Logique - Contrôle 1

durée: 15 min

Nom:
Prénom:
Numéro étudiant:

Les réponses sont à donner sur la feuille.

1. Soit n_V le nombre de variables d'une formule et n_C le nombre de connecteurs utilisés pour la construire (chaque connecteur est compté autant de fois qu'il apparait dans la formule, $\top$ et $\bot$ sont considérés comme des connecteurs). Montrer par induction sur les formules que $n_V \leq n_C + 1$

Par induction sur la formule A

• Cas $A = p$
$n_V(A) = 1$ $\quad 1 \leq 0+1$ ✓
$n_C(A) = 0$

• Cas $A = \top$ ou $A = \bot$
$n_V(A) = 0$ $\quad 0 \leq 1+1$ ✓
$n_C(A) = 1$

• Cas $A = \neg B$
$n_V(A) = n_V(B)$
$n_C(A) = n_C(B)+1$

$\boxed{HI}$: $n_V(B) \leq n_C(B)+1$
$n_V(A) \leq n_C(A) \leq n_C(A)+1$ ✓

• Cas $A = B \square C$ avec $\square \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$
$\boxed{HI_1}$ $n_V(B) \leq n_C(B)+1$
$\boxed{HI_2}$ $n_V(C) \leq n_V(C)+1$

$n_V(A) \leq n_V(B) + n_V(C)$ (si $Var(B) \cap Var(C) \neq \emptyset$)
$\leq n_C(B) + n_C(C) + 1 + 1$ (HI_1 & HI_2)

or $n_C(A) = n_C(B) + n_C(C) + 1$
$\leq n_C(A) + 1$ ✓

T.S.V.P →

2. Soit $A_1, \ldots, A_n, B$ des formules. Donner une condition nécessaire et suffisante sur B pour que, quelque soient les formules $A_1, \ldots, A_n$, on aie $\{A_1, \ldots, A_n\} \models B$.

Si en particulier les A_i sont des tautologie, alors B doit en êtres une aussi : $B \Leftrightarrow \top$

3. Une formule valide est-elle satisfiable? Justifier brièvement, éventuellement à l'aide d'un contre-exemple.

Oui, si elle est vrai $\forall$ interprétat°, alors elle est vraie pour au moins une, e.g. $I = \lambda p.$ Vrai