Contrôle Terminal de LIF11 - Logique Classique

Date : 6 janvier 2015 - Durée : 1h
Le barème est donné à titre indicatif
Documents papier autorisés

I. Opérateurs en logique propositionnelle (7 pts)

On considère deux nouveaux opérateurs booléens : la barre de Scheffer, notée $|$; et le ou exclusif (`xor`), noté $\oplus$. Ils sont définis par la table de vérité suivante :

a b	$a \vert b$	$a \oplus b$
0 0	1	0
0 1	1	1
1 0	1	1
1 1	0	0

1. On peut remarquer que $\neg p \equiv p|p$. Donner une formule équivalente à $p \wedge q$ composée uniquement avec la barre de Scheffer.
2. En déduire que $\{|\}$ est fonctionnellement complet.
3. On considère la suite de formules (A_i) définie par $A_0 = p$ et $A_{i+1} = \neg A_i$. On considère la suite de formules (B_i) obtenues à partir des A_i en remplaçant les occurrences de $\neg$ par des utilisations de $|$. Montrer que le nombre de connecteurs de B_i est $2^n - 1$.
4. Étendre la définition de la fonction *tseitin* pour traiter $|$ et $\oplus$. Remarque : les clauses de la fonction *tseitin* pour $B \Box C$ sont obtenues par transformation de la formule $q \Leftrightarrow (L_B \Box L_c)$ en forme normale conjonctive.

II. Formule satisfiable (7 pts)

Soit A la formule propositionnelle suivante :

$$p \Leftrightarrow ((\neg r \vee \neg s) \wedge \neg p)$$

1. Montrer que A est satisfiable à l'aide d'une table de vérité.
2. Montrer que le séquent $\vdash A'$ est n'est ***pas correct*** en utilisant le système $\mathcal{G}$, avec $A' = (((\neg r \vee \neg s) \wedge \neg p) \Rightarrow p) \wedge (p \Rightarrow ((\neg r \vee \neg s) \wedge \neg p))$. Conclure sur la validité de A. Remarque : il est inutile de faire une dérivation complète.
3. On donne le résultat de la transformation de Tseitin sur A :

$$\underbrace{\neg q_2}_{C_0} \wedge \underbrace{(\neg q_2 \vee \neg p \vee q_1)}_{C_1} \wedge \underbrace{(\neg q_2 \vee p \vee \neg q_1)}_{C_2} \wedge \underbrace{(q_2 \vee p \vee q_1)}_{C_3} \wedge \underbrace{(q_2 \vee \neg p \vee \neg q_1)}_{C_4}$$
$$\wedge \underbrace{(\neg q_1 \vee \neg p)}_{C_5} \wedge \underbrace{(\neg q_1 \vee q_0)}_{C_6} \wedge \underbrace{(\neg q_0 \vee p \vee q_1)}_{C_7}$$
$$\wedge \underbrace{(\neg q_0 \vee \neg r \vee \neg s)}_{C_8} \wedge \underbrace{(s \vee q_0)}_{C_9} \wedge \underbrace{(r \vee q_0)}_{C_{10}}$$

   (a) Indiquer pour chaque sous-formule de A le littéral qui lui correspond dans le résultat ci-dessus. Pour cela, on dessinera l'arbre de syntaxe abstraire de A et on annotera les noeuds de cet arbre avec les littéraux correspondants.

   (b) On peut remarquer que cette CNF contient une clause unitaire, mais qu'à part q_0, aucun littéral ne peut être déduit de cette information. Effectuer la propagation unitaire en supposant en plus que la variable p a été affectée à 1. Donner les affectations des autres variables obtenues par cette propagation, ainsi que, le cas échéant, la clause non satisfaite. Que peut-on en déduire concernant cette affectation ?

   (c) Effectuer la propagation unitaire en supposant cette fois-ci que la variable p a été affectée à 0. Donner les affectations des autres variables obtenues par cette propagation, ainsi que, le cas échéant, la clause non satisfaite. Que peut-on en déduire concernant la satisfiabilité de A ?

III. Du français à la formule (6 pts)

On considère l'alphabet suivant : symboles de constantes : s_0 ; symboles de fonctions : $origine/1$, $destination/1$; symboles de prédicats : $arete/3, sommet/1, chemin/2$.

On suppose que l'on veut exprimer des formules sur un graphe. On considère l'interprétation intuitive suivante où les éléments du domaine peuvent être des sommets ou des arêtes du graphe. La constante s_0 est un sommet particulier du graphe. Les fonctions *origine* et *destination* représentent respectivement les points de départ et d'arrivée pour les arêtes. On ne sait rien de la valeur de ces fonctions pour les sommets. Le prédicat $sommet/1$ est vrai si sont argument est un sommet. Le prédicat $arete/3$ est vrai si son premier argument est une arête qui relie son deuxième argument à son troisième. Le prédicat $chemin/2$ est vrai s'il existe une suite d'arête qui relie son premier argument à son deuxième argument.

Donner des formules logiques basées sur cet alphabet pour traduire les affirmations suivantes en s'appuyant sur cette interprétation intuitive :

1. s_0 est un sommet et il existe une arête qui par de ce sommet.
2. La fonction $origine/1$ est cohérente avec le prédicat $arete/3$: toute arête reliant un sommet à un autre a pour origine le premier sommet.
3. Il existe un chemin de x à y si on peut trouver une arête reliant x et y ou si on peut trouver un sommet tel qu'il existe un chemin pour aller à ce sommet depuis x et un chemin pour aller depuis ce sommet jusqu'à y.
4. La destination d'une arête est toujours l'origine d'une autre.

Annexe

Règles du système $\mathcal{G}$

$$(\vee_G)\ \frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta} \qquad\qquad (\vee_D)\ \frac{\Gamma \vdash \Delta, A, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B}$$

$$(\wedge_G)\ \frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta} \qquad\qquad (\wedge_D)\ \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \wedge B, \Delta}$$

$$(\Rightarrow_G)\ \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \Rightarrow B \vdash \Delta} \qquad\qquad (\Rightarrow_D)\ \frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B, \Delta}$$

$$(\neg_G)\ \frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta} \qquad\qquad (\neg_D)\ \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg A}$$

$$(Axiome)\ \frac{}{\Gamma, A \vdash \Delta, A}$$

Transformation de Tseitin

Si $tseitin(A) = (L, A'')$ alors le résultat de la transformation de A est $A'' \wedge L$, avec :

- $tseitin(p) = (p, \top)$
- $tseitin(\top) = (q, q)$ avec q une variable fraîche.
- $tseitin(\bot) = (q, \neg q)$ avec q une variable fraîche.
- Si $tseitin(B) = (L, B'')$, alors $tseitin(\neg B) = (\neg L, B'')$.
- Si $tseitin(C) = (L_B, B'')$, si $tseitin(C) = (L_C, C'')$ et si q est une variable fraîche, alors :
  - $tseitin(B \vee C) = (q, B'' \wedge C'' \wedge (\neg L_B \vee q) \wedge (\neg L_C \vee q) \wedge (\neg q \vee L_B \vee L_C))$
  - $tseitin(B \wedge C) = (q, B'' \wedge C'' \wedge (\neg L_B \vee \neg L_C \vee q) \wedge (\neg q \vee L_B) \wedge (\neg q \vee L_C))$
  - $tseitin(B \Rightarrow C) = (q, B'' \wedge C'' \wedge (L_B \vee q) \wedge (\neg L_C \vee q) \wedge (\neg q \vee \neg L_B \vee L_C))$
  - $tseitin(B \Leftrightarrow C) = (q, B'' \wedge C'' \wedge (\neg q \vee \neg L_B \vee L_C) \wedge (\neg q \vee L_B \vee \neg L_C) \wedge (q \vee L_B \vee L_C) \wedge (q \vee \neg L_B \vee \neg L_C))$