Contrôle Terminal de LIF11 - Logique Classique

Date : 4 janvier 2016 - Durée : 1h
Le barème est donné à titre indicatif
Documents papier autorisés

1 Formule insatisfiable (6 points)

Soit A la formule propositionnelle suivante :

$$(p \wedge r) \wedge \neg(\neg(p \wedge s) \Rightarrow r)$$

On donne le résultat de la transformation de Tseitin sur A :

$$\begin{array}{l}
\underbrace{q_3}_{C_0} \wedge (\underbrace{q_3 \vee \neg q_0 \vee q_2}_{C_1}) \wedge (\underbrace{\neg q_3 \vee \neg q_2}_{C_2}) \wedge (\underbrace{\neg q_3 \vee q_0}_{C_3}) \\
\wedge(\underbrace{q_2 \vee \neg r}_{C_4}) \wedge (\underbrace{q_2 \vee \neg q_1}_{C_5}) \wedge (\underbrace{\neg q_2 \vee q_1 \vee r}_{C_6}) \\
\wedge(\underbrace{q_1 \vee \neg p \vee \neg s}_{C_7}) \wedge (\underbrace{\neg q_1 \vee s}_{C_8}) \wedge (\underbrace{\neg q_1 \vee p}_{C_9}) \\
\wedge(\underbrace{q_0 \vee \neg p \vee \neg r}_{C_{10}}) \wedge (\underbrace{\neg q_0 \vee r}_{C_{11}}) \wedge (\underbrace{\neg q_0 \vee p}_{C_{12}})
\end{array}$$

1. Indiquer pour chaque sous-formule de A le littéral qui lui correspond dans le résultat ci-dessus. Pour cela, on dessinera l'arbre de syntaxe abstraire de A et on annotera les noeuds de cet arbre avec les littéraux correspondants.
2. Donner un arbre de résolution qui montre que l'ensemble de clauses ci-dessus est insatisfiable. A noter qu'il existe un tel arbre utilisant uniquement les clauses $C_0, C_2, C_3, C_4 et C_{11}$.
3. En utilisant le système $\mathcal{G}$, donner une dérivation du séquent $A \vdash$

2 Optimisation de la transformation de Tseitin (8 points)

Soient $(q_0, A) = tseitin(p \Rightarrow r)$ et $(q_1, B) = tseitin(\neg p \vee r)$. Soit $\sigma = [^{q_0}/_{q_1}]$ la substitution qui remplace q_1 par q_0.

1. Calculer A et B. Que peut-on remarquer ?
2. Montrer par induction que pour toute formule C construite à partir de variables et des connecteurs $\top, \bot, \wedge, \vee$ et $\neg$, pour toute interprétation I telle que $I(q_0) = I(q_1)$, $[C]_I = [C\sigma]_I$.
3. Soit D une formule conjonctive (CNF).
   (a) Soit I une interprétation. Montrer que si $I \models A$ et $I \models B$ alors $I(q_0) = I(q_1)$.
   (b) En déduire que si $I \models D \wedge A \wedge B$ alors $I \models D\sigma \wedge A$. Remarque : il pourra être utile de réfléchir à la formule $(D \wedge A \wedge B)\sigma$.
   (c) Soit I telle que $I \models D\sigma \wedge A$. Soit I' telle que $I'(s) = I(s)$ pour toutes les variables s sauf q_1 et $I'(q_1) = I(q_0)$. Montrer que si $I \models D\sigma \wedge A$ alors $I' \models D \wedge A \wedge B$.
   (d) En déduire que $D \wedge A \wedge B$ et $D\sigma \wedge A$ sont équisatifiables.
4. (question bonus) Le passage de $D \wedge A \wedge B$ à $D\sigma \wedge A$ permet de réduire la taille de la CNF. On peut donc espérer qu'un solveur soit plus efficace sur la deuxième CNF. Expliquer comment on pourrait généraliser cette optimisation.

T.S.V.P →

3 Du français à la formule (6 points)

On considère l'alphabet suivant : symbole de constante : *orig* ; symboles de fonction : $p_1/1$, $p_2/1$; symboles de prédicats : *segment*/1, *triangle*/1, *contient*/2.

On suppose que l'on veut exprimer des faits (via des formules du premier ordre) sur un ensemble de figures géométriques. Pour cela, on considère one interprétation intuitive des symboles ci-dessus dans laquelle les éléments du domaine sont des ensembles de points dans un plan ayant deux axes de coordonnées. La constante *orig* est le singleton contenant l'origine du plan. La fonction $p_1/1$ (resp. $p_2/1$) est la projection de son argument sur le premier (resp. deuxième) axe de coordonnées. Le prédicat *segment*/1 (resp. *triangle*/1) est vrai si son argument est un segment (resp. une triangle). Le prédicat *contient*/2 est vrai si son premier argument contient son deuxième.

Donner des formules logiques basées sur cet alphabet pour traduire les affirmations [1] suivantes en s'appuyant sur cette interprétation intuitive :

1. Tout triangle contient un segment.
2. *orig* est l'unique ensemble de points que l'on peut obtenir comme projection sur le premier axe de la projection sur le second axe de n'importe quel ensemble de points.
3. Deux ensembles de points qui ont la même projection sur le premier axe sont égaux
4. Etant donné deux ensembles de points, il existe un unique ensemble de points qui contient les deux premiers.

Annexe

Règles du système $\mathcal{G}$

$$(\vee_G)\ \frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta} \qquad\qquad (\vee_D)\ \frac{\Gamma \vdash \Delta, A, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B}$$

$$(\wedge_G)\ \frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta} \qquad\qquad (\wedge_D)\ \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \wedge B, \Delta}$$

$$(\Rightarrow_G)\ \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \Rightarrow B \vdash \Delta} \qquad\qquad (\Rightarrow_D)\ \frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B, \Delta}$$

$$(\neg_G)\ \frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta} \qquad\qquad (\neg_D)\ \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg A}$$

$$(Axiome)\ \frac{}{\Gamma, A \vdash \Delta, A}$$

Transformation de Tseitin

Si $tseitin(A) = (L, A'')$ alors le résultat de la transformation de A est $A'' \wedge L$, avec :

— $tseitin(p) = (p, \top)$
— $tseitin(\top) = (q, q)$ avec q une variable fraîche.
— $tseitin(\bot) = (q, \neg q)$ avec q une variable fraîche.
— Si $tseitin(B) = (L, B'')$, alors $tseitin(\neg B) = (\neg L, B'')$.
— Si $tseitin(C) = (L_B, B'')$, si $tseitin(C) = (L_C, C'')$ et si q est une variable fraîche, alors :
  — $tseitin(B \vee C) = (q, B'' \wedge C'' \wedge (\neg L_B \vee q) \wedge (\neg L_C \vee q) \wedge (\neg q \vee L_B \vee L_C))$
  — $tseitin(B \wedge C) = (q, B'' \wedge C'' \wedge (\neg L_B \vee \neg L_C \vee q) \wedge (\neg q \vee L_B) \wedge (\neg q \vee L_C))$
  — $tseitin(B \Rightarrow C) = (q, B'' \wedge C'' \wedge (L_B \vee q) \wedge (\neg L_C \vee q) \wedge (\neg q \vee \neg L_B \vee L_C))$
  — $tseitin(B \Leftrightarrow C) = (q, B'' \wedge C'' \wedge (\neg q \vee \neg L_B \vee L_C) \wedge (\neg q \vee L_B \vee \neg L_C) \wedge (q \vee L_B \vee L_C) \wedge (q \vee \neg L_B \vee \neg L_C))$

1. on ne s'intéresse pas ici à la véracité de ces affirmations