Contrôle terminal de logique classique

mardi 19 janvier 2010

durée : 1h - documents autorisés : mémos et notes de cours personnelles

Exercice 1:

Soit l'alphabet suivant :

- Constantes : a et b
- Symbole de fonction : $s/1$
- Symboles de prédicats : $p/1$ et $q/1$

On considère les formules suivantes :

- $\forall x\ p(x) \Rightarrow \neg q(x)$
- $\exists x\ s(y) \doteq x$
- $\exists x \forall y\ \neg s(y) \doteq x$
- $\forall x (x \doteq a \vee p(x) \vee q(x))$
- $q(s(a)) \wedge \forall x\ (\ p(x) \Rightarrow p(s(s(x)))\ )$

1. Dire parmi ces formules, lesquelles sont satisfiables et lesquelles sont valides.
2. Donner une structure d'interprétation qui est un modèle de toutes les formules précédentes.

Exercice 2:

Soit l'alphabet suivant :

- Constantes : *marc*, *sophie*
- Symboles de fonction : $chef/1$
- Symboles de predicats : $superieur/2$

1. Traduire les phrases suivantes en formules :
   (a) Sophie est la chef de Marc.
   (b) Le chef de Sophie est un supérieur de Marc.
   (c) Le chef d'un employé est également un de ses supérieurs.
   (d) Le chef d'un supérieur d'un employé est également un supérieur de cet employé.
2. Donner un ensemble de clauses satisfiable si et seulement si l'ensemble des formules précédentes l'est.

T.S.V.P →

Exercice 3: Séquents

Dans cet exercice, on considérera une extension du système $\mathcal{G}$ permettant de traiter un nouveau connecteur, $\not\Rightarrow$, dont la table de vérité est donnée ci-dessous :

x	y	$f_{\not\Rightarrow}(x, y)$
V	V	F
V	F	V
F	V	F
F	F	F

On étend la définition de valeur de vérité d'une formule avec :

$$[A \not\Rightarrow B]_I = f_{\not\Rightarrow}([A]_I, [B]_I)$$

1. Montrer que $A \not\Rightarrow B \equiv \neg(A \Rightarrow B)$.
2. Montrer que la règle suivante est correcte :

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, A \not\Rightarrow B}(\not\Rightarrow_D)$$

3. Donner une règle $(\not\Rightarrow_G)$ ayant pour conclusion $\Gamma, A \not\Rightarrow B \vdash \Delta$. Pour trouver les prémisses de la règle, on pourra s'appuyer sur l'équivalence montrée en 1. Montrer que votre règle est correcte.
4. Montrer par induction sur la dérivation qu'un séquent $\Gamma \vdash \Delta$ est dérivable dans le système $\mathcal{G}$ auquel on ajoute $(\not\Rightarrow_G)$ et $(\not\Rightarrow_D)$ si et seulement si le séquent $\Gamma' \vdash \Delta'$ est dérivable dans le système $\mathcal{G}$ avec Γ' (resp. Δ') est obtenu à partir de Γ (resp. Δ) en remplaçant toutes les sous-formules de la forme $A \not\Rightarrow B$ par leur équivalent $\neg(A \Rightarrow B)$.
5. Conclure sur la complétude du système $\mathcal{G}$ auquel on ajoute $(\not\Rightarrow_G)$ et $(\not\Rightarrow_D)$.

Règles du système $\mathcal{G}$

$$(\vee_G) \quad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta} \qquad\qquad (\vee_D) \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B}$$

$$(\wedge_G) \quad \frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta} \qquad\qquad (\wedge_D) \quad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \wedge B, \Delta}$$

$$(\Rightarrow_G) \quad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \Rightarrow B \vdash \Delta} \qquad\qquad (\Rightarrow_D) \quad \frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B, \Delta}$$

$$(\neg_G) \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta} \qquad\qquad (\neg_D) \quad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg A}$$

$$(\mathit{Axiome}) \quad \frac{}{\Gamma, A \vdash \Delta, A}$$