\lambda_2 + \lambda_3}{\lambda_1}, \quad (4.8)$$

et ainsi classifier la surface en deux catégories : FEATURE (c'est-à-dire dans le cas présent une singularité) et NON-FEATURE.

³Des contraintes de connectivité et d'uniformité entrent en jeu, mais sont satisfaites sur une grille régulière digitale.

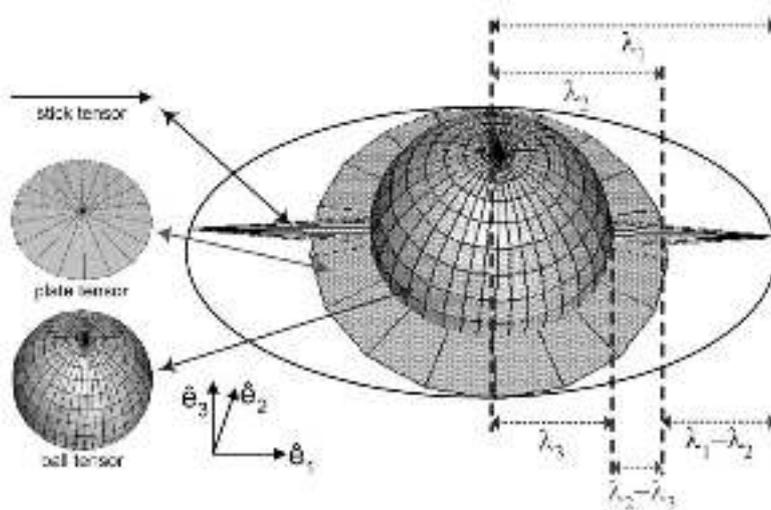


Figure 4.8 Les trois différents type de tenseur de la théorie du vote de tenseur [Med+00]. Nous utiliserons ici uniquement le tenseur de boule.

L'analyse en espace d'échelle intervient au niveau du seuillage avec les poids calculés à partir des matrices. Deux bornes sont alors définies par l'utilisateur : ω^- et ω^+ , celles-ci correspondent au seuil inférieur et supérieur de la variation de ω_i en fonction du rayon. En effet, sur des zones à forte courbure, le poids sera plus élevé que sur des zones à courbure nulle. Bien que le poids soit stable quelle que soit l'échelle sur ces zones, l'analyse à plusieurs rayons permet de capturer des zones de saillance qui auraient pu ne pas être considérées à une échelle donnée ; c'est le cas d'une zone lisse ou proche d'une singularité par exemple où ω_i croîtra (figure 4.9 page suivante).

Ainsi, pour tous les rayons, si le poids devient plus grand que ω^+ , le point sera labellisé comme FEATURE (en rouge sur figure 4.10 page 120) ; si le poids devient plus petit que ω^- alors le point sera labellisé comme NON-FEATURE (en vert) ; si le poids est entre ω^- et ω^+ , nous allons regarder la variation du poids : si le poids est supérieure à τ fois le poids au rayon précédent, nous gardons le précédent poids. Cette dernière condition permet d'éliminer les résultats erronés dus au bruit par exemple, introduisant une forte variation. Ces points seront traités plus tard. Pour tous les autres points (donc ceux qui ne sont pas labellisés FEATURE, NON-FEATURE ou avec une forte variation de poids), nous allons effectuer la même vérification à l'échelle supérieure. Enfin, pour tous les points restant non labellisés, un regroupement (*clustering*) sera fait afin de traiter les regroupements de moins de n_{min} points⁴ comme NON-FEATURE, les autres regroupements comme FEATURE.

⁴Dans leur article, les auteurs choisissent arbitrairement $n_{min} = 10$, mais ajoutent que cette valeur peut varier en fonction de la densité de points.

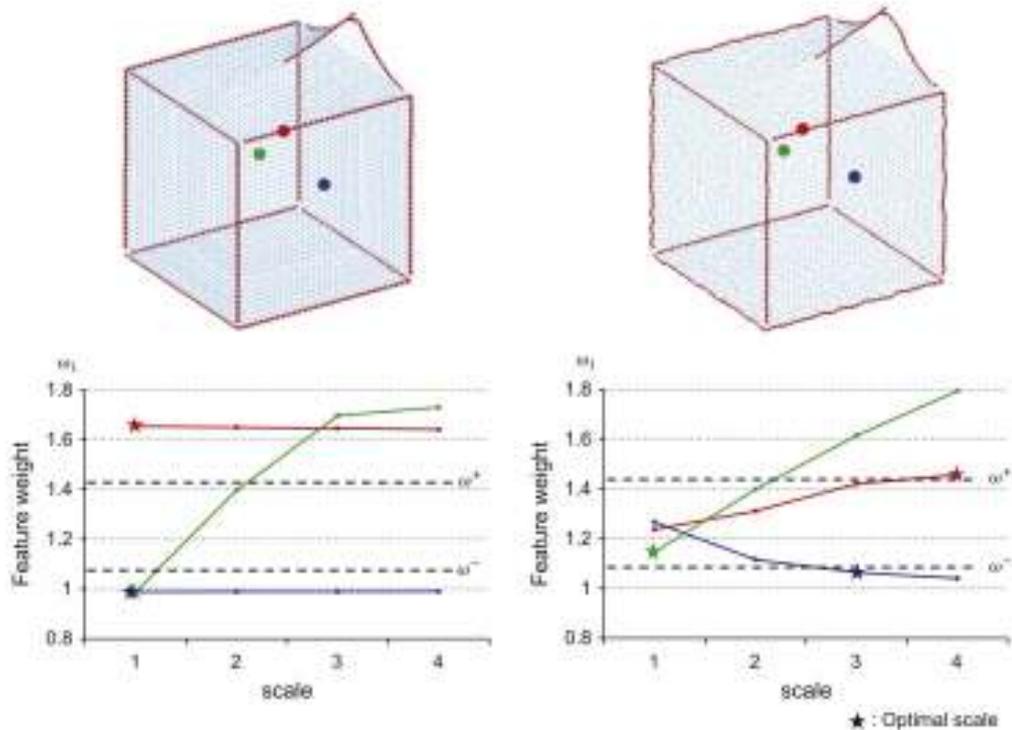


Figure 4.9 Variation du poids ω_i (Figure 6 de [Par+12]).

Expérimentalement, ω^- et ω^+ sont très dépendants de la géométrie de la forme à analyser, et de ce que nous voulons extraire comme « zones caractéristiques ». Une analyse plus complète est proposée dans le [paragraphe 4.1.3 page 133](#).

Approximation aux moindres carrés de sphères D'autres auteurs [Mel+12] ont introduit une approche rapide d'approximation aux moindres carrés de sphères sur un nuage de points pour créer un score de zones caractéristiques multi-échelles. À nouveau, le paramètre d'espace d'échelle est la taille de voisinage.

Dans leurs travaux, MELLADO *et al.* [Mel+12] proposent d'approximer aux moindres carrés des sphères (*least squares spherical fitting*) à la surface de l'objet, et d'en extraire un score de *feature* sur chaque élément de la surface. Le paramètre d'espace d'échelle est la taille du voisinage à considérer dans l'approximation. En utilisant leurs notations, pour toutes les échelles t ($t = R$ avec nos notations), ils font correspondre une hyper-sphère algébrique. Ils notent τ comme la distance de décalage algébrique entre le point p et la 0-isosurface, η comme la normale unité et κ comme la courbure (signée) de l'hyper-sphère.

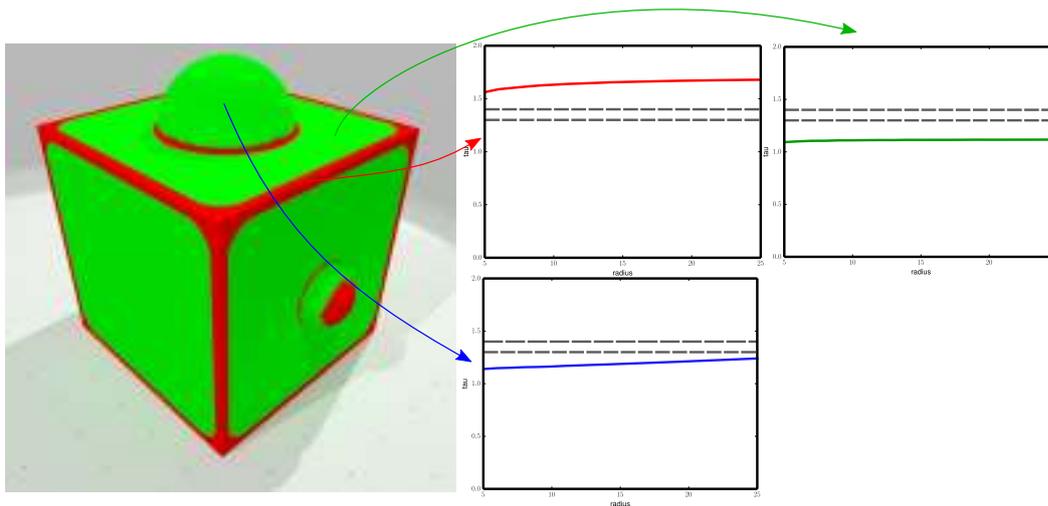


Figure 4.10 Variation du poids ω_i à trois points différents : sur une partie lisse (*en bleu*), sur une partie à courbure nulle (*en vert*) et sur une singularité (*en rouge*). Les lignes en pointillés sur les graphes sont respectivement $\omega^- = 1.3$ et $\omega^+ = 1.4$.

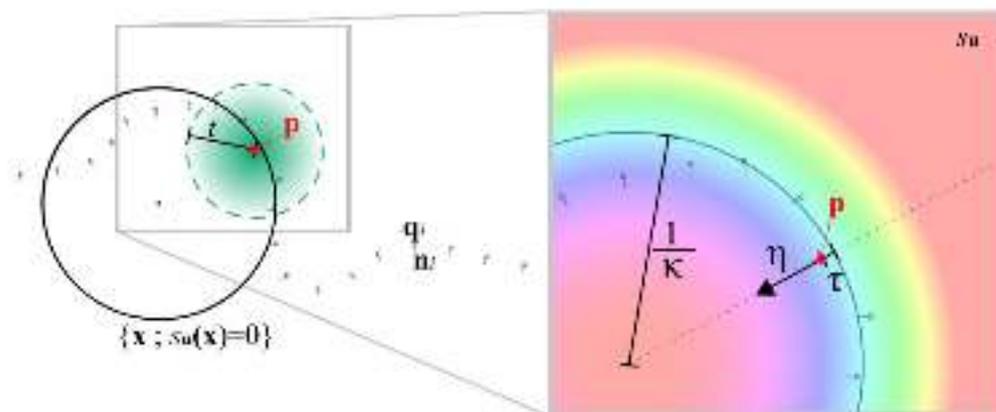


Figure 4.11 Notations (Figure 1 de [Mel+12]).

Ils proposent alors de calculer la *variation géométrique* au point \mathbf{p} définie telle que :

$$\nu(\mathbf{p}, t) := \left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 + \left(t\frac{d\eta}{dt}\right)^2 + \left(t^2\frac{d\kappa}{dt}\right)^2. \quad (4.9)$$

Les auteurs laissent l'utilisateur déterminer ce qu'il considère comme un point caractéristique en seuillant par exemple cette variation géométrique.

Pendant, ils déterminent également une autre fonction continue d'estimation de singularités f intégrant toutes les échelles :

$$f(\mathbf{x}) := \int \tanh(\nu(\mathbf{x}, t)) dt. \quad (4.10)$$

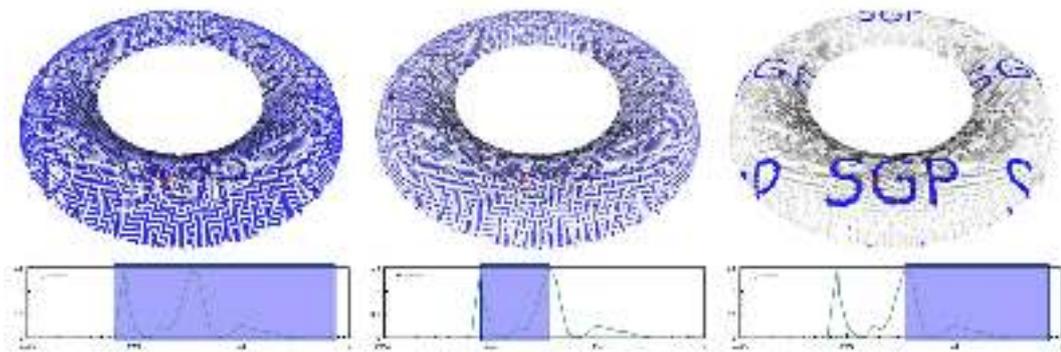


Figure 4.12 Sélection des points caractéristiques par l'utilisateur en fonction de la variation géométrique ν (Figure 11 de [Mel+12]).

Cette fonction permet de différencier les régions sans variations géométriques (en bleu sur la figure 4.13 page ci-contre) de celles qui ont de hautes variations (en jaune)⁵.

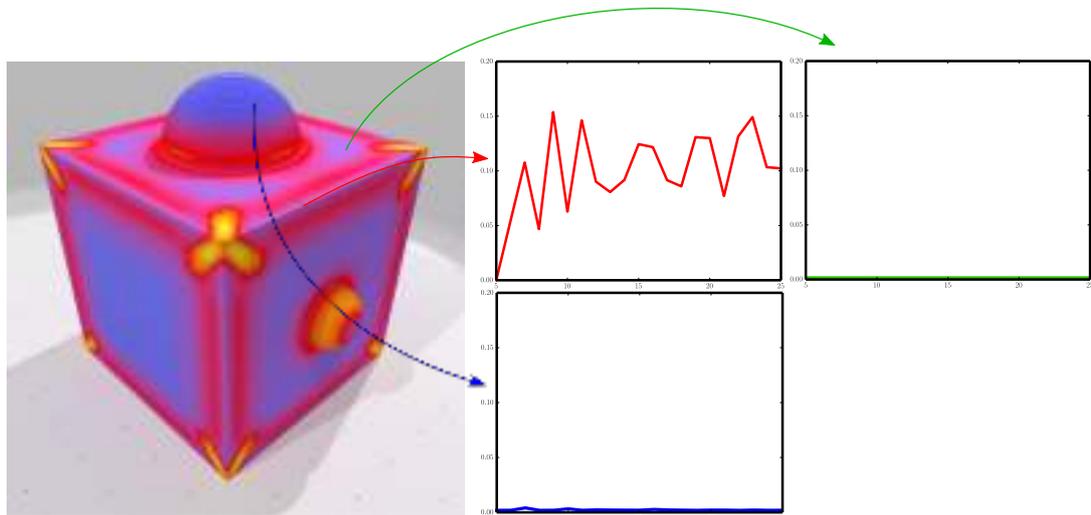


Figure 4.13 Valeur de la fonction f en tout point de la surface sur l'objet « CUBESPHERE ». Visualisation des valeurs de $\nu(x, t)$ en changeant le rayon t .

Expérimentalement, cette méthode semble moins sensible au bruit, mais des artefacts apparaissent sur les singularités (voir le paragraphe 4.1.3 page 133 pour une comparaison).

Le principal défaut de cette méthode est qu'elle ne fournit pas de quantité exploitable directement reliée à des quantités géométriques (comme la courbure par exemple). Expérimentalement, la quantité permet de différencier les zones caractéristiques, mais ne repose sur aucune preuve théorique.

⁵ $\tanh(x)$ est souvent utilisée pour renforcer les variations tout en les bornant.

4.1.1.3 Méthodes basées sur de l'analyse spectrale

Enfin, les zones caractéristiques peuvent être extraites grâce à une analyse spectrale sur le bord de la forme en utilisant les valeurs propres de cette matrice laplacienne de la surface [Geb+09; Sun+09; Son+14]. Dans ce contexte, la saillance est caractérisée par des quantités spectrales qui sont localement stables et distinguables de leur voisinage.

Matrice laplacienne multi-échelle SONG *et al.* [Son+14] se sont alors penchés sur l'analyse du spectre de la matrice laplacienne afin d'extraire des informations de saillance. La matrice laplacienne L (de taille $n \times n$, n étant le nombre de sommets) est définie comme :

$$L = W - D, \quad (4.11)$$

où W est la matrice d'adjacence à laquelle nous incorporons des informations géométriques entre les sommets, telles que :

$$A(i, j) = \begin{cases} 1 & \text{si } p_i \text{ et } p_j \text{ sont voisins,} \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}, \quad (4.12)$$

$$W(i, j) = \frac{1}{\|p_i - p_j\|^2} A(i, j), \quad (4.13)$$

et D une matrice diagonale dans laquelle $D_{i,i}$ est le degré du sommet p_i .

Alors, le spectre laplacien est calculé à partir des valeurs propres λ_i (ou fréquences) de L :

$$\mathcal{H}(i) = \{\lambda_i, 1 \leq i \leq n\}. \quad (4.14)$$

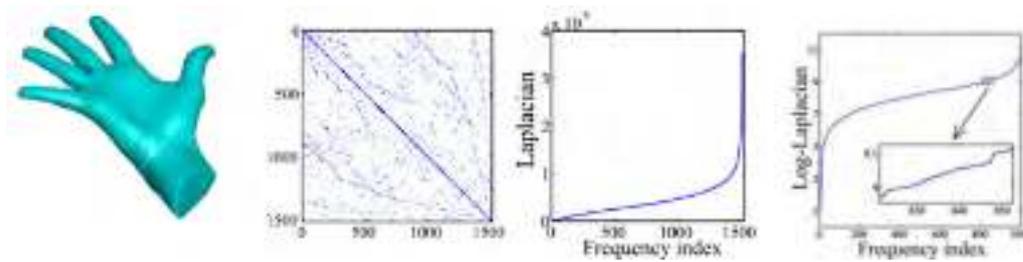


Figure 4.14 Matrice laplacienne L et son spectre \mathcal{H} et son spectre logarithmique \mathcal{L} (Figures 1 et 5 de [Son+14]).

Plus récemment, HOU *et al.* [HZ07] ont utilisé le logarithme du spectre de Fourier pour détecter les saillances visuelles d'images 2D. SONG *et al.* s'inspirent de cette méthode en utilisant le spectre logarithmique de la matrice laplacienne :

$$\mathcal{L}(i) = \log(|\mathcal{H}(i)|), \quad (4.15)$$

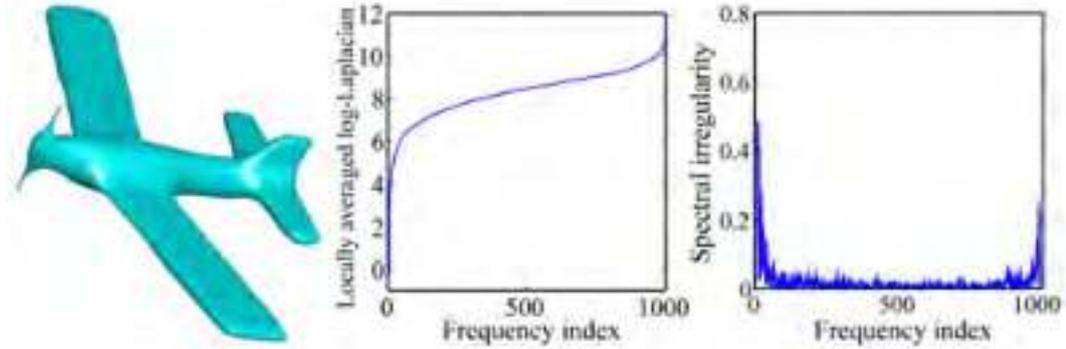


Figure 4.15 Matrice laplacienne L et son spectre \mathcal{H} (Figure 6 de [Son+14]).

$$S = BRB^TW, \quad (4.16)$$

où B est la matrice orthogonale dans laquelle les colonnes b_i sont les vecteurs propres de L et $R = \text{Diag}\{\exp(|\mathcal{L}(i) - \mathcal{J}_n(i) * \mathcal{L}(i)|) : 1 \leq f \leq m\}$ la matrice diagonale dont les entrées sont l'exponentielle des éléments de $|\mathcal{L}(i) - \mathcal{J}_n(i) * \mathcal{L}(i)|$, avec $\mathcal{J}_n(i)$ un filtre local moyen.

La carte de saillance S_i est alors obtenue en sommant S le long de chaque ligne de la matrice, correspondant chacune à un sommet du maillage. L'aspect multi-échelle apparaît en calculant ces cartes de saillances sur le maillage dont on aura fait varier le paramètre de lissage.

Ces techniques sont très intéressantes mais possèdent cependant des inconvénients sur des surfaces digitales. Tout d'abord, les surfaces digitales possèdent un très grand nombre d'éléments ce qui rendrait le calcul des valeurs propres de la matrice laplacienne très coûteux. Également, il faut nécessairement introduire une métrique dans l'opérateur discret laplacien permettant de corriger le biais induit par le côté isothétique des surfaces digitales.

En effet, si nous considérons la formulation du calcul extérieur discret ([Discrete Exterior Calculus](#) ou **DEC**) ou simplement l'approche de la formule des cotangentes⁶ pour définir un opérateur laplacien discret sur le plongement digital de la surface, l'effet d'escaliers dû à la discrétisation rend la métrique mal définie par le plongement géométrique de la surface. Par exemple, la diffusion de chaleur obtenue par cet opérateur produira des artefacts anisotropes comme un isocontour ellipsoïdal sur un plan discret incliné (voir la [figure 4.16 page suivante](#)).

⁶Il s'agit d'une discrétisation usuelle de l'opérateur de Laplace-Beltrami sur des surfaces polyédrales.

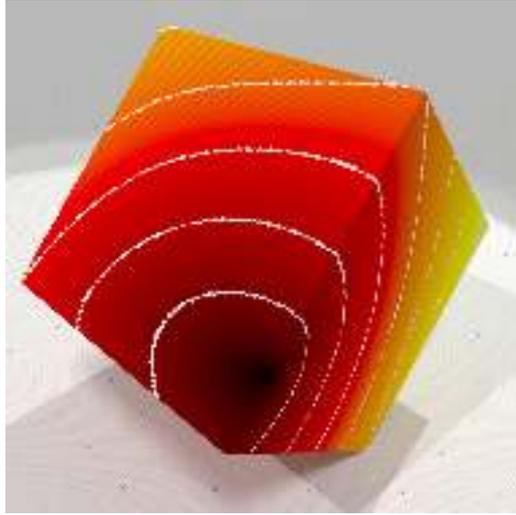


Figure 4.16 Diffusion de chaleur sur un objet digital induit par un opérateur laplacien discret dans la formulation du calcul extérieur discret. Un effet d'escalier apparaît sur les résultats.

4.1.2 Estimation de singularités par l'analyse en espace d'échelle de la courbure

Nous allons décrire un nouvel estimateur de singularités [Lev+15b] en étudiant les estimateurs de courbures par intégration présentés précédemment (paragraphe 3.3 page 45). Nous allons fixer la résolution h d'une forme $Z \subset \mathbb{Z}^d$ et considérer la taille de la sphère d'intégration R comme paramètre de l'espace d'échelle. Ce changement de rayon de boule d'intégration fera varier le résultat obtenu par notre estimateur de courbure (figure 4.17). Nous parlons ici d'analyse en espace-échelle de nos estimateurs, le paramètre étant le rayon de la boule.

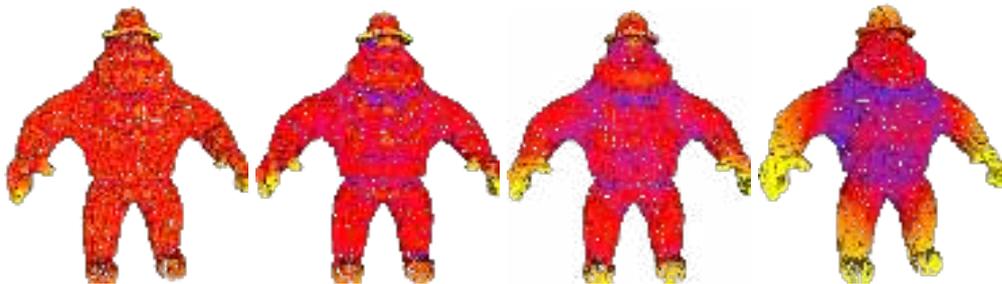


Figure 4.17 Courbure moyenne en utilisant la définition 3.5 page 53 pour différents rayons de boule : 4, 7, 14 et 30.

4.1.2.1 Analyse en espace d'échelle de $\tilde{\kappa}^R(x)$ et $\tilde{H}^R(x)$

Nous proposons alors d'étudier le comportement des estimateurs digitaux par intégration lorsque nous réduisons le rayon de la boule pour une forme et une

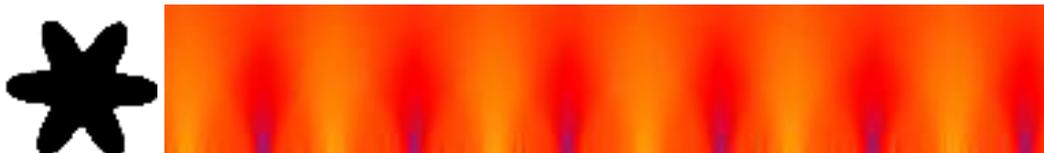


Figure 4.18 À gauche : forme digitale 2D de « FLOWER ». À droite : Association des valeurs de courbure sur le bord digital de la forme « FLOWER » en utilisant la [définition 3.4 page 53](#) (abscisse) pour différentes tailles de boules R (ordonnée, de haut en bas). Les couleurs correspondent aux valeurs de courbures : du bleu (courbure la plus petite) au jaune (courbure la plus grande).

résolution donnée. La [figure 4.18 page suivante](#) nous montre les variations de courbure en fonction du rayon de la boule lorsqu’il décroît (de haut en bas sur la figure) pour l’objet « FLOWER ». Nous nous apercevons que certaines caractéristiques ne sont perceptibles que dans un certain intervalle de rayons (les zones bleues par exemple) tandis que d’autres vont s’étendre (les zones rouges par exemple). Plus généralement, les points autour de singularités ont une valeur de courbure qui tend à fortement varier en fonction du rayon de la boule alors que les points autour de zones lisses sont relativement insensibles au rayon. Pour analyser ce comportement en espace d’échelle, nous proposons de classer les points de notre forme en trois catégories : EDGE (correspondant à des points non- C^1), SMOOTH (C^3 et suffisamment lisse) et FLAT (courbure nulle).

Plus formellement :

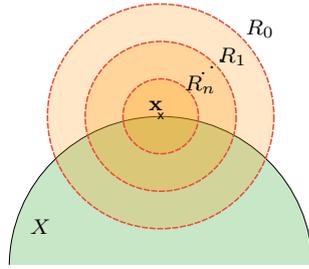
Définition 4.1 Pour tout point \mathbf{x} sur le bord d’une forme euclidienne X de \mathbb{R}^2 (respectivement \mathbb{R}^3), nous définissons l’estimateur en espace d’échelle de zones caractéristiques $G_{X,\mathbf{x}}(R)$ (resp. $\mathcal{G}_{X,\mathbf{x}}(R)$) tel que :

$$G_{X,\mathbf{x}}(R) := \frac{3\pi}{2R} - \frac{3A(R, \mathbf{x})}{R^3}, \quad \mathcal{G}_{X,\mathbf{x}}(R) := \frac{8}{3R} - \frac{4V(R, \mathbf{x})}{\pi R^4}, \quad (4.17)$$

où R – le paramètre de l’espace d’échelle – est le rayon de la boule euclidienne centrée au point \mathbf{x} , $A(R, \mathbf{x})$ est l’aire (en 2D) et $V(R, \mathbf{x})$ est le volume (en 3D) de l’intersection entre la boule et la forme X .

Dans la suite, nous supposons que l’objet X a un bord C^3 par morceaux, c’est-à-dire qu’il est lisse avec des singularités. Nous allons détailler le cas sur une partie lisse de cet objet, puis sur une singularité.

Cas lisse. Dans le cas lisse, c’est-à-dire lorsque ∂X est C^3 au point \mathbf{x} , il apparaît clairement que $G_{X,\mathbf{x}}(R)$ et $\mathcal{G}_{X,\mathbf{x}}(R)$ sont exactement les estimateurs de courbures de la [définition 3.2 page 46](#).



Puisque nous sommes dans les mêmes conditions que le [théorème 3.1 page 46](#), nous savons que :

$$G_{X,\mathbf{x}}(R) = \tilde{\kappa}(R, \mathbf{x}) = \kappa(\mathbf{x}) + O(R), \quad \mathcal{G}_{X,\mathbf{x}}(R) = \tilde{H}(R, \mathbf{x}) = H(\mathbf{x}) + O(R), \quad (4.18)$$

lorsque R décroît vers zéro. Alors $G_{X,\mathbf{x}}(R)$ nous donne un terme constant qui est la courbure au point \mathbf{x} .

Nous avons changé la notation car lorsque $G_{X,\mathbf{x}}(R)$ est sur une singularité, la valeur retournée n'est plus uniquement liée à la courbure au point \mathbf{x} .

Singularité. Considérons désormais que le point \mathbf{x} est localisé sur une singularité de ∂X :

Définition 4.2 (théorème 12 de [Pot+09]). Soit X une forme euclidienne de \mathbb{R}^2 (respectivement \mathbb{R}^3) avec un bord C^3 par morceaux, et soit $\mathbf{x} \in \partial X$ une singularité. Alors, si α_0 est l'angle entre les deux demi-tangentes au point \mathbf{x} et si κ_- et κ_+ sont les courbures limites à gauche et à droite, nous avons :

$$A(R, \mathbf{x}) = \frac{\alpha_0 R^2}{2} - \frac{\kappa_- + \kappa_+}{6} R^3 + O(R^4), \quad (4.19)$$

$$V(R, \mathbf{x}) = \frac{2\alpha_0 R^3}{3} - \frac{\pi(H_- + H_+)}{8} R^4 + O(R^5). \quad (4.20)$$

Alors, $G_{X,\mathbf{x}}(R)$ et $\mathcal{G}_{X,\mathbf{x}}(R)$ sont des fonctions du rayon de la boule R et de l'angle α_0 :

$$G_{X,\mathbf{x}}(R) = \frac{3}{2} \frac{1}{R} (\pi - \alpha_0) + \frac{\kappa_- + \kappa_+}{6} + O(R), \quad (4.21)$$

$$\mathcal{G}_{X,\mathbf{x}}(R) = \frac{8}{3} \frac{1}{R} (1 - \frac{\alpha_0}{\pi}) + \frac{H_- + H_+}{2} + O(R). \quad (4.22)$$

$G_{X,\mathbf{x}}(R)$ nous donne un monôme en R d'exposant -1 dont le coefficient est dépendant de l'angle α_0 .

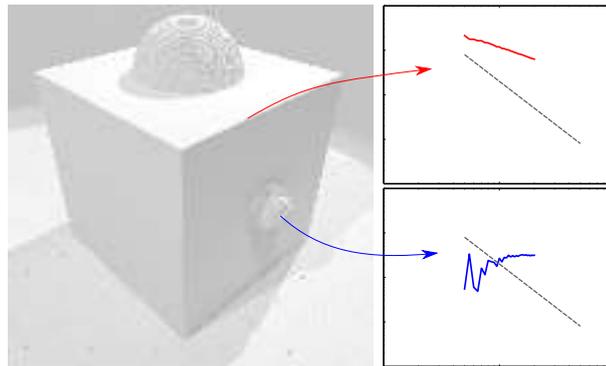
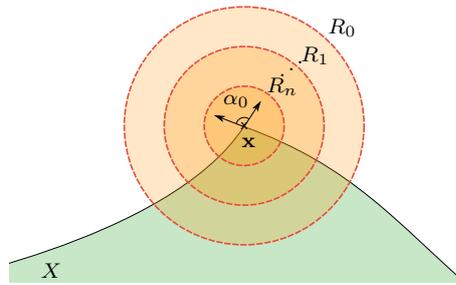


Figure 4.19 Graphes (en échelle logarithmique) des valeurs de $G_{X,x}(R)$ (sur l'axe des ordonnées) pour deux points de l'objet « CUBESPHERE » en fonction du rayon de la boule (décroissant, de droite à gauche, sur l'axe des abscisses).

En conclusion, $G_{X,x}(R)$ a deux comportements distincts lorsque nous sommes sur un point d'une surface lisse ou lorsque nous sommes sur une singularité de la surface. Lorsque le rayon R décroît sur une surface lisse, l'estimateur de caractéristique nous retourne la courbure au point x , c'est-à-dire une valeur constante. Sur une singularité, l'estimateur de caractéristique nous retourne une quantité qui croît hyperboliquement lorsque R décroît (donc linéairement en échelle logarithmique), comme le montre la [figure 4.19](#). Il est à noter que pour éviter des problèmes avec les parties concaves, nous prenons la valeur absolue de $G_{X,x}(R)$.

Les définitions et résultats précédents portent sur des objets euclidiens lisses $X \in \mathbb{R}^d$, nous devons également nous intéresser au cadre des objets digitaux.

4.1.2.2 Influence de la discrétisation

Lorsque nous discrétisons $B_R(\mathbf{x}) \cap G_h(X)$, pour un rayon de boule R donné et un pas de discrétisation h , une infinité de formes euclidiennes X avec différentes valeurs de courbure au point x donnent exactement la même valeur pour $\widehat{\text{Area}}(G_h(B_R(\mathbf{x}) \cap X), h)$, et donc la même valeur pour $G_{X,x}(R)$. Cela est dû à la perte d'informations de la discrétisation, et le constat est le même en 3D.

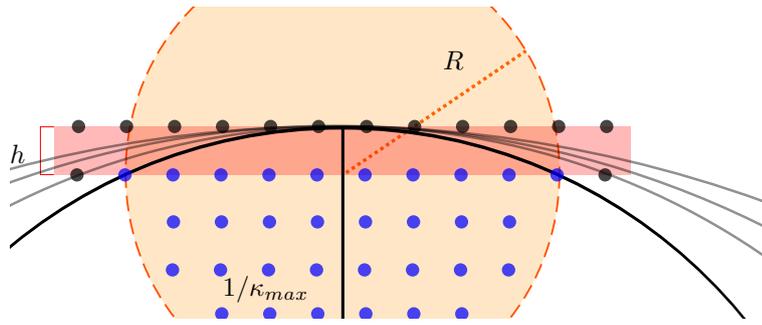


Figure 4.20 Effets de discrétisation et notations de la propriété 4.1. Toutes les courbes noires et grises donnent la même discrétisation d'intersection avec $B_R(\mathbf{x})$.

La figure 4.20 page suivante illustre ceci en nous montrant une valeur de $B_R(\mathbf{x}) \cap \mathcal{G}_h(X)$ (en bleu) pour une valeur de courbure κ_{max} limite de X (en noir) au point \mathbf{x} pour un rayon de boule R (en orange) et un pas de discrétisation h donnés. Toutes les courbes ayant une valeur (absolue) de courbure inférieure à κ_{max} auront exactement la même valeur de $B_R(\mathbf{x}) \cap \mathcal{G}_h(X)$.

Nous nous intéressons alors à déterminer l'ensemble de valeurs (réelles) de courbure au point \mathbf{x} qui correspondent à une zone à courbure nulle à cause de la discrétisation. La courbure maximale qui peut être incorrectement interprétée comme une région à courbure nulle est donnée par la propriété suivante :

Propriété 4.1 Soit X une forme euclidienne sphérique de \mathbb{R}^2 (resp. \mathbb{R}^3), R le rayon de la boule et h le pas de discrétisation, pour $\mathbf{x} \in \partial X$, la courbure maximale (resp. la courbure moyenne maximale) au point \mathbf{x} résultant à la même quantité $G_{X,\mathbf{x}}(R)$ (resp. $\mathcal{G}_{X,\mathbf{x}}(R)$) que pour une forme plate est :

$$\kappa_{max}(R, h) = \frac{2h}{R^2 + h^2}, \quad \left(\text{resp. } H_{max}(R, h) = \frac{2h}{R^2 + h^2} \right). \quad (4.23)$$

Démonstration. La preuve est directe par relation de Pythagore sur la figure 4.20. Soit R le rayon de la boule, h le pas de discrétisation de la grille, $\kappa_{max}(R, h)$ le valeur

de courbure réelle maximale pour laquelle le pas de discrétisation et le rayon de la boule ne permettent pas de distinguer par rapport à une courbure nulle :

$$\left(\frac{1}{\kappa_{max}(R, h)} - h\right)^2 + R^2 = \left(\frac{1}{\kappa_{max}(R, h)}\right)^2 \quad (4.24)$$

$$\left(\frac{1}{\kappa_{max}(R, h)}\right)^2 - 2h\left(\frac{1}{\kappa_{max}(R, h)}\right) + h^2 + R^2 = \left(\frac{1}{\kappa_{max}(R, h)}\right)^2 \quad (4.25)$$

$$\frac{1}{\kappa_{max}(R, h)} = \frac{R^2 + h^2}{2h} \quad (4.26)$$

$$\kappa_{max}(R, h) = \frac{2h}{R^2 + h^2} \quad (4.27)$$

En 3D, le cas limite est une sphère de courbure moyenne H_{max} et peut être réduite à une coupe 2D, ce qui revient à la même conclusion qu'en 2D. \square

En conséquence, si $G_{X,x}(R)$ est inférieure à κ_{max} (ou $\mathcal{G}_{X,x}(R)$ inférieure à H_{max} en 3D) pour un point x de ∂X , nous ne pouvons décider si x est sur une surface très légèrement lisse ou sur une surface à courbure nulle. À noter que si nous affichons la valeur de $\kappa_{max}(R, h)$ ou $H_{max}(R, h)$ en échelle logarithmique en fonction du rayon choisi R , nous obtenons une droite de pente -2 . C'est ce que nous observons par exemple sur la [figure 4.21](#) en pointillés gris.

Il apparaît alors clairement que le rayon R (ou l'ensemble de rayons dans le cas d'une analyse en espace d'échelle) de la boule contrôle la *taille* de la caractéristique qui sera détectée à cause des artefacts de discrétisation : une singularité trop petite avec un pas de discrétisation trop faible sera absorbé par les artefacts de discrétisation.

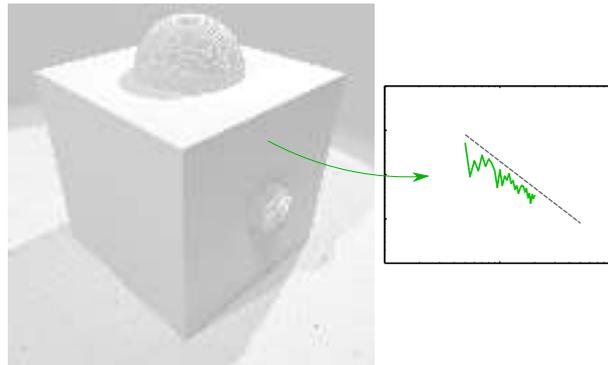


Figure 4.21 Graphe (en échelle logarithmique) des valeurs de $\mathcal{G}_{X,x}(R)$ (sur l'axe des ordonnées) pour un point d'une région à courbure nulle de l'objet « CUBESPHERE » en fonction du rayon de la boule (décroissant, de droite à gauche, sur l'axe des abscisses).

Nous pouvons observer les trois cas en espace d'échelle : sur la courbe verte de la [figure 4.21](#), toutes les valeurs de $\mathcal{G}_{X,x}(R)$ sont inférieures à H_{max} (représentées par la droite grise en pointillés), ce qui est caractéristique des régions à courbure

nulle. Sur la courbe rouge de la [figure 4.19 page 127](#), toutes les valeurs de $\mathcal{G}_{X,x}(R)$ sont au dessus de H_{max} et de pente -1 , ce qui est le comportement attendu pour les singularités. Sur la courbe bleue de la [figure 4.19 page 127](#), les valeurs de $\mathcal{G}_{X,x}(R)$ sont au dessous de H_{max} seulement pour de petits rayons R , ce qui laisse supposer que ces rayons sont *trop petits* pour capturer la régularité de la surface. Pour des rayons plus grands, les valeurs de H_{max} sont supérieures à $\mathcal{G}_{X,x}(R)$ et sont constants, ce qui est le comportement attendu pour les régions lisses. Comme décrit dans le [paragraphe 4.1.2.3](#), la classification finale considérera uniquement les rayons dont les valeurs de $G_{X,x}(R)$ sont supérieures à κ_{max} (ou $\mathcal{G}_{X,x}(R)$ et H_{max} en 3D) ; les points au dessous seront considérés comme des régions à courbure nulle ou des « données incorrectes ».

4.1.2.3 Classification basée sur la distance aux modèles linéaires

Nous avons deux comportements distincts exploitables en espace d'échelle pour notre classification :

- nous pouvons détecter les zones à courbure nulle/« données incorrectes » en utilisant κ_{max} ou H_{max} ;
- lorsque les valeurs sont considérées comme « correctes », c'est-à-dire dont les valeurs sont au dessus de κ_{max} , nous pouvons alors distinguer si nous sommes sur une surface lisse ou sur des singularités lorsque R décroît.

Ces comportements sont exactement les mêmes en 2D et en 3D, ce qui suit peut être appliqué indifféremment pour $G_{X,x}(R)$ comme $\mathcal{G}_{X,x}(R)$.

Pour un intervalle de rayons décroissants R_i , $0 \leq i \leq n$, nous calculons l'estimateur de singularités $G_{Z,p}(R)$ (la version digitale de $G_{X,x}(R)$) au point $\mathbf{p} \in \partial Z$, avec $Z = G_h(X)$.

Dans un premier temps, nous supprimons les « données incorrectes » du graphe de la fonction $G_{Z,p}(R)$ (c'est-à-dire tous les points dont la valeur de courbure est inférieure à κ_{max}). S'il n'y a plus suffisamment de données (trop de valeurs sous κ_{max}), nous classifions ce point comme FLAT. Sur toutes les images suivantes, la couleur verte sera assignée aux zones classifiées FLAT ([figure 4.22 page ci-contre](#) par exemple). S'il reste assez de données, nous calculons une approximation aux moindres carrés ([least square fitting](#)) des données, en échelle logarithmique, d'un modèle linéaire de pente en 0 (fonction constante que nous nommerons « modèle SMOOTH », l'ordonnée étant inconnue) et d'un modèle linéaire de valeur de pente

de -1 (« modèle EDGE », l'ordonnée est également inconnue, voir [équation 4.22](#) page 126).

Pour un modèle linéaire donné de pente γ fixée, la distance entre le modèle linéaire e_γ et l'ensemble $\{G_{Z,\mathbf{p}}(R_i), \dots, G_{Z,\mathbf{p}}(R_j)\}$ (pour n valeurs de rayons R_i , $0 \leq i \leq n$) est donné par :

$$e_\gamma(G_{Z,\mathbf{p}}(R_i), \dots, G_{Z,\mathbf{p}}(R_j)) = \min_{b \in \mathbb{R}} \left(\sum_{k=i}^j (Y_k - \gamma X_k + b)^2 \right), \quad (4.28)$$

avec $X_k = \log(R_k)$ et $Y_k = \log(G_{Z,\mathbf{p}}(R_k))$. Puisque nous minimisons une somme de termes quadratiques, la valeur de b^* pour laquelle l'[équation 4.28](#) est minimale est :

$$b^* = \frac{\sum_{k=i}^j (\gamma X_k - Y_k)}{n}. \quad (4.29)$$

Si la distance au « modèle SMOOTH » est inférieure que la distance au « modèle EDGE », nous pouvons classer le point comme SMOOTH (de couleur bleu), sinon il correspondra à la classe EDGE (de couleur rouge).

Pour une infinité de petites rayons et un pas de discrétisation h , cette classification capture parfaitement les comportements constants et hyperboliques des valeurs de courbures, et il décide correctement si le point est une singularité ou pas.

4.1.2.4 Transitions de modèles et classification générale

Lorsque nous traitons des données bruitées, la classification idéale précédente peut être hautement perturbée si le bruit introduit de grandes valeurs de courbures dans le profil de courbure pour de petits rayons. En plus de ces artefacts, pour un ensemble fini de rayons, des transitions de classes peuvent apparaître. Par exemple, lorsqu'un point est proche d'une singularité, ce point peut être classifié comme EDGE pour de grands rayons, SMOOTH pour de plus petits et éventuellement FLAT si la valeur tombe au dessous de $\kappa_{max}(R, h)$. Cet effet est illustré sur la [figure 4.22](#) pour un point proche d'une singularité.

Afin de reconnaître ce comportement, nous introduisons dans un premier temps un nouveau modèle linéaire de pente de -2 qui correspond à la pente de $\kappa_{max}(R, h)$ comme nous l'avons vu précédemment, que nous allons nommer le « modèle FLAT ». Si la distance au modèle FLAT est inférieure aux distances aux modèles SMOOTH et EDGE, nous pouvons corriger la classification en FLAT. Nous pouvons alors évaluer le comportement des trois distances lorsque le rayon de la boule change. En faisant cela, nous pouvons évaluer lorsque des transitions opèrent lors des approximations de modèles linéaires. Si une transition est détectée (voir [figure 4.22](#)), nous décidons

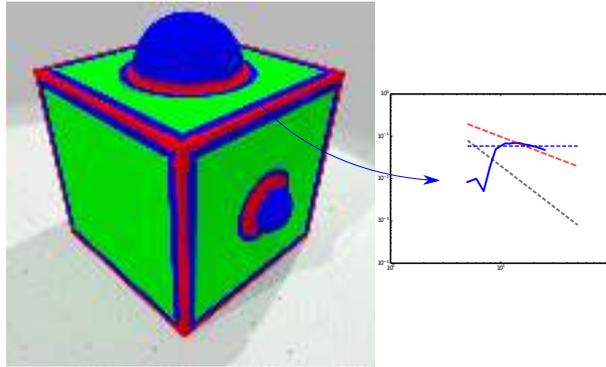


Figure 4.22 Graphe de transition de modèles d'un point proche d'une singularité.

de classifier le point au modèle dont la distance est minimale pour le plus large ensemble de rayons.

Plus formellement, nous définissons l_γ le nombre de rayons dans l'intervalle $[R_0, R_n]$ pour lesquels la distance e_γ au modèle de pente γ (pour γ compris dans $\{-2, -1, 0\}$) est minimale (comparée aux autres).

Finalement, pour un point \mathbf{p} du bord ∂Z de la forme $Z \subset \mathbb{Z}^2$ ou \mathbb{Z}^3 , nous définissons notre classification de zones caractéristiques comme suit :

$$C_{Z,\mathbf{p}}(R_0, R_n) = \begin{cases} \text{FLAT,} & \text{si } \forall 0 \leq i \leq n, G_{Z,\mathbf{p}}(R_i) < \kappa_{\max}(R_i, h) \\ & \text{ou si } l_{-2} > \max(l_{-1}, l_0) \\ \text{SMOOTH,} & \text{si } l_0 > \max(l_{-1}, l_{-2}) \\ \text{EDGE,} & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4.30)$$

4.1.2.5 Résultats

Nous allons désormais tester notre classificateur sur un jeu de données, en 2D comme en 3D. Les comparaisons avec les autres estimateurs sont disponibles dans le paragraphe 4.1.3 page suivante.

Il est important de noter que le rayon maximal R_0 de notre intervalle de rayons de boule est relié à la plus petite courbure d'une région SMOOTH que nous souhaitons détecter. Autrement, d'après la propriété 4.1 page 128, notre estimateur classera avec erreur la zone comme une partie FLAT car les rayons utilisés ne permettent pas de détecter la géométrie locale de la forme discrétisée. L'avantage de notre classificateur est qu'il ne nécessite aucun paramètre autre que l'intervalle de rayons. De ce fait, il est alors simple de classer des zones quelle que soit la résolution de

la forme. La figure 4.24 page suivante nous montre le résultat de classification pour différentes résolutions de la forme « OCTAFLOWER » : 256^3 , 512^3 et 1024^3 et la figure 4.23 sur l'objet « BUNNY » ainsi que sur des micro-structures de neige. Comme pour l'estimation de courbure, un pré-calcul de la taille de la forme grâce aux segments maximaux pourrait aider à se défaire de ces paramètres de rayons.

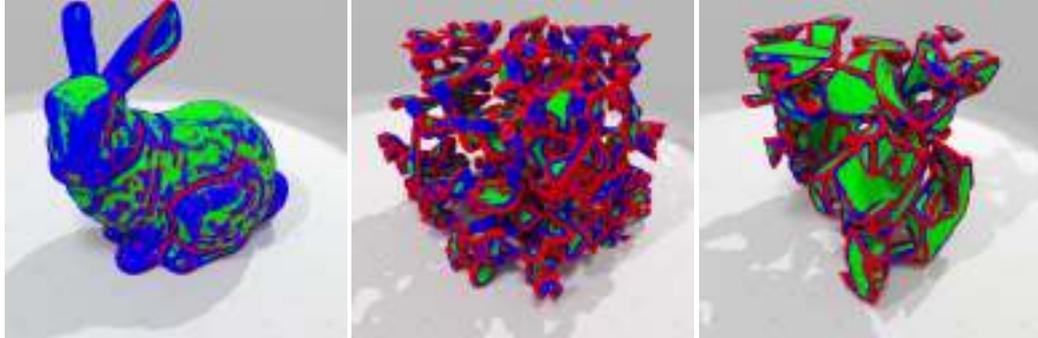


Figure 4.23 Résultat de notre estimateur de singularité sur l'objet « BUNNY » ainsi que des micro-structures de neige obtenues à partir de micro-tomographie à rayons X.

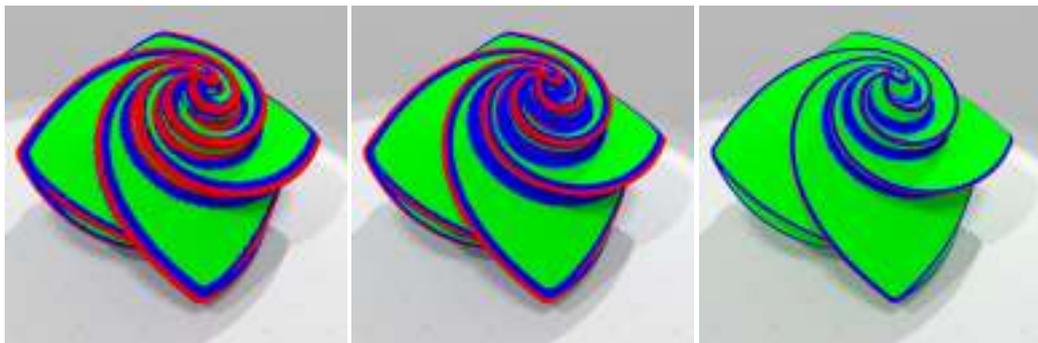


Figure 4.24 Résultat de notre estimateur de singularité sur l'objet « OCTAFLOWER » à différentes résolutions (256^3 , 512^3 et 1024^3).

4.1.3 Comparaison des estimateurs de points caractéristiques

Dans cette section, nous allons comparer qualitativement différents estimateurs de points caractéristiques les plus représentatifs de l'état de l'art pouvant s'adapter sur des données digitales. Dans le cadre de notre comparaison, nous avons mis en œuvre les estimateurs décrits dans le paragraphe 4.1.1 page 111 (voir le tableau 4.2). Notre comparaison porte sur quatre objets digitaux ; deux principalement utilisés dans le domaine : « FANDISK » et « OCTAFLOWER » ; et deux permettant de mettre en relief l'importance de l'échelle choisie dans les estimateurs : « SPHERESUNION » et « CUBESPHERE ». Ces derniers comportent en effet plusieurs zones caractéristiques de différentes tailles (tableau 4.3 page suivante).

Table 4.2 Table des estimateurs de points caractéristiques utilisés pour la comparaison.

Méthode	Paramètres	Classification	Espace d'échelle	Robustesse
CLARENZ <i>et al.</i> [Cla+04]	R, α, β	✗	✗	✓
MÉRIGOT <i>et al.</i> [Mér+11]	R, r, T	✗	✗	✓
MELLADO <i>et al.</i> [Mel+12]	r_{min}, r_{max}	✗	✗	✓
PAULY <i>et al.</i> [Pau+03]	$r_{min}, r_{max}, \tau_{max}$	✗	✓	✗
PARK <i>et al.</i> [Par+12]	$r_{min}, r_{max}, \omega^-, \omega^+, \tau$	✓	✓	✗
Notre méthode	r_{min}, r_{max}	✓	✓	✓

Table 4.3 Table des objets digitaux utilisés pour la comparaison.

Object	Résolution (voxels)	# éléments de surface (surfels)	
		non bruité	bruité
SPHERESUNION	$400 \times 200 \times 200$	265 062	640 476
CUBESPHERE	200^3	262 642	855 316
FANDISK	512^3	734 658	1 832 088
OCTAFLOWER	512^3	692 916	1 740 509

Nous avons fait le choix d'étudier les paramètres des estimateurs au préalable afin qu'ils obtiennent de bons résultats sur des formes non bruitées⁷. Afin de montrer l'importance de ces paramètres et la nécessité d'étudier au préalable la forme pour certains estimateurs, nous utilisons exactement les mêmes paramètres sur les formes bruitées.

Les figures 4.25 page 138 et 4.26 page 139 montrent les résultats des estimateurs sur les formes parfaitement discrétisées⁸ tandis que les figures 4.27 et 4.28 montrent les résultats des estimateurs sur les formes bruitées. Les paramètres utilisés sont spécifiés dans les légendes des figures.

Les méthodes basées sur la variation de barycentres (CLARENZ) et VCM (MÉRIGOT) étant mono-échelles, nous avons choisi deux échelles d'analyse (dans le même éventail que les estimateurs multi-échelles) afin de montrer les problèmes du mono-échelle sur des objets ayant plusieurs niveaux de lecture comme « CUBESPHERE » ou « SPHERESUNION ».

⁷Le bruit utilisé est un bruit de KANUNGO, comme expliqué dans le paragraphe 3.5.3 page 92.

⁸C'est-à-dire en l'absence de bruit autre que la discrétisation.

La méthode de CLARENZ offre de très bons résultats. Comme espéré, les petits rayons détectent les petites régions non-lisses (en rouge-jaune, se référer à la carte des couleurs à droite des résultats) pendant que d'importants rayons renforcent cette détection des régions non-lisses tout en considérant de petites zones lisses comme non-lisses comme le montre l'objet « SPHERESUNION ». Le choix des rayons — et donc une étude à priori de la forme — est alors important pour la qualité des résultats obtenus. Notons toutefois que cet estimateur semble assez robuste au bruit.

La méthode de MÉRIGOT offre également de bons résultats sur des surfaces bruitées et non bruitées. Cependant cela nécessite trois paramètres qui sont difficiles à déterminer pour une large catégorie de formes. Lorsque ceux-ci sont sur-évalués, les zones caractéristiques détectées englobent les zones proches non pertinentes comme c'est le cas avec le choix de R_2 et r_2 sur la [figure 4.25 page 138](#) par exemple.

La méthode de MELLADO semble quant à elle insensible au bruit, mais des artefacts apparaissent sur les angles droits (voir les côtés de « CUBESPHERE » par exemple) à cause de l'utilisation de sphères.

La méthode de PAULY fournit de bons résultats mais a tendance à considérer des zones lisses à forte courbure comme des zones caractéristiques (comme la plus petite sphère de « SPHERESUNION », ce qui est logique puisque ce détecteur est lié à la courbure de la forme. De plus, le choix du paramètre τ_{max} est assez dépendant de la géométrie de la forme à analyser puisque c'est cela qui va déterminer le seuil de courbure à partir de laquelle nous considérons que nous sommes sur des zones caractéristiques. Enfin, cet estimateur semble assez sensible au bruit puisqu'il collecte les informations de courbure de manière surfacique.

La méthode de PARK *et al.* requiert beaucoup de paramètres pour être fonctionnelle. De nos expériences, ω^- et ω^+ sont très dépendants de la géométrie de la forme et de ce que nous considérons comme des zones caractéristiques. Aux endroits de forte courbure, cette analyse détecte généralement les points caractéristiques. Cependant, lorsque des singularités ont de faibles angles diédraux, des mauvaises classifications apparaissent (sur la sphère de « CUBESPHERE » par exemple). Sur des données bruitées, avec les mêmes paramètres ω^- , ω^+ et τ , il ne détecte que les zones à très forte courbure. Dans les faits, pour avoir de meilleurs résultats sur des données bruitées, il faudrait changer les paramètres et donc étudier la forme à analyser. Nous pouvons cependant noter que cette méthode permet une classification, contrairement aux autres.

Tous les estimateurs vus précédemment n'arrivent pas à détecter toutes les zones caractéristiques à différentes échelles, la principale difficulté est d'adapter les pa-

ramètres pour détecter les petites régions tout en restant robuste au bruit. Notre estimateur, en analysant la distance à tous les modèles linéaires comme décrit dans le [paragraphe 4.1.2.3 page 129](#), permet de détecter et classifier les singularités (EDGE) des régions lisse (SMOOTH) et des zones à courbure nulle (FLAT) indépendamment de leur échelle. Ainsi, aucun paramètre mis à part l'ensemble de rayons n'est requis (ce qui est également le cas pour les autres estimateurs comparés). Cependant, il est important de noter que le rayon maximal R_0 de notre ensemble de rayons est relié à la plus petite courbure des régions lisses que nous souhaitons détecter, comme nous l'avons vu précédemment.

Des zones autour des singularités sont parfois classifiées avec erreur comme des régions SMOOTH (sur l'objet « CUBESPHERE » par exemple). Cet artefact est provoqué par la transition entre des parties FLAT et des parties EDGE. Si nous analysons la transition, nous pouvons voir que la courbure suit une courbe de pente -1 lorsqu'elle est au dessus de $\kappa_{max}(R, h)$ (modèle EDGE) pour de grands rayons et a des valeurs au dessous de $\kappa_{max}(R, h)$ pour de petits rayons (modèle FLAT). Entre ces deux états, la courbure doit suivre des courbes de pente 0 (modèle SMOOTH) pour connecter les deux autres états. Cette transition peut être prédominante sur des zones proches de zones caractéristiques EDGE. Cet artefact peut être retiré facilement en mesurant la distance géométrique entre un EDGE sur la surface, et reclasser les fausses zones SMOOTH vers leur état avant la transition si la distance est petite.

Sur des objets bruités, notre classification continue de détecter avec pertinence les zones EDGE, SMOOTH et FLAT, mais des artefacts peuvent apparaître sur des régions lisses. Ceci est dû au fait que la fonction $G_{z,p}$ n'est plus une droite, mais plutôt une ligne polygonale. Cet artefact peut être considéré soit par l'utilisation d'une meilleure distance aux modèles, soit par suppression des petites régions EDGE (comme dans [Par+12]). Il faut rappeler que nous présentons ici les résultats sans post-traitement de notre estimateur ; il est alors clair que ces résultats peuvent être facilement améliorés.

4.1.4 Conclusion sur l'estimation de singularité

Dans cette partie, nous avons défini un nouvel outil de détection de singularité simple et robuste basé sur les estimateurs de courbure par intégration du chapitre précédent. Celui-ci, défini en dimension 2 et 3 et s'appuyant sur les bonnes propriétés mathématiques des estimateurs de courbure, propose de détecter les parties non- C^1 , les parties C^3 et les parties à courbure nulle sur la surface d'objets digitaux. Puisque l'approche proposée est basée sur des quantités locales différentielles à plusieurs échelles, la classification obtenue est localement adaptative et invariante à l'échelle

(au sens où elle capture les singularités à différentes échelles sur le même objet géométrique).

Nous avons évalué expérimentalement ce détecteur avec des méthodes représentatives de l'état de l'art et montré qu'il était très compétitif en arrivant à détecter des singularités même à des échelles différentes sans autre paramètre à choisir que l'ensemble de rayons. D'ailleurs, cet ensemble de rayons constitue une limitation. Comme nous l'avons expliqué dans le [paragraphe 4.1.2.2 page 127](#), le rayon maximal de cet ensemble est dépendant de la singularité maximale que nous souhaitons détecter, leur réglage peut être important.

Enfin, comme pour les estimateurs de courbure, notre estimateur est basé sur l'intégration volumique de la sphère. Cette opération reste coûteuse et peut la rendre moins compétitive en terme de temps de calcul face à d'autres à échelle fixe. Cependant, notre méthode permet de détecter les singularités à plusieurs échelles ce qui est la principale défaillance des autres méthodes à échelle fixe, et est robuste au bruit.

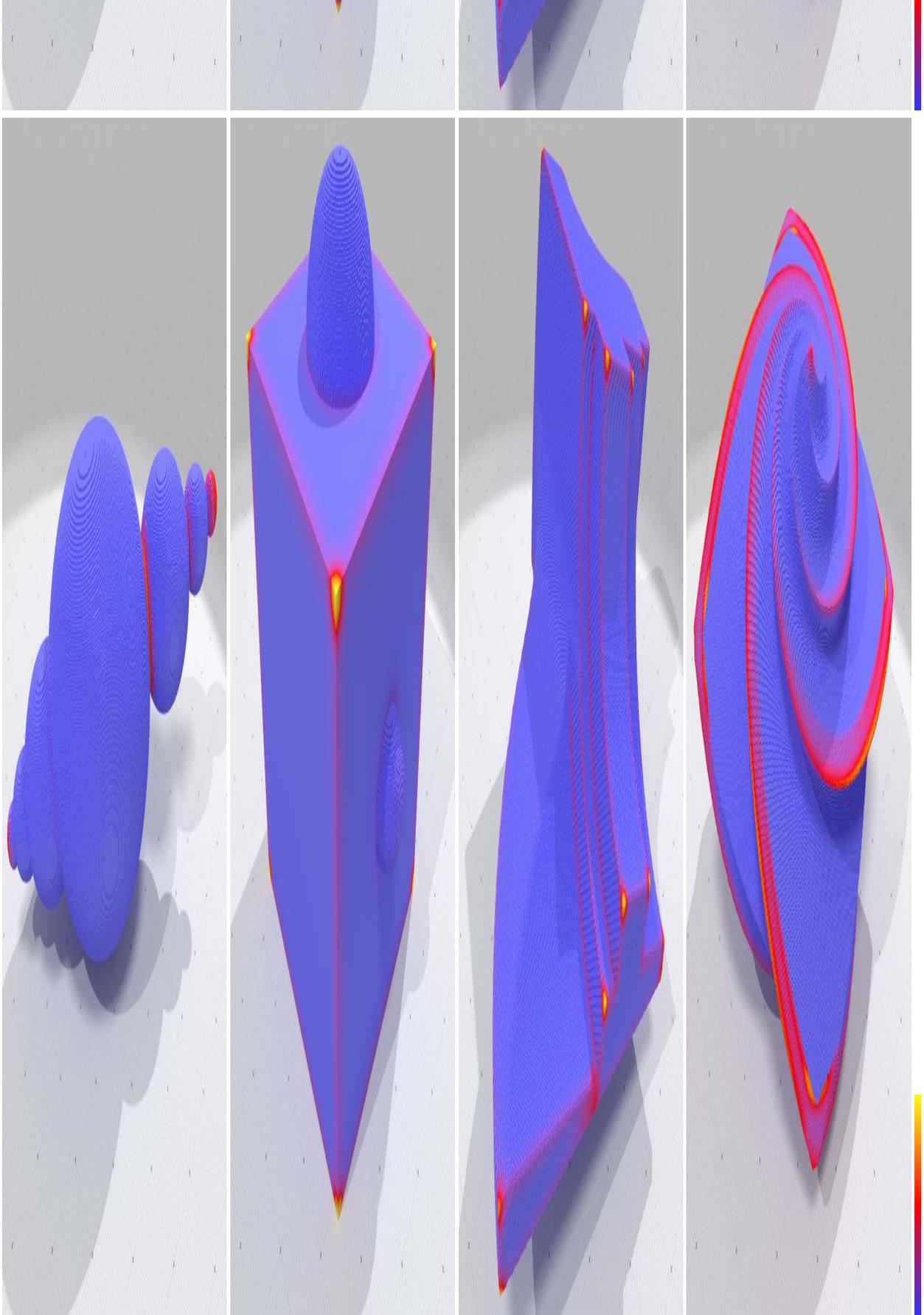
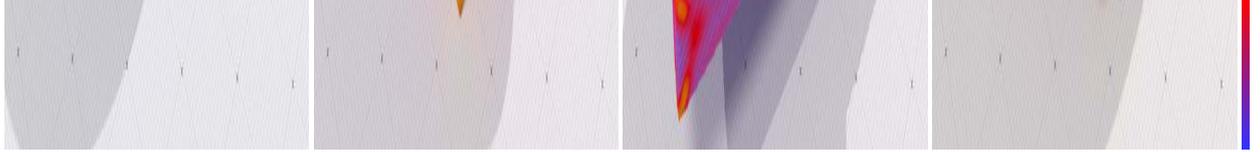


Figure 4.25

Évaluation des détecteurs de singularités sur des formes parfaitement discrétisées. « SPHERE-UNION » : $400 \times 200 \times 200$ voxels, « CUBESPHERE » : 200^3 voxels, « FANDISK » : 512^3 voxels, « OCTAFLOWER » : 512^3 voxels. Paramètres utilisés pour CLARENZ et al. [Cla+04] : $R_1 = 10$, $R_2 = 22$, $\alpha = 1$, $\beta = 50$. Paramètres utilisés pour MÉRIGOT et al. [Mér+11] : $R_1 = 10$, $r_1 = 10$, $R_2 = 22$, $r_2 = 22$, $T = 0.2$.

MELLADO



PAULY et al.

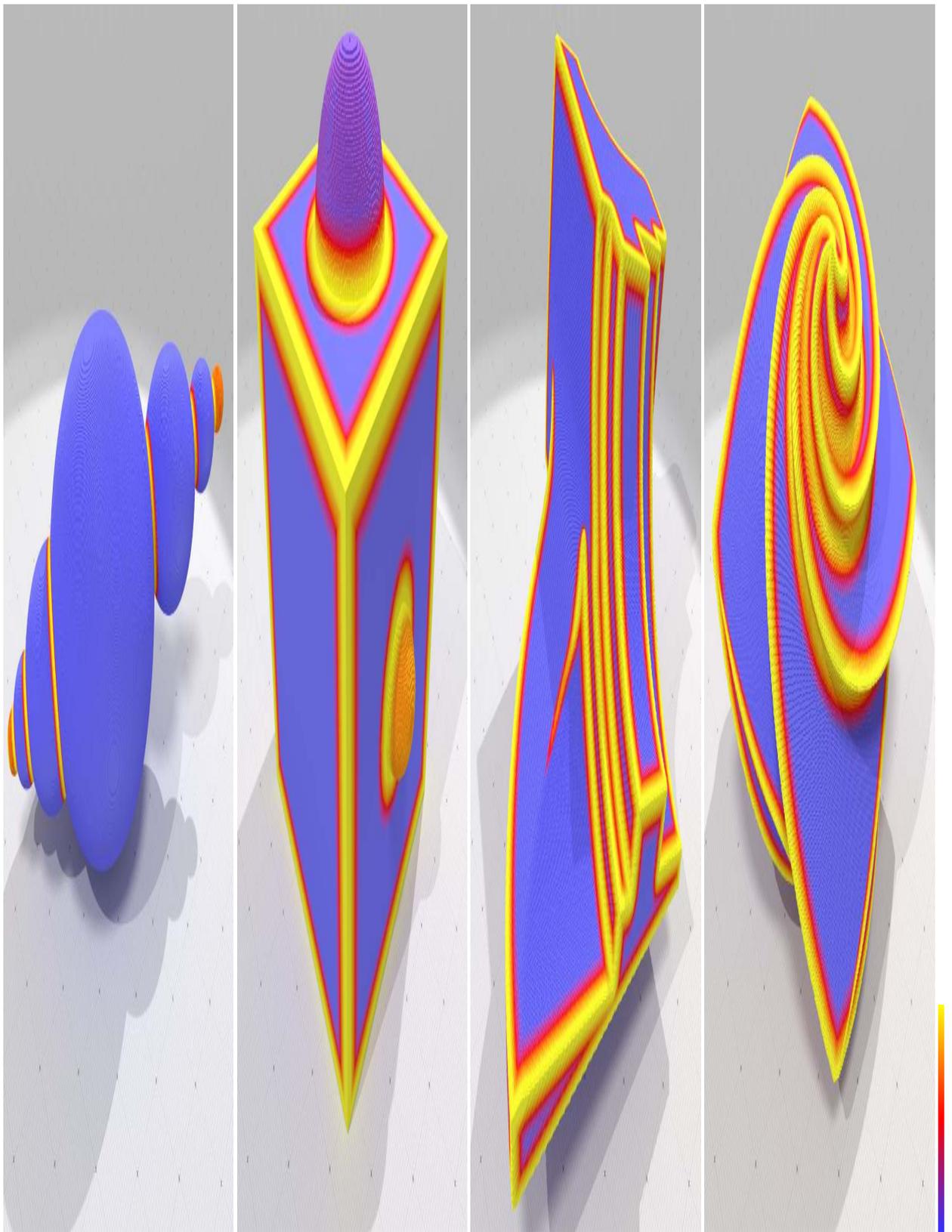
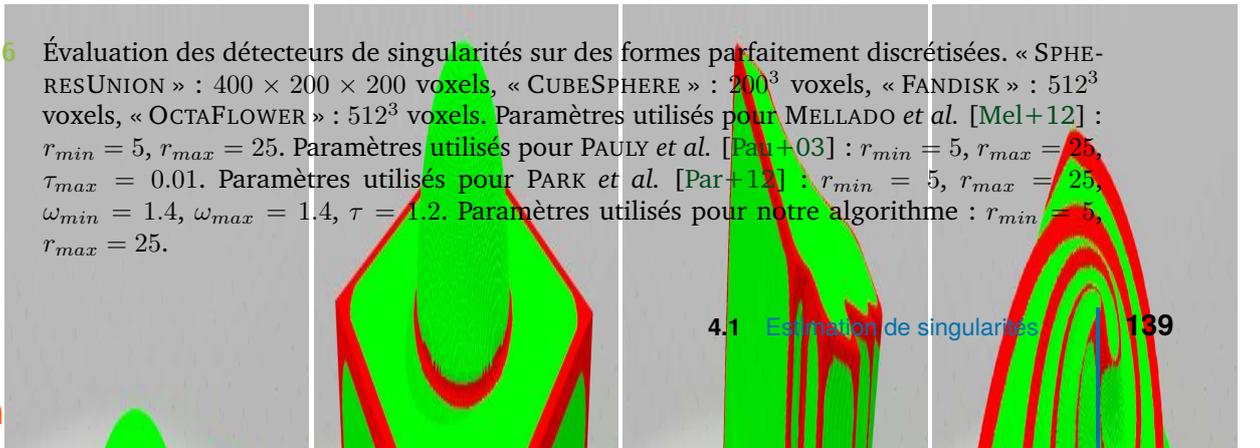


Figure 4.26 Évaluation des détecteurs de singularités sur des formes parfaitement discrétisées. « SPHERESUNION » : $400 \times 200 \times 200$ voxels, « CUBESPHERE » : 200^3 voxels, « FANDISK » : 512^3 voxels, « OCTAFLOWER » : 512^3 voxels. Paramètres utilisés pour MELLADO *et al.* [Mel+12] : $r_{min} = 5, r_{max} = 25$. Paramètres utilisés pour PAULY *et al.* [Pau+03] : $r_{min} = 5, r_{max} = 25, \tau_{max} = 0.01$. Paramètres utilisés pour PARK *et al.* [Par+12] : $r_{min} = 5, r_{max} = 25, \omega_{min} = 1.4, \omega_{max} = 1.4, \tau = 1.2$. Paramètres utilisés pour notre algorithme : $r_{min} = 5, r_{max} = 25$.



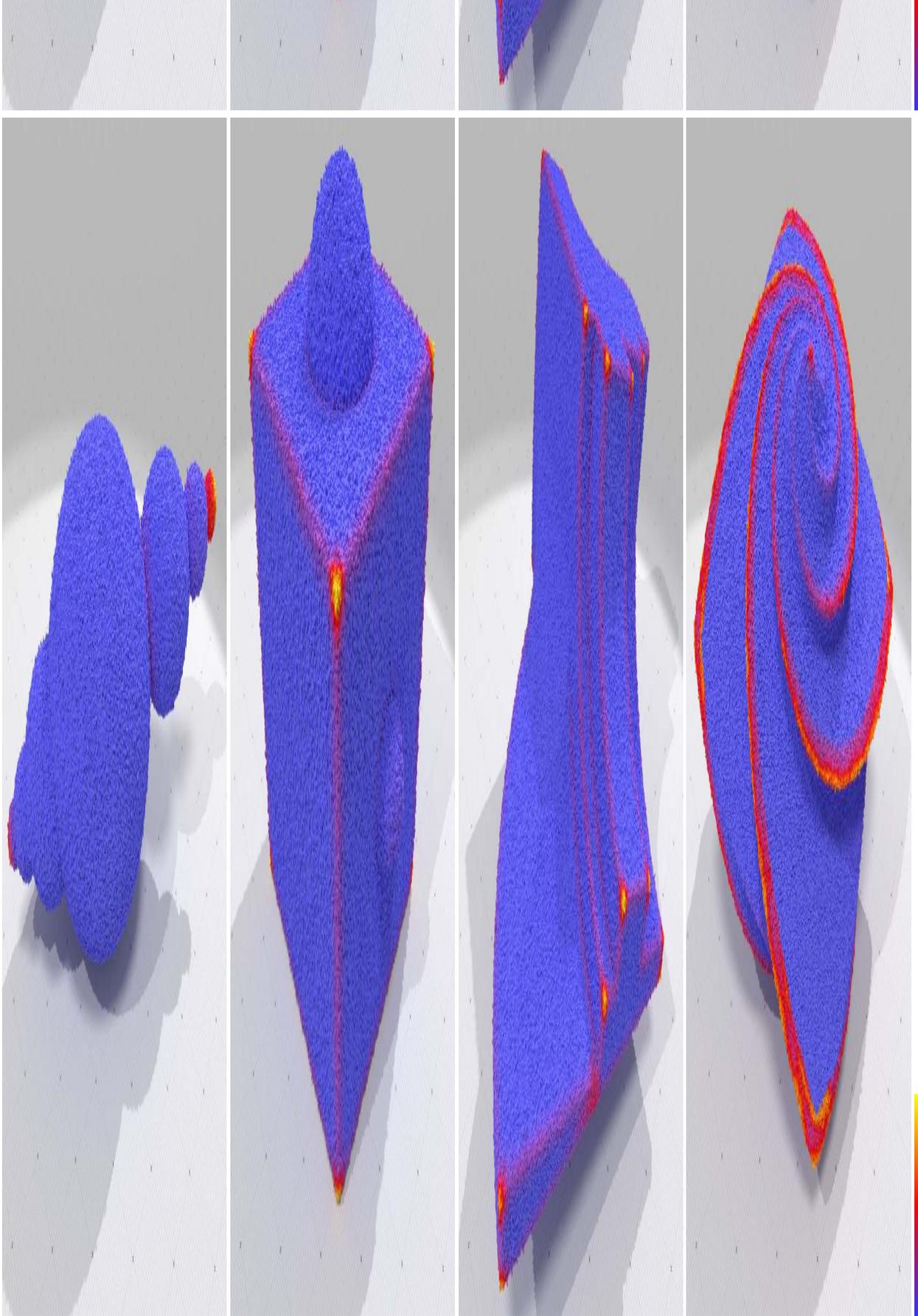


Figure 4.27 Évaluation des détecteurs de singularités sur des approximations bruitées de figure 4.25 page 138. « SPHERESUNION » : $400 \times 200 \times 200$ voxels, « CUBESPHERE » : 200^3 voxels, « FANDISK » : 512^3 voxels, « OCTAFLOWER » : 512^3 voxels. Paramètres utilisés pour CLARENZ et al. [Cla+04] : $R_1 = 10$, $R_2 = 22$, $\alpha = 1$, $\beta = 50$. Paramètres utilisés pour MÉRIGOT et al. [Mér+11] : $R_1 = 10$, $r_1 = 10$, $R_2 = 22$, $r_2 = 22$, $T = 0.2$.

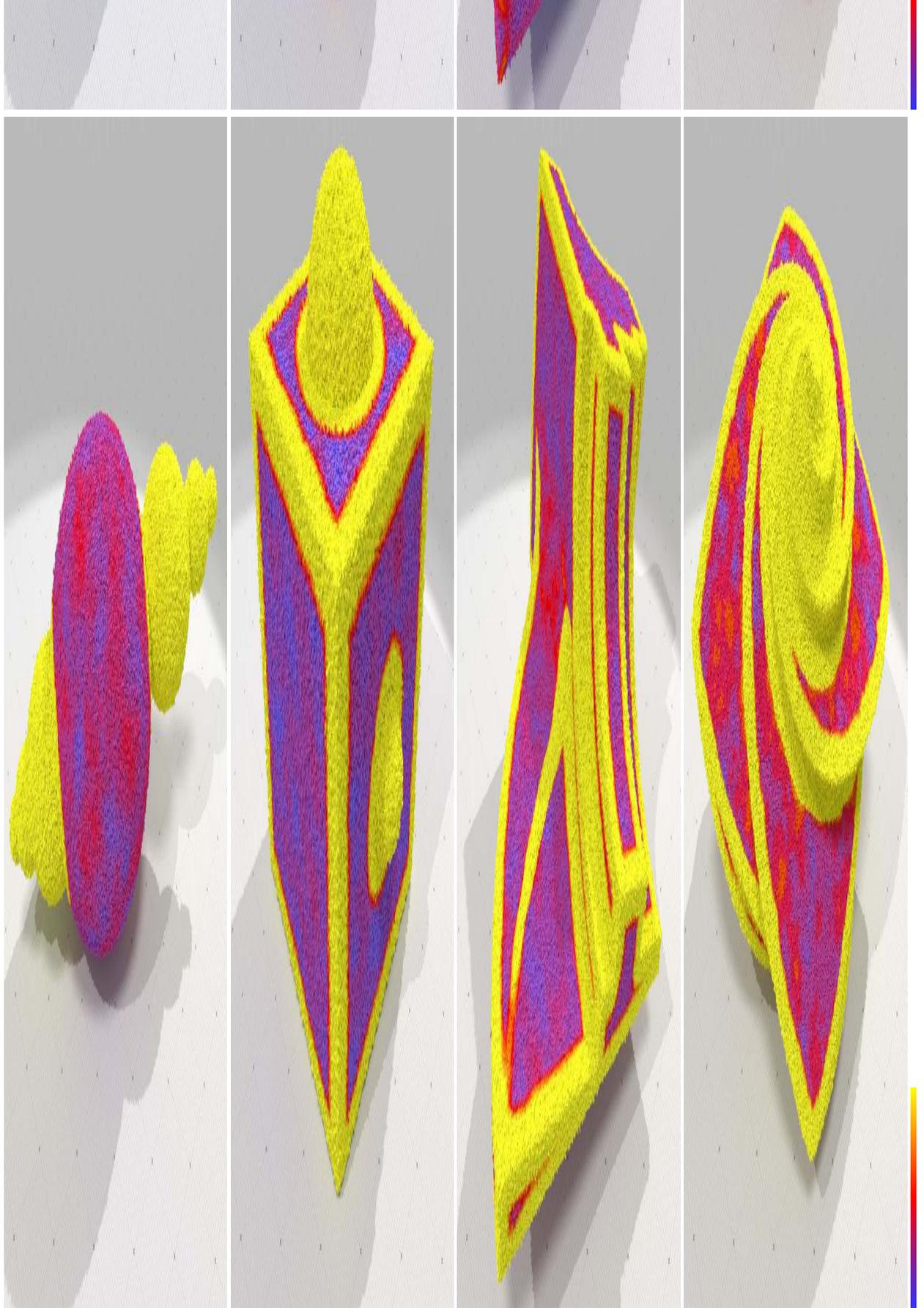


Figure 4.28 Évaluation des détecteurs de singularités sur des approximations bruitées de [figure 4.26 page 139](#). « SPHERESUNION » : $400 \times 200 \times 200$ voxels, « CUBESPHERE » : 200^3 voxels, « FANDISK » : 512^3 voxels, « OCTAFLOWER » : 512^3 voxels. Paramètres utilisés pour MELLADO *et al.* [Mel+12] : $r_{min} = 5$, $r_{max} = 25$. Paramètres utilisés pour PAULY *et al.* [Pau+03] : $r_{min} = 5$, $r_{max} = 25$, $\tau_{max} = 0.01$. Paramètres utilisés pour PARK *et al.* [Par+12] : $r_{min} = 5$, $r_{max} = 25$, $\omega_{min} = 1.4$, $\omega_{max} = 1.4$, $\tau = 1.2$. Paramètres utilisés pour notre algorithme : $r_{min} = 5$, $r_{max} = 25$.

4.2 Application dans le contexte du projet *digitalSnow*

Le projet *digitalSnow*⁹ est un projet de recherche financé par l'Agence Nationale de la Recherche qui regroupe trois laboratoires spécialisés dans des domaines différents : le laboratoire d'informatique **LIRIS** de l'Université de Lyon, le laboratoire de mathématiques **LAMA** de l'Université de Savoie Mont-Blanc, et le Centre d'Études de la Neige **CEN** du Centre National de Recherches Météorologiques.

L'objectif principal de ce projet est de fournir des outils efficaces pour étudier la métamorphose de la neige à partir d'images digitales 3D (figure 4.29, en haut) de micro-structures de neige acquises en utilisant des techniques de tomographie à rayons X (image de droite¹⁰). En effet, lors d'une chute de neige, les cristaux de neige s'accumulent sur le sol et forment progressivement un milieu poreux complexe constitué d'air, de vapeur d'eau, de glace et parfois d'eau liquide. La quantité de ces composants et leur arrangement géométrique à l'échelle granulaire (micro-structure de neige) se transforment avec le temps en fonction des paramètres physiques de l'environnement. Cette transformation est appelée la métamorphose, et peut être décomposée en deux types : la métamorphose de la « neige humide » provoqué par la présence d'eau liquide, la métamorphose de la « neige sèche » (métamorphose d'isothermie et métamorphose du gradient de température).



Dans des conditions polaires ou montagneuses, ces effets sont suivis par des contraintes mécaniques comme le compactage de la neige sous l'effet du poids des couches supérieures de neige. En particulier, notre travail se concentre sur le développement de modèles numériques 3D à partir d'images pour simuler l'évolution de la forme de la microstructure de la neige au cours de son métamorphisme. Le calcul de courbure moyenne sur les volumes digitaux (figure 4.29 page ci-contre, en bas) permet tout d'abord de caractériser le volume des grains de neige. En l'absence de gradient de température dans le manteau neigeux, les grains grossissent et s'arrondissent lentement, principalement guidé par un flot de courbure moyenne sur l'interface (Effet de Kelvin). Cependant, en présence d'un gradient de température, les cristaux croissent suivant leurs axes cristallographiques privilégiés et forment des facettes. Nous pouvons également détecter ces facettes grâce à l'estimateur de

⁹ANR-11-BS02-009, <http://liris.cnrs.fr/dsnow/>

¹⁰Crédit image : laboratoires 3SR / MétéoFrance / CEN - CNRM GAME

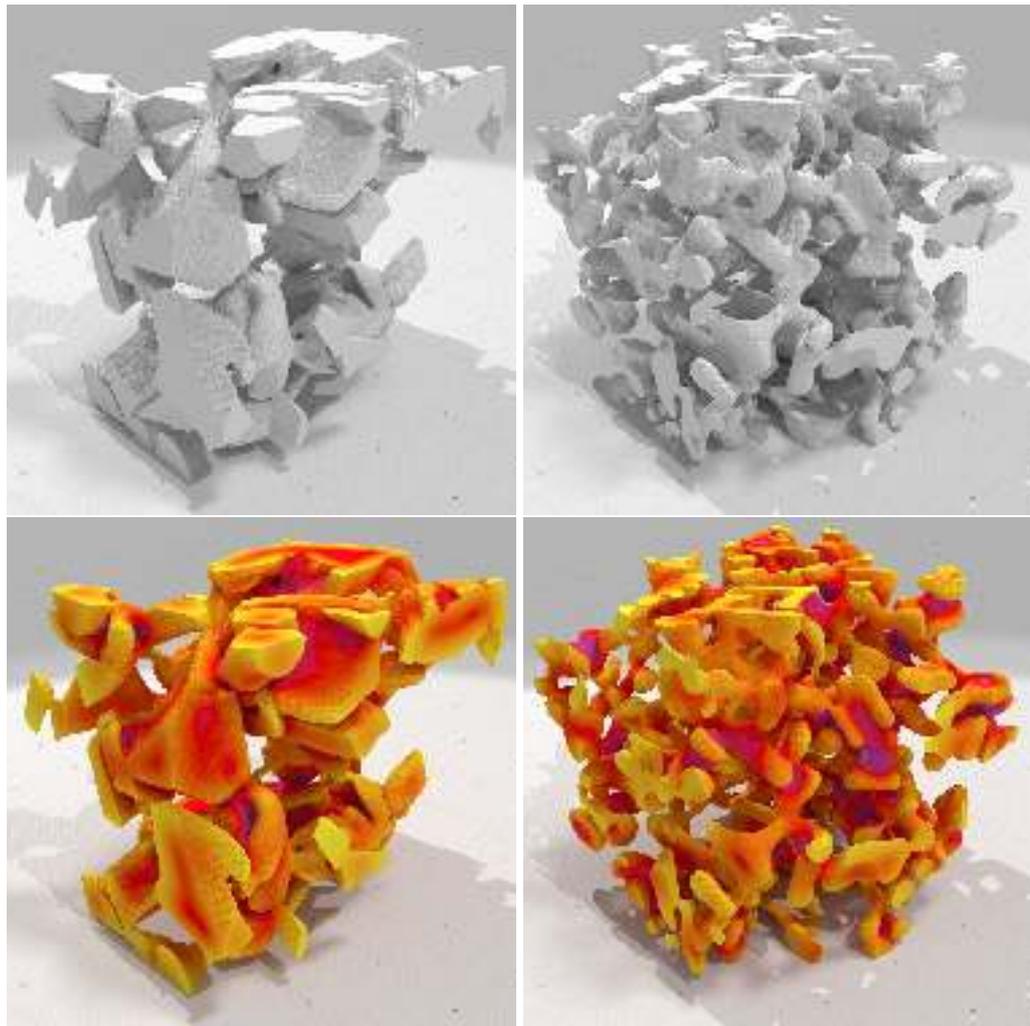


Figure 4.29 Première ligne : Micro-structures de neige. Seconde ligne : Courbure moyenne sur ces échantillons de neige. La valeur de courbure va du bleu au jaune.

singularité que nous avons décrit dans ce chapitre. La [figure 4.31 page 145](#) montre deux captures de microstructures de neige à différents moments. Il est alors immédiat que les grains de neige de gauche présentent plus de facettes que ceux de droite. De plus, l'estimation de la courbure permet de simuler certaines métamorphoses de neige : les zones convexes ont tendance à se sublimer tandis que la vapeur se condense dans les zones concaves. Notre rôle était d'apporter des estimateurs de courbure et de directions principales de courbure ([figure 4.30 page suivante](#)) fiables (c'est-à-dire avec des preuves de convergence), ce que nous avons fait avec les estimateurs décrits dans le [chapitre 3 page 29](#). Ces estimateurs sont actuellement utilisés et répondent aux attentes des partenaires du projet *digitalSnow*, tout en étant robustes au bruit lié à l'acquisition par le tomographe à rayons X. Nous avons également proposé l'estimation de singularités permettant de détecter les facettes des grains de neige (voir le [paragraphe 4.1 page 110](#)).

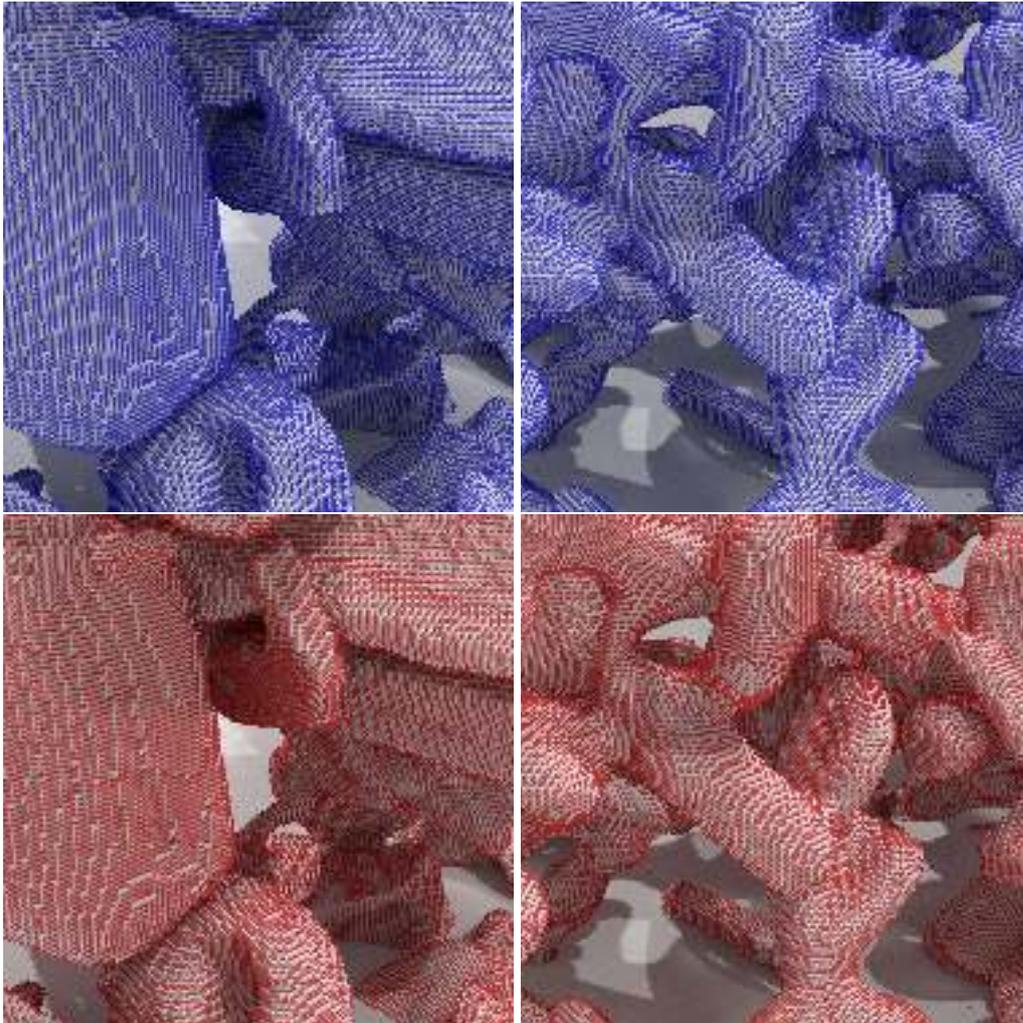


Figure 4.30 Zoom sur les premières directions principales de courbure (*première ligne*) et secondes directions principales de courbure (*seconde ligne*) sur des échantillons de neige.

4.3 Mises en œuvre dans DGtal

Nous avons mis en œuvre tous les estimateurs présentés dans ce manuscrit dans DGtal [Dgt]. Le projet DGtal ([Digital Geometry Tools and Algorithms](http://dgtal.org), <http://dgtal.org>) est une bibliothèque collaborative open-source écrite en C++ proposant des structures de données, algorithmes et outils génériques, fiables et efficaces pour la *géométrie digitale*. Son code source est disponible sur GitHub (<https://github.com/DGtal-team/DGtal/>).

Un des objectifs de DGtal est de centraliser toutes les techniques dédiées à la géométrie digitale (et domaines proches comme la topologie digitale, le traitement d'image, etc.) dans un même lieu, facilitant ainsi leur usage. Un des exemples le plus représentatif est la branche « estimateurs » de DGtal : celle-ci comptabilise

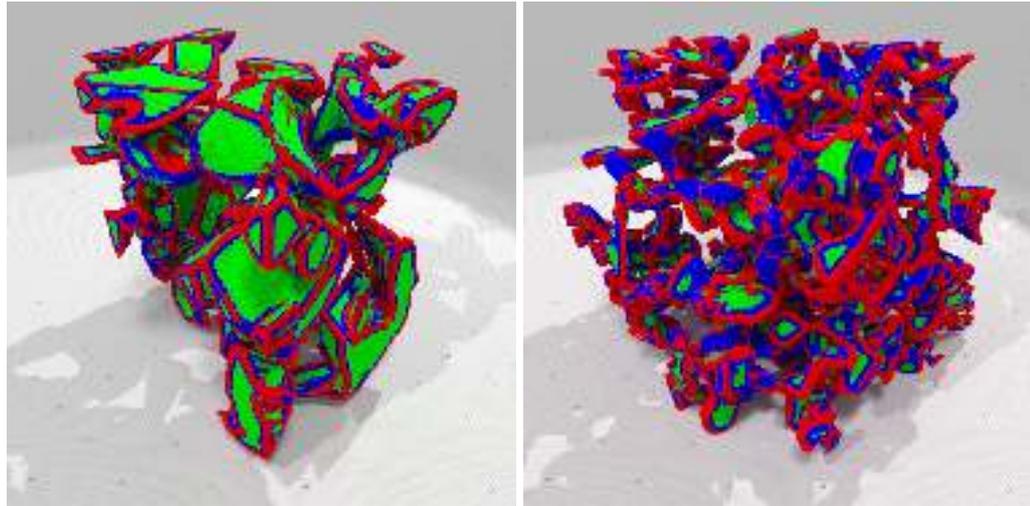


Figure 4.31 Détection de singularités (*en rouge*), de parties C^3 (*en bleu*) et de parties à courbure nulle (*en vert*) sur les échantillons de neige.

plusieurs estimateurs de quantités intégrales comme les tangentes, les normales, le périmètre, et dans notre cas la courbure. Dans notre processus de convergence asymptotique, nous avons besoin de discrétiser à plusieurs échelles des formes euclidiennes auxquelles nous savons en tout point la valeur de la quantité intégrales que nous estimons. Encore une fois, DGTAL nous simplifie la tâche en nous proposant de générer des formes paramétriques et implicites de dimension 2 et 3 que nous pouvons discrétiser à plusieurs échelles, ainsi que la possibilité de charger et exporter des objets. Ensuite, DGTALTOOLS (le projet annexe de DGTAL proposant des applications des algorithmes présents dans DGTAL) possède une plate-forme de comparaison d'estimateurs permettant d'exporter les résultats : `2dLocalEstimators` et `3dLocalEstimators`. C'est grâce à ces outils que nous avons généré toutes les courbes de comparaison de ce document.

Le modèle topologique utilisé dans DGTAL est celui de l'espace de Khalimsky¹¹ (nous l'avons défini dans le [paragraphe 2.5 page 16](#)). Les cellules de Khalimsky sont définies dans un domaine de Khalimsky, c'est-à-dire une grille cubique de dimension n . Plusieurs algorithmes d'extraction et de suivi de surface sont disponibles et adaptés à cette topologie. Concrètement, DGTAL peut nous fournir un itérateur de surfels de la surface nous permettant de la parcourir en profondeur ou en largeur de manière optimale, c'est-à-dire en évitant autant que possible les déplacements non connexes. Cette propriété est très importante dans notre cas, si nous voulons optimiser la complexité de notre estimation de la courbure. Comme nous l'avons dit dans le [paragraphe 3.5.2 page 91](#), nous pouvons réduire le calcul de l'intégration volumique de la sphère avec la surface de l'objet en utilisant les informations de l'itération précédente. En effet, comme le montre la [figure 4.32 page suivante](#) en

¹¹Documentation du paquet « Topologie » : <http://dgtal.org/doc/stable/packageTopology.html>

haut à gauche, si nous nous déplaçons à une distance δ inférieure au rayon de la sphère, nous calculons à nouveau une partie du résultat précédent. Afin d'éviter cette redondance de calcul, nous pouvons pré-calculer des masques de déplacement pour toutes les voisins 0-adjacents à un point (à droite sur la [figure 4.32](#)). Ainsi, au lieu de dénombrer le nombre de points digitaux sur la sphère digitale entière, nous pouvons récupérer le dénombrement de l'itération (hachurée), retirer la partie qui n'est plus partagée avec la nouvelle position (en orange), et ajouter celle qui est nouvelle (en vert). Dans le pire des cas (déplacement non 0-adjacent), l'estimateur utilisera l'intégralité du support pour le dénombrement de l'intersection de la sphère et de l'objet, c'est-à-dire qu'il n'y aura aucune optimisation. Comme nous l'avons dit précédemment ([paragraphe 3.5.2 page 91](#)), le coût du calcul par élément de surface peut être réduit de $O\left(\left(\frac{R}{h}\right)^d\right)$ (taille du support complet) à $O\left(\left(\frac{R}{h}\right)^{d-1}\right)$. Pour être tout à fait juste, il faut également rajouter le coût initial du premier calcul obligatoire sur le support entier, et le coût supplémentaire au début pour pré-calculer les masques de déplacement, mais ceux-ci sont négligeable. Par exemple, pour une taille de support 2D entier de 91 893 éléments, l'optimisation construit 8 masques de déplacements supplémentaires d'environ 450 éléments.

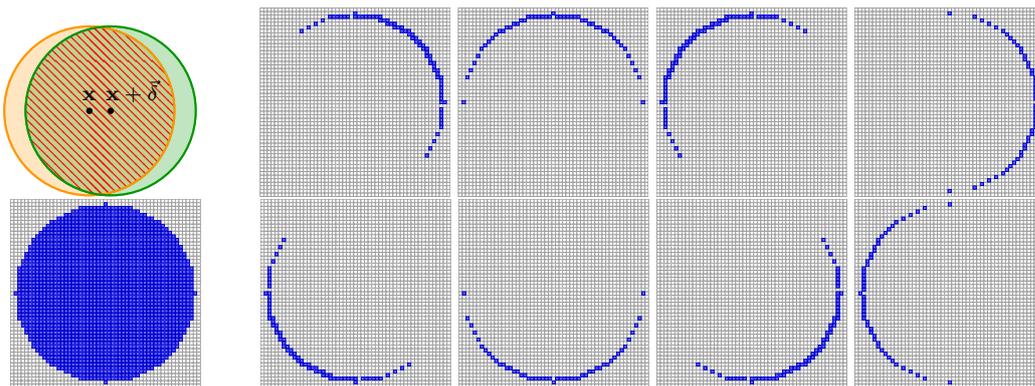


Figure 4.32 Illustration de l'optimisation avec les masques partiels de la boule 2D pour un pas de discrétisation h donné. *En haut à gauche* : Illustration du déplacement du support entier du point x au point $x + \delta$, *en bas à gauche* : support 2D entier, *sur la droite* : masques partiels de déplacement 0-adjacents.

Tous les estimateurs de courbure et de singularité conçus pendant cette thèse et décrits dans le [chapitre 3 page 29](#) et ce chapitre ont été mis en œuvre dans DGTAL et sont dès à présent disponibles librement. Tous les résultats exposés dans ce document sont reproductibles directement avec les outils de DGTAL. Pour plus d'informations, se référer à la documentation de DGTAL¹² et à [Coe+13a].

¹²Documentation du paquet « Géométrie » : <http://liris.cnrs.fr/dgtal/doc/stable/packageGeometry.html>

Conclusions et perspectives

” *My name is Ozymandias, king of kings :
Look on my works, Ye Mighty, and despair!*

1

— **Walter WHITE (Bryan CRANSTON)**
Breaking Bad

Tout au long de cette thèse, nous avons abordé plusieurs approches pour analyser des contours d’objets digitaux dans l’objectif de les décrire. Nous nous sommes intéressés dans un premier temps à l’estimation de courbure en dimension 2, puis de courbure moyenne, courbure gaussienne, courbures principales, directions principales de courbure et des normales en dimension 3. Ensuite, nous avons proposé un estimateur en dimension 2 et 3 permettant d’extraire les singularités d’une surface digitale. Ces travaux ont pour but d’être utilisés dans des algorithmes de plus haut niveau, leurs propriétés mathématiques permettant de s’assurer le bon fonctionnement de ceux-ci.

Courbure

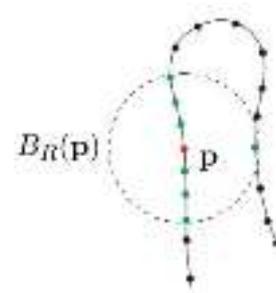
Dans le [chapitre 3 page 29](#), nous avons décrit le fonctionnement de l’estimation de la courbure à partir d’intégration volumiques de morceaux de la surface, puis nous l’avons adapté dans le cadre digital, permettant ainsi une simplicité de calcul (les intégrales se résumant à dénombrer des points digitaux) et permettant d’obtenir une validation formelle du comportement asymptotique de ces estimateurs. La motivation de ce travail était de proposer des estimateurs digitaux de courbures robustes, avec des preuves de convergence. De plus, il n’existait aucun estimateur de courbure avec preuves de convergence en dimension 3. Pour résumer, nous intégrons l’intersection entre une boule et la forme, et cette quantité nous donne des informations sur la géométrie de la surface, plus particulièrement sur sa courbure au point de la surface considéré. Ainsi, nous pouvons extraire la courbure en dimension 2 et la courbure moyenne en dimension 3 à l’aide de l’aire et du volume de l’intersection entre la sphère et la forme à analyser. Si nous calculons les moments géométriques de cette intersection, nous pouvons en extraire le tenseur de courbure local de la surface, et

¹Dans l’épisode, Walter WHITE récite le poème Ozymandias de Percy Bysshe SHELLEY. Évidemment, aucun lien entre la citation et les travaux présentés ici ne doit être tiré.

donc les courbures principales, les directions principales de courbure, la normale, et par extension la courbure gaussienne. Les contributions majeures de ce chapitre sont les preuves de convergence asymptotique uniforme pour les estimateurs de courbure en dimension 2, de courbure moyenne et principales en dimension 3. En effet, nous avons montré que sur des formes convexes à bord C^3 à courbure bornée positive, en paramétrant le rayon de la sphère comme $R = kh^{\frac{1}{3}}$, nous obtenons des convergences asymptotiques uniformes en $O(h^{\frac{1}{3}})$ avec h qui tend vers 0. Nous avons également proposé une analyse comparative complète avec des estimateurs de courbure de la littérature, confirmant expérimentalement la vitesse de convergence théorique attendue par la preuve. De plus, nous avons montré que nos estimateurs sont très compétitifs par rapport aux autres, surtout en restant robuste en présence de bruit et efficace algorithmiquement.

Les perspectives sont multiples pour ces travaux. D'un point de vue pratique, nous pouvons nous intéresser à faire les calculs dans le domaine de Fourier. Cela permettrait d'accélérer grandement les temps de calcul pour d'importants rayons de sphères, car les calculs ne sont plus dépendants de la taille du support mais linéaires en la taille de l'objet (les convolutions deviennent des multiplications des transformées de Fourier). Les premiers résultats montrent une qualité de résultats presque équivalents, avec une vitesse d'exécution énormément réduite. Cependant, la complexité de ces algorithmes n'est pas avantageuse : la transformée et la transformée inverse de Fourier de l'objet est en $O(n^d \log n)$ (le produit est en $O(n^d)$), bien supérieur à notre algorithme actuel. En pratique, cette version très largement concurrentielle.

Nous devons prendre en compte une considération lors de l'implémentation de ce type d'estimateurs : puisque nos estimateurs récoltent l'information volumique, il se peut que de le calcul de l'intégration soit biaisé par l'occultation d'une partie éloignée de l'objet. La figure sur le côté montre cet effet : si le rayon augmente, l'intégration volumique ne sera pas complète. Cela peut être gênant s'il n'est pas pris en compte et peut ainsi localement fausser les calculs de courbure. Détecter ces cas devrait améliorer les résultats pour une forme présentant ce genre de configuration à une échelle donnée.



Une autre perspective serait le couplage de notre approche avec celles basées sur les cellules de Voronoï, plus particulièrement les méthodes de [Voronoi Covariance Measure](#) [Mér+09; Mér+11; Cue+14] sur l'analyse de matrice de covariance non pas de la forme elle même mais du cône normal. Ces approches sont assez complémentaires avec la nôtre et méritent de s'y intéresser.

De plus, il apparaît que l'erreur de positionnement entre le point digital et le point sur la surface euclidienne est un terme dominant. Des premiers résultats lorsque nous approchons mieux la surface sous-jacente montrent une amélioration de la qualité des résultats, et laissent espérer de meilleures vitesses de convergence asymptotique.

Courbure sans paramètre

Les estimateurs précédents possèdent l'inconvénient que lorsque nous souhaitons récupérer la valeur de courbure pour un objet particulier, nous devons adapter le rayon de la sphère en fonction de l'objet. Nous avons alors analysé, dans le [chapitre 3 page 29](#), la géométrie de l'objet digital en amont à l'aide de segments maximaux afin d'apporter des estimateurs de courbures en dimension 2 et 3 sans paramètre. Deux versions ont été proposées, une approche « globale » dont le rayon de la boule d'intégration est lié à la moyenne des longueurs des segments maximaux de la forme, et une approche « locale » où le rayon de la sphère est lié aux longueurs des segments maximaux locaux du point estimé. Nous avons prouvé la convergence asymptotique uniforme de l'estimateur de courbure en dimension 2 dans son approche « globale » en $O\left(h^{\frac{1}{3}} \log^2\left(\frac{1}{h}\right)\right)$ pour des formes convexes à bord C^3 à courbure bornée positive. La preuve de convergence de ces estimateurs en dimension 3 repose sur une supposition non vérifiée à ce jour, qui mériterait d'être étudiée dans le futur. L'analyse expérimentale a montré que ces deux approches d'estimateurs de courbure sans paramètre obtiennent des résultats aussi bons que les estimateurs précédents (en $O(h^{\frac{1}{3}})$ même en dimension 3, et l'approche « locale » est très concurrentielle en erreur de norme l_2). La motivation principale de ce travail est de palier au manque d'estimateurs digitaux de courbure en dimension 2 (ou supérieure) sans paramètre avec des preuves de convergence asymptotiques. De plus, d'un point de vue pratique, ces estimateurs permettent d'obtenir de bons résultats d'estimation de courbure sans que l'utilisateur n'ait besoin de choisir de paramètre dépendant de la forme digitale d'entrée.

Ces estimateurs sans paramètre sont néanmoins moins efficaces en présence de surfaces bruitées. De récents travaux (KERAUTRET *et al.* [KL12]) proposent d'estimer le niveau de bruit grâce aux segments maximaux. Nous pouvons adapter leurs longueurs en fonction du bruit et ainsi augmenter la robustesse de notre estimation. Cependant, il est peu probable de garantir des preuves de convergence dans ces conditions ; l'application est surtout pratique.

Singularités

Enfin, dans le [chapitre 4 page 109](#), nous avons proposé d'estimer les singularités sur des objets digitaux. Encore une fois, la principale motivation de ce travail est de palier au manque d'estimateurs robustes de singularités de la géométrie digitale. Notre estimateur analyse le comportement de l'estimateur de courbure défini précédemment à plusieurs rayons de sphère sur le bord de l'objet, en dimensions 2 et 3. Cette analyse permet de classifier la surface en trois comportements distincts : des singularités (non- C^1), des zones lisses (C^3) et des zones à courbure nulle. L'analyse comparative de notre estimateur avec les méthodes représentatives de la littérature affiche qu'il est compétitif, étant à la fois robuste au bruit, ne nécessitant pas d'autre paramètre qu'un ensemble de rayons, et classifiant directement tous les éléments de la surface.

Cet outil est le point d'entrée de plusieurs perspectives intéressantes. Tout d'abord, les résultats présentés ici sont des résultats bruts. Nous pouvons facilement coupler notre méthode avec des outils de post-traitement pour améliorer significativement les défauts encore présents, notamment les artefacts sur les formes bruitées. De plus, des extensions naturelles de ce type d'estimateur sont le débruitage de forme ou encore la reconstruction de surface, et notre estimateur pourrait être un très bon point d'entrée.

Ensuite, dans notre estimateur, le rayon maximal de l'ensemble des rayons utilisés pour l'analyse est lié à la distinction de classification de parties lisse (C^3) et de parties à courbure nulle. Si le rayon maximal est trop petit pour une zone lisse à faible courbure, nous ne pouvons pas détecter la géométrie locale de la forme (voir le [paragraphe 4.1.2.2 page 127](#)) et ainsi ne pas la classifier comme une partie lisse. Si nous augmentons ce rayon maximal, nous pouvons annuler cet effet. Ceci est problématique puisque ça exige que l'utilisateur analyse la forme avant de choisir les paramètres de rayons de notre estimateur. Alors, comme pour l'estimation de la courbure, nous pourrions envisager d'utiliser les segments maximaux afin de permettre de guider l'ensemble de rayons utilisés pour notre méthode.

Une autre perspective que nous avons un peu abordé dans le [paragraphe 4.1.2.4 page 131](#) relève du traitement des zones où une transition de modèle est détectée. Pour résumer, lors de l'analyse des distances aux modèles, certaines zones suivent un modèle avant d'être perturbé par un autre modèle lorsque les rayons diminuent, comme c'est le cas près d'une singularité par exemple. Actuellement nous prenons le modèle dominant, mais nous pouvons faire une analyse plus fine de ces transitions, comme rajouter une dimension à la classification : du rayon R_a à R_b le point est classifié selon le modèle A ; du rayon R_b à R_c le point est classifié selon le modèle

B, etc. De plus, cela permettrait également de détecter le changement de statut des points de la surface, comme le propose MELLADO *et al.* [Mel+12] (voir la [figure 4.12](#) page 121).

Bibliographie

- [All+07] Pierre ALLIEZ, David COHEN-STEINER, Yiyang TONG et Mathieu DESBRUN. « Voronoi-based variational reconstruction of unoriented point sets ». In : *Symposium on Geometry processing*. T. 7. 2007, p. 39-48.
- [Alm65] Frederick J. ALMGREN. « The theory of varifolds ». In : *Mimeographed notes, Princeton* (1965).
- [Asa+01] Tetsuo ASANO, Yasuyuki KAWAMURA, Reinhard KLETTE et Koji OBOKATA. « Minimum-length polygons in approximation sausages ». In : *Visual Form 2001*. Springer, 2001, p. 103-112.
- [BF60] Friedrich L. BAUER et C. T. FIKE. « Norms and exclusion theorems ». In : *Numerische Mathematik* 2.1 (1960), p. 137-141.
- [BG92] Marcel BERGER et Bernard GOSTIAUX. *Géométrie différentielle : variétés, courbes et surfaces*. Presses Universitaires de France-PUF, 1992.
- [Bha97] Rajendra BHATIA. *Matrix analysis*. T. 169. Springer, 1997.
- [BL05] Matthew BROWN et David G. LOWE. « Unsupervised 3D object recognition and reconstruction in unordered datasets ». In : *3DIM 2005. Fifth International Conference on 3D Digital Imaging and Modeling*. IEEE. 2005, p. 56-63.
- [BM12] Alexandre BOULCH et Renaud MARLET. « Fast and robust normal estimation for point clouds with sharp features ». In : *Computer Graphics Forum* 31.5 (2012), p. 1765-1774.
- [Bor+11] Dorit BORRMANN, Jan ELSEBERG, Kai LINGEMANN et Andreas NÜCHTER. « The 3D Hough Transform for plane detection in point clouds : A review and a new accumulator design ». In : *3D Research* 2.2 (2011), p. 1-13.
- [BS08] Alenxander I. BOBENKO et Yuri B. SURIS. *Discrete differential geometry : Integrable structure*. T. 98. AMS Bookstore, 2008.
- [Bue+15] Blanche BUET, Gian Paolo LEONARDI et Simon MASNOU. « Discrete Varifolds : A Unified Framework for Discrete Approximations of Surfaces and Mean Curvature ». In : *Scale Space and Variational Methods in Computer Vision*. Springer, 2015, p. 513-524.
- [Bue14] Blanche BUET. « Approximation de surfaces par des varifolds discrets : représentation, courbure, rectifiabilité ». Thèse de doct. Université Claude Bernard-Lyon I, 2014.

- [Bul+95] Jeffrey W. BULLARD, Edward J. GARBOCZI, W. Craig CARTER et Edwin R. FULLET. « Numerical methods for computing interfacial mean curvature ». In : *Computational materials science* 4 (1995), p. 103-116.
- [Cga] CGAL : *Computational Geometry Algorithms Library*. <http://cgal.org>.
- [CK04] David COEURJOLLY et Reinhard KLETTE. « A Comparative Evaluation of Length Estimators of Digital Curves ». In : *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence* 26.2 (2004), p. 252-258.
- [Cla+04] Ulrich CLARENZ, Martin RUMPF et Alexandru TELEA. « Robust feature detection and local classification for surfaces based on moment analysis ». In : *IEEE transactions on visualization and computer graphics* 10.5 (2004), p. 516-24.
- [Coe+01] David COEURJOLLY, Serge MIGUET et Laure TOUGNE. « Discrete Curvature Based on Osculating Circle Estimation ». In : *4th International Workshop on Visual Form*. T. 2059. Lecture Notes in Computer Science. 2001, p. 303-312.
- [Coe+07] David COEURJOLLY, Annick MONTANVERT et Jean-Marc CHASSERY. « Géométrie discrète et images numériques ». In : (2007).
- [Coe+12] David COEURJOLLY, Jacques-Olivier LACHAUD et Tristan ROUSSILLON. « Digital Geometry Algorithms, Theoretical Foundations and Applications of Computational Imaging ». In : t. 2. Lecture Notes in Computational Vision and Biomechanics. Springer, 2012. Chap. Multigrid convergence of discrete geometric estimators, p. 395-424.
- [Coe+13a] David COEURJOLLY, Jacques-Olivier LACHAUD et Jérémy LEVALLOIS. « Implementation of Integral based Digital Curvature Estimators in DGtal ». In : *Imagen-A* 3.5 (2013), p. 27-31.
- [Coe+13b] David COEURJOLLY, Jacques-Olivier LACHAUD et Jérémy LEVALLOIS. « Integral Based Curvature Estimators in Digital Geometry ». In : *Discrete Geometry for Computer Imagery*. T. 7749. Lecture Notes in Computer Science. Springer Berlin Heidelberg, 2013, p. 215-227.
- [Coe+14] David COEURJOLLY, Jacques-Olivier LACHAUD et Jérémy LEVALLOIS. « Multigrid convergent principal curvature estimators in digital geometry ». In : *Computer Vision and Image Understanding* 129.0 (2014), p. 27-41.
- [Coe02] David COEURJOLLY. « Algorithmique et géométrie discrete pour la caractérisation des courbes et des surfaces ». Thèse de doct. Université Lumière Lyon 2, déc. 2002.
- [Com15] Francesco de COMITE. *Castle Tilings*. <https://flic.kr/p/fD3vky>. [En ligne ; visité le 14 septembre 2015 ; photographie sous licence Creative Commons CC BY 2.0]. 2015.
- [Cos15] Alexandre COSTENTIN. *Le fameux désert de sel*. <https://pazteque.wordpress.com/2015/05/22/le-fameux-desert-de-sel/>. [En ligne ; visité le 14 septembre 2015]. 2015.
- [CP05] Frederic CAZALS et Marc POUGET. « Estimating differential quantities using polynomial fitting of osculating jets ». In : *Computer Aided Geometric Design* 22.2 (2005), p. 121-146.

- [CSM03] David COHEN-STEINER et Jean-Marie MORVAN. « Restricted Delaunay triangulations and normal cycle ». In : *Proceedings of the nineteenth annual Symposium on Computational Geometry*. SCG'03. San Diego, California, USA : ACM, 2003, p. 312-321.
- [CSM06] David COHEN-STEINER et Jean-Marie MORVAN. « Second fundamental measure of geometric sets and local approximation of curvatures ». In : *Journal of Differential Geometry* 74.3 (2006), p. 363-394.
- [Cue+14] Louis CUEL, Jacques-Olivier LACHAUD et Boris THIBERT. « Voronoi-based geometry estimator for 3D digital surfaces ». In : *Discrete Geometry for Computer Imagery*. Springer. 2014, p. 134-149.
- [Dgt] DGTAL : *Digital Geometry tools and algorithms library*. <http://dgtal.org>.
- [DH72] Richard O. DUDA et Peter E. HART. « Use of the Hough transformation to detect lines and curves in pictures ». In : *Communications of the ACM* 15.1 (1972), p. 11-15.
- [DV+07] François DE VIEILLEVILLE, Jacques-Olivier LACHAUD et Fabien FESCHET. « Convex digital polygons, maximal digital straight segments and convergence of discrete geometric estimators ». In : *Journal of Mathematical Imaging and Vision* 27.2 (2007), p. 139-156.
- [DVL09] François DE VIEILLEVILLE et Jacques-Olivier LACHAUD. « Comparison and improvement of tangent estimators on digital curves ». In : *Pattern Recognition* 42.8 (2009), p. 1693-1707.
- [Dyn+01] Nira DYN, Kai HORMANN, Sun-Jeong KIM et David LEVIN. « Optimizing 3D triangulations using discrete curvature analysis ». In : *Mathematical Methods for Curves and Surfaces* 28.5 (2001), p. 135-146.
- [Esb+11] Henri-Alex ESBELIN, Rémy MALGOUYRES et Colin CARTADE. « Convergence of binomial-based derivative estimation for 2 noisy discretized curves ». In : *Theoretical Computer Science* 412.36 (2011), p. 4805-4813.
- [Eul60] Leonhard EULER. « Recherches sur la courbure des surfaces ». In : *Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin* 16.119-143 (1760), p. 9.
- [FM08] Sébastien FOUREY et Rémy MALGOUYRES. « Normals and curvature estimation for digital surfaces based on convolutions ». In : *Discrete Geometry for Computer Imagery*. Springer. 2008, p. 287-298.
- [Fra95] Jean FRANÇON. « Topologie de Khalimski-Kovalevsky et algorithmique graphique : Informatique graphique ». In : *TSI. Technique et science informatiques* 14.10 (1995), p. 1195-1219.
- [Gab15] Eric GABA. *Illustration des courbures principales*. <https://commons.wikimedia.org/>. [En ligne ; visité le 14 septembre 2015 ; illustration sous licence Creative Commons CC BY-SA 3.0]. 2015.
- [Geb+09] Katarzyna GEBAL, Jakob Andreas BÆRENTZEN, Henrik AANÆS et Rasmus LARSEN. « Shape Analysis Using the Auto Diffusion Function ». In : *Computer Graphics Forum* 28.5 (2009), p. 1405-1413.
- [GG06] Timothy D. GATZKE et Cindy M. GRIMM. « Estimating curvature on triangular meshes ». In : *International Journal of Shape Modeling* 12.01 (2006), p. 1-28.

- [Gho+05] Faouzi GHORBEL, Stéphane DERRODE, Sami DHAHBI et Rim MEZHOUD. « Reconstructing with geometric moments ». In : *Proceedings of International Conference on Machine Intelligence*. 2005.
- [Gil+88] Elmer G. GILBERT, Daniel W. JOHNSON et S. Sathiya KEERTHI. « A fast procedure for computing the distance between complex objects in three-dimensional space ». In : *IEEE Journal of Robotics and Automation* 4.2 (1988), p. 193-203.
- [Guo10] Jingwei GUO. « On lattice points in large convex bodies ». In : *ArXiv e-prints* (2010). arXiv : 1007.4284 [math.NT].
- [Her98] Gabor T. HERMAN. « Geometry of digital spaces ». In : *SPIE International Symposium on Optical Science, Engineering, and Instrumentation*. International Society for Optics et Photonics. 1998, p. 2-13.
- [Hou62] Paul V.C. HOUGH. *Method and means for recognizing complex patterns*. US Patent 3,069,654. Déc. 1962.
- [Hu62] Ming-Kuei HU. « Visual pattern recognition by moment invariants ». In : *IRE Transactions on Information Theory* 8.2 (1962), p. 179-187.
- [Hux90] Martin N. HUXLEY. « Exponential sums and lattice points ». In : *Proc. London Math. Soc.* 60 (1990), p. 471-502.
- [Hux96] Martin N. HUXLEY. *Area, lattice points and exponential sums*. Oxford Science publications, 1996.
- [HZ07] Xiaodi HOU et Liqing ZHANG. « Saliency detection : A spectral residual approach ». In : *CVPR'07. 2007 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*. IEEE. 2007, p. 1-8.
- [Jan+13] Allison JANOCH, Sergey KARAYEV, Yangqing JIA, Jonathan T. BARRON, Mario FRITZ, Kate SAENKO et Trevor DARRELL. « A category-level 3D object dataset : Putting the kinect to work ». In : *Consumer Depth Cameras for Computer Vision*. Springer, 2013, p. 141-165.
- [Kan96] Tapas KANUNGO. « Document Degradation Models and a Methodology for Degradation Model Validation ». Thèse de doct. University of Washington, Seattle, 1996.
- [KF92] Vladimir KOVALEVSKY et Siegfried FUCHS. « Theoretical and experimental analysis of the accuracy of perimeter estimates ». In : *Robust Computer Vision* (1992), p. 218-242.
- [Kha+90] Efim KHALIMSKY, Ralph KOPPERMAN et Paul R. MEYER. « Computer graphics and connected topologies on finite ordered sets ». In : *Topology and its Applications* 36.1 (1990), p. 1-17.
- [Kim+02] Sun-Jeong KIM, Chang-Hun KIM et David LEVIN. « Surface simplification using a discrete curvature norm ». In : *Computers & Graphics* 26.5 (2002), p. 657-663.
- [Kin] *Berkeley 3-D Object Dataset*. <http://kinectdata.com>.
- [KL12] Bertrand KERAUTRET et Jacques-Olivier LACHAUD. « Meaningful scales detection along digital contours for unsupervised local noise estimation ». In : *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* 34.12 (2012), p. 2379-2392.

- [KN91] Ekkehard KRÄTZEL et Werner G. NOWAK. « Lattice points in large convex bodies ». In : *Monatshefte für Mathematik* 112 (1991), p. 61-72.
- [Kov89] Vladimir KOVALEVSKY. « Finite topology as applied to image analysis ». In : *Computer Vision, Graphics, and Image Processing* 46.2 (1989), p. 141-161.
- [KR04] Reinhard KLETTE et Azriel ROSENFELD. *Digital geometry : Geometric methods for digital picture analysis*. Elsevier, 2004.
- [Krä88] Ekkehard KRÄTZEL. *Lattice points*. T. 33. Springer, 1988.
- [KU92] T. Yung KONG et Jayaram K. UDUPA. « A justification of a fast surface tracking algorithm ». In : *CVGIP : Graphical Models and Image Processing* 54.2 (1992), p. 162-170.
- [KŽ00] Reinhard KLETTE et Joviša ŽUNIĆ. « Multigrid convergence of calculated features in image analysis ». In : *Journal of Mathematical Imaging and Vision* 13.3 (2000), p. 173-191.
- [Lac+07] Jacques-Olivier LACHAUD, Anne VIALARD et François de VIEILLEVILLE. « Fast, accurate and convergent tangent estimation on digital contours ». In : *Image and Vision Computing* 25.10 (2007), p. 1572-1587.
- [Lac+16] Jacques-Olivier LACHAUD, David COEURJOLLY et Jérémy LEVALLOIS. « Robust and Convergent Curvature and Normal Estimators with Digital Integral Invariants ». In : *Modern Approaches to Discrete Curvature*. Lecture Notes in Mathematics. Springer International Publishing, 2016 (à paraître).
- [Lac06] Jacques-Olivier LACHAUD. « Espaces non-euclidiens et analyse d'image : modèles déformables riemanniens et discrets, topologie et géométrie discrète ». Thèse de doct. Université Sciences et Technologies-Bordeaux I, 2006.
- [Lai+07] Yu-Kun LAI, Qian-Yi ZHOU, Shi-Min HU, Johannes WALLNER et Helmut POTTMANN. « Robust feature classification and editing ». In : *IEEE Trans. Visualization and Computer Graphics* 13 (2007), p. 34-45.
- [Lat+95] Longin LATECKI, Ulrich ECKHARDT et Azriel ROSENFELD. « Well-composed sets ». In : *Computer Vision and Image Understanding* 61.1 (1995), p. 70-83.
- [Len97] Alexandre LENOIR. « Fast estimation of mean curvature on the surface of a 3D discrete object ». In : *Discrete Geometry for Computer Imagery*. Springer. 1997, p. 175-186.
- [Lev+13] Jérémy LEVALLOIS, David COEURJOLLY et Jacques-Olivier LACHAUD. « Convergence asymptotique du tenseur de courbure en géométrie discrète ». In : *AFIG 2013*. 2013.
- [Lev+14] Jérémy LEVALLOIS, David COEURJOLLY et Jacques-Olivier LACHAUD. « Parameter-Free and Multigrid Convergent Digital Curvature Estimators ». In : *Discrete Geometry for Computer Imagery*. T. 8668. Lecture Notes in Computer Science. Springer International Publishing, 2014, p. 162-175.
- [Lev+15a] Jérémy LEVALLOIS, David COEURJOLLY et Jacques-Olivier LACHAUD. « Feature extraction on digital snow microstructures ». In : *ACM SIGGRAPH 2015 Posters*. ACM. 2015, p. 73.

- [Lev+15b] Jérémy LEVALLOIS, David COEURJOLLY et Jacques-Olivier LACHAUD. « Scale-space Feature Extraction on Digital Surfaces ». In : *Computers and Graphics* (2015), p. 12.
- [Li+10] Bao LI, Ruwen SCHNABEL, Reinhard KLEIN, Zhiqian CHENG, Gang DANG et Shiyao JIN. « Robust normal estimation for point clouds with sharp features ». In : *Computers & Graphics* 34.2 (2010), p. 94-106.
- [LM00] Jacques-Olivier LACHAUD et Annick MONTANVERT. « Continuous Analogs of Digital Boundaries : A Topological Approach to Iso-Surfaces ». In : *Graphical Models* 62.3 (2000), p. 129-164.
- [LM98] Jacques-Olivier LACHAUD et Annick MONTANVERT. « Digital surfaces as a basis for building isosurfaces ». In : *ICIP 98. 1998 International Conference on Image Processing*. T. 2. 1998, p. 977-981.
- [LT15] Jacques-Olivier LACHAUD et Boris THIBERT. « Properties of Gauss digitized shapes and digital surface integration ». In : *Journal of Mathematical Imaging and Vision* (2015), p. 1-19.
- [LV06] Jacques-Olivier LACHAUD et François de VIEILLEVILLE. « Convex shapes and convergence speed of discrete tangent estimators ». In : *Proc. Int. Symposium on Visual Computing*. T. 4292. Lecture Notes in Computer Science. Springer, 2006, p. 688-697.
- [Mal+08] Rémy MALGOUYRES, Florent BRUNET et Sébastien FOUREY. « Binomial Convolutions and Derivatives Estimation from Noisy Discretizations ». In : *Discrete Geometry for Computer Imagery*. T. 4992. Lecture Notes in Computer Science. Springer, 2008, p. 370-379.
- [Med+00] Gérard MEDIONI, Mi-Suen LEE et Chi-Keung TANG. *A computational framework for segmentation and grouping*. Elsevier Science Inc., 2000.
- [Mel+12] Nicolas MELLADO, Gaël GUENNEBAUD, Pascal BARLA, Patrick REUTER et Christophe SCHLICK. « Growing Least Squares for the Analysis of Manifolds in Scale-Space ». In : *Computer Graphics Forum* 31.5 (2012), p. 1691-1701.
- [Mel13] Nicolas MELLADO. « Analysis of 3D objects at multiple scales : application to shape matching ». Thèse de doct. Université Sciences et Technologies-Bordeaux I, 2013.
- [MW00] Dereck S. MEEK et Desmond J. WALTON. « On surface normal and Gaussian curvature approximations given data sampled from a smooth surface ». In : *Computer Aided Geometric Design* 17.6 (2000), p. 521-543.
- [Mül99] Wolfgang MÜLLER. « Lattice points in large convex bodies ». In : *Monatshefte für Mathematik* 128 (1999), p. 315-330.
- [Mér+09] Quentin MÉRIGOT, Maks OVSJANIKOV et Leonidas GUIBAS. « Robust Voronoi-based curvature and feature estimation ». In : *2009 SIAM/ACM Joint Conference on Geometric and Physical Modeling*. SPM'09. San Francisco, California : ACM, 2009, p. 1-12.
- [Mér+11] Quentin MÉRIGOT, Maks OVSJANIKOV et Leonidas GUIBAS. « Voronoi-Based Curvature and Feature Estimation from Point Clouds ». In : *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics* 17.6 (2011), p. 743-756.

- [Pag+02] David L. PAGE, Yiyong SUN, Andreas F. KOSCHAN, Joonki PAIK et Mongi A. ABIDI. « Normal Vector Voting : Crease Detection and Curvature Estimation on Large, Noisy Meshes ». In : *Graphical Models* 64.3–4 (2002), p. 199-229.
- [Par+12] Min Ki PARK, Seung Joo LEE et Kwan H. LEE. « Multi-scale tensor voting for feature extraction from unstructured point clouds ». In : *Graphical Models* 74.4 (2012), p. 197-208.
- [Pau+02] Mark PAULY, Markus GROSS et Leif P. KOBBELT. « Efficient simplification of point-sampled surfaces ». In : *Proceedings of the conference on Visualization'02*. IEEE Computer Society. 2002, p. 163-170.
- [Pau+03] Mark PAULY, Richard KEISER et Markus GROSS. « Multi-scale Feature Extraction on Point-Sampled Surfaces ». In : *Computer Graphics Forum* 22.3 (2003), p. 281-289.
- [Pen+10] Jingliang PENG, Yan HUANG, C.-C. Jay KUO, Ilya ECKSTEIN et Meenakshisundaram GOPI. « Feature oriented progressive lossless mesh coding ». In : *Computer Graphics Forum*. T. 29. 7. 2010, p. 2029-2038.
- [Pet02] Sylvain PETITJEAN. « A survey of methods for recovering quadrics in triangle meshes ». In : *ACM Computing Surveys* 34.2 (2002), p. 211-262.
- [PG11] Laurent PROVOT et Yan GÉRARD. « Estimation of the Derivatives of a Digital Function with a Convergent Bounded Error ». In : *Discrete Geometry for Computer Imagery*. Lecture Notes in Computer Science. Springer, 2011, p. 284-295.
- [Pot+07] Helmut POTTMANN, Johannes WALLNER, Yong-Liang YANG, Yu-Kun LAI et Shi-Min HU. « Principal curvatures from the integral invariant viewpoint ». In : *Computer Aided Geometric Design* 24.8–9 (2007), p. 428-442.
- [Pot+09] Helmut POTTMANN, Johannes WALLNER, Qi-Xing HUANG et Yong-Liang YANG. « Integral invariants for robust geometry processing ». In : *Computer Aided Geometric Design* 26.1 (2009), p. 37-60.
- [Pro+14] Laurent PROVOT, Yan GÉRARD et Fabien FESCHET. « Digital Level Layers for Digital Curve Decomposition and Vectorization ». In : *Image Processing On Line* 4 (2014), p. 169-186.
- [Rev91] Jean-Pierre REVEILLÈS. « Géométrie discrète, calcul en nombres entiers et algorithmique ». Thèse de doct. 1991.
- [RL11] Tristan ROUSSILLON et Jacques-Olivier LACHAUD. « Accurate Curvature Estimation along Digital Contours with Maximal Digital Circular Arcs ». In : *Combinatorial Image Analysis*. T. 6636. Springer, 2011, p. 43-55.
- [Ros79] Azriel ROSENFELD. « Digital topology ». In : *American Mathematical Monthly* (1979), p. 621-630.
- [Rou09] Tristan ROUSSILLON. « Algorithmes d'extraction de modèles géométriques discrets pour la représentation robuste des formes ». Thèse de doct. Lyon 2, 2009.
- [RS11] Tristan ROUSSILLON et Isabelle SIVIGNON. « Faithful polygonal representation of the convex and concave parts of a digital curve ». In : *Pattern Recognition* 44.10 (2011), p. 2693-2700.

- [Rus04] Szymon RUSINKIEWICZ. « Estimating curvatures and their derivatives on triangle meshes ». In : *3DPVT 2004. 2nd International Symposium on 3D Data Processing, Visualization and Transmission*. 2004, p. 486-493.
- [Ser82] Jean SERRA. *Image Analysis and Mathematical Morphology*. Academic Press, Inc., 1982.
- [Slo+98] Fridrich SLOBODA, Bedrich ZATKO et J. STOER. « On approximation of planar one-dimensional continua ». In : *Advances in Digital and Computational Geometry* (1998), p. 113-160.
- [Son+14] Ran SONG, Yonghuai LIU, Ralph R. MARTIN et Paul L. ROSIN. « Mesh Saliency via Spectral Processing ». In : *ACM Transactions on Graphics* 33.1 (2014), p. 1-17.
- [SS90] Gilbert W. STEWART et Ji-guang SUN. « Matrix perturbation theory ». In : (1990).
- [Sun+09] Jian SUN, Maks OVSJANIKOV et Leonidas GUIBAS. « A Concise and Provably Informative Multi-Scale Signature Based on Heat Diffusion ». In : *Computer Graphics Forum* 28.5 (2009), p. 1383-1392.
- [Sur+03] Tafiána SURAZHISKY, Evgeny MAGID, Octavian SOLDEA, Gershon ELBE et Ehud RIVLIN. « A comparison of Gaussian and mean curvatures estimation methods on triangular meshes ». In : *ICRA'03. 2003 IEEE International Conference on Robotics and Automation*. T. 1. IEEE. 2003, p. 1021-1026.
- [SW92] Ernest M. STOKELY et Shang You WU. « Surface parametrization and curvature measurement of arbitrary 3-D objects : Five practical methods ». In : *IEEE Transactions on Pattern Analysis & Machine Intelligence* 8 (1992), p. 833-840.
- [Thi96] Jean-Philippe THIRION. « New feature points based on geometric invariants for 3D image registration ». In : *International Journal of Computer Vision* 18.2 (1996), p. 121-137.
- [Tri+96] Øivind Due TRIER, Anil K JAIN et Torfinn TAXT. « Feature extraction methods for character recognition – A survey ». In : *Pattern Recognition* 29.4 (1996), p. 641-662.
- [Udu94] Jayaram K. UDUPA. « Multidimensional digital boundaries ». In : *CVGIP : Graphical Models and Image Processing* 56.4 (1994), p. 311-323.
- [Ver+11] Romain VERGNE, David VANDERHAEGHE, Jiazhou CHEN, Pascal BARLA, Xavier GRANIER et Christophe SCHLICK. « Implicit Brushes for Stylized Line-based Rendering ». In : *Computer Graphics Forum*. T. 30. 2011, p. 513-522.
- [Wan+09] Duo WANG, Bryan CLARK et Xiangmin JIAO. « An analysis and comparison of parameterization-based computation of differential quantities for discrete surfaces ». In : *Computer Aided Geometric Design* 26.5 (2009), p. 510-527.
- [Web15] Tony WEBSTER. *Giant's Causeway Basalt Formation*. <https://flic.kr/p/jJRb6y>. [En ligne ; visité le 14 septembre 2015 ; photographie sous licence Creative Commons CC BY 2.0]. 2015.
- [Win82] Peter WINTGEN. « Normal cycle and integral curvature for polyhedra in Riemannian manifolds ». In : *Differential Geometry*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York (1982).

- [Wit83] Andrew P. WITKIN. « Scale-space Filtering ». In : *Proceedings of the Eighth International Joint Conference on Artificial Intelligence. IJCAI'83*. Karlsruhe, West Germany : Morgan Kaufmann Publishers Inc., 1983, p. 1019-1022.
- [XO93] Lei XU et Erkki OJA. « Randomized Hough transform (RHT) : basic mechanisms, algorithms, and computational complexities ». In : *CVGIP : Image Understanding* 57.2 (1993), p. 131-154.
- [Xu+90] Lei XU, Erkki OJA et Pekka KULTANEN. « A new curve detection method : randomized Hough transform (RHT) ». In : *Pattern Recognition Letters* 11.5 (1990), p. 331-338.
- [Xu06] Guoliang XU. « Convergence analysis of a discretization scheme for Gaussian curvature over triangular surfaces ». In : *Computer Aided Geometric Design* 23.2 (2006), p. 193-207.
- [Yan+06] Yong-Liang YANG, Yu-Kun LAI, Shi-Min HU et Helmut POTTMANN. « Robust principal curvatures on multiple scales ». In : *Symposium on Geometry Processing*. 2006, p. 223-226.
- [Zha+13] Jie ZHANG, Junjie CAO, Xiuping LIU, Jun WANG, Jian LIU et Xiquan SHI. « Point cloud normal estimation via low-rank subspace clustering ». In : *Computers & Graphics* 37.6 (2013), p. 697-706.
- [Zäh86] Martina ZÄHLE. « Integral and current representation of Federer's curvature measures ». In : *Archiv der Mathematik* 46.6 (1986), p. 557-567.

Thèse réalisée sous la direction du Directeur de Recherche CNRS David COEURJOLLY et du Professeur Jacques-Olivier LACHAUD.

Ces travaux ont été effectués à LYON et à CHAMBÉRY entre mars 2012 et septembre 2015 au LABORATOIRE D'INFORMATIQUE EN IMAGE ET SYSTÈMES D'INFORMATION (LIRIS) et au LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUES (LAMA) dans le cadre de l'École Doctorale INFOMATHS.

Lyon, le 12 novembre 2015

Estimateurs différentiels en géométrie discrète :
applications à l'analyse de surfaces digitales

