Contrôle Terminal de LIF11 - Logique Classique

Date : 4 janvier 2011 - Durée : 1h
Le barème est donné à titre indicatif

I. Problème de logique propositionnelle (12 pts)

On considère la barre de Scheffer : c'est un connecteur binaire, noté avec une barre verticale $|$, dont la table de vérité est la suivante :

x	y	$f_{\vert}(x,y)$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	V

Remarques : en électronique, ce connecteur correspond à la porte NAND. Par ailleurs on a l'équivalence remarquable suivante : $A|B \equiv \neg(A \wedge B)$.

Dans ce problème, on ne considérera que des formules construites à partir de variables propositionnelles et des connecteurs $\neg, \wedge$ et $|$.

1. Soient A et B des formules quelconques. Donner une formule logiquement équivalente à $\neg A$ construite uniquement à partir de A et $|$. En déduire une formule logiquement équivalente à $A \wedge B$ construite uniquement à partir de A, B et $|$. En déduire que $\{|\}$ est fonctionnellement complet.
2. On se place dans le cadre du calcul de séquent, dans le système $\mathcal{G}$. On introduit la règle suivante :
$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma, A|B \vdash \Delta}(|_G)$$
Donner la règle duale $(|_D)$ ayant pour conclusion $\Gamma \vdash A|B, \Delta$.
Par la suite on appellera $\mathcal{G}_|$ le système composé des règles $(|_G)$, $(|_D)$ et (Ax).
3. Montrer que $(|_G)$ et $(|_D)$ sont correctes.
4. Donner une dérivation de $\vdash p|(p|p)$ dans le système $\mathcal{G}_|$ ainsi qu'une dérivation de $\neg(p\wedge\neg(p\wedge p))$ dans le système $\mathcal{G}$.
5. On se place dans un système dont les règles sont celles du système $\mathcal{G}$ auxquelles on ajoute celles du système $\mathcal{G}_|$. Montrer que :
   - $\Gamma \vdash A|B, \Delta$ est dérivable si et seulement si $\Gamma \vdash \neg(A \wedge B), \Delta$ l'est.
   - $\Gamma, A|B \vdash \Delta$ est dérivable si et seulement si $\Gamma, \neg(A \wedge B) \vdash \Delta$ l'est.
6. Soit A une formule composée uniquement à partir de variables propositionnelles et du connecteur $|$. On note $A^{\neg\wedge}$ la formule équivalente à A obtenue en remplaçant les occurrences de $|$ par la combinaison de $\wedge$ et $\neg$ donnée par l'équivalence $B|C \equiv \neg(B \wedge C)$. Si Γ est un multi-ensemble de formules composées uniquement à partir de variables propositionnelles et du connecteur $|$, on note $\Gamma^{\neg\wedge}$ le multi-ensemble obtenu en remplaçant toutes les formules A de Γ par leur équivalente $A^{\neg\wedge}$. Montrer par induction sur le séquent ou sur la dérivation qu'un séquent $\Gamma \vdash \Delta$, composé uniquement à partir de variables propositionnelles et de $|$, est dérivable dans $\mathcal{G}_|$ si et seulement si $\Gamma^{\neg\wedge} \vdash \Delta^{\neg\wedge}$ est dérivable dans $\mathcal{G}$. En déduire que le système $\mathcal{G}_|$ est complet pour les séquents qui sont composés uniquement à partir de variables propositionnelles et du connecteur $|$.

Règles du système $\mathcal{G}$

$$(\wedge_G)\ \frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta} \qquad (\wedge_D)\ \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \wedge B, \Delta}$$

$$(\neg_G)\ \frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta} \qquad (\neg_D)\ \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg A}$$

$$(Axiome)\ \frac{}{\Gamma, A \vdash \Delta, A}$$

II. Sémantique du calcul de prédicat (4 pts)

On considère l'alphabet suivant : symbole constante : $\{a\}$; symbole de fonction : $\{f/1\}$; symbole de prédicat : $\{p/2\}$.

On considère également la structure d'interprétation $SI = (E, I)$ suivante :

domaine : $E = \{1, 2, 3, 4\}$

$$I(f/1) : \begin{array}{ccc} 1 & \mapsto & 3 \\ 2 & \mapsto & 3 \\ 3 & \mapsto & 3 \\ 4 & \mapsto & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{l} I(a) = 1 \\ I(p/2) : \begin{array}{ccl} e_1, e_2 & \mapsto & V \text{ si } e_1 = I(f/1)(e_2) \\ e_1, e_2 & \mapsto & F \text{ sinon} \end{array} \end{array}$$

Pour chacune des formules suivantes, dire si SI en est un modèle. Sinon dire si la formule est satisfiable et en donner un modèle le cas échéant. Justifier brièvement si la formule est insatisfiable.

1. $\exists x\ \forall y\ p(x, y)$
2. $\neg(\ (\exists x\ \forall y\ p(x, y)) \Rightarrow (\exists x\ \exists y\ p(x, y))\ )$
3. $\forall x\ (f(x) \doteq f(y) \Rightarrow x \doteq y)$
4. $\forall x\ \neg(\exists y\ f(x) \doteq y)$

III. Du français à la formule (4 pts)

On considère l'alphabet suivant : symboles de constantes : $\{alan, bertrand, ernst, george, gottlob\}$; symboles de fonctions : $\{vav/1\}$; symboles de prédicats : $\{voisin/2, pair/1\}$.

On considère l'interprétation intuitive suivante : les constantes sont des personnes habitant dans une rue ; la fonction $vav/1$ associe à chaque personne, une personne qu'elle a en face d'elle ; le prédicat $voisin/2$ est vrai si ses deux arguments sont voisins l'un de l'autre ; le prédicat $pair/1$ est vrai si la personne habite une maison ayant un numéro pair.

Donner des formules logiques basées sur cet alphabet pour traduire les phrases suivantes en s'appuyant sur cette interprétation intuitive :

1. george est un voisin de gottlob, mais n'est pas son vis à vis.
2. toute personne est le vis à vis de son propre vis à vis.
3. tout vis à vis d'une personne est également son voisin.
4. la parité du numéro d'une personne est différente de celle de son vis à vis.