LIFLC – Logique classique
TD1 – Rappels

Licence informatique UCBL – Automne 2017–2018

Les (parties d') exercices notés avec † sont plus difficiles.

Exercice 1 : Définitions ensemblistes autour des fonctions

Soit $f : E_1 \times \cdots \times E_n \to E'$. À partir de la définition ensembliste d'une fonction, définir les notions suivantes :

— $dom(f)$: domaine de définition d'une fonction (partielle) f

— $img(f)$: l'image du domaine de f par f (ou co-domaine)

— $f_{|E}$: la restriction (du domaine) de f à E

Exercice 2 : Ordre, totalité et bonne fondation

Pour chacun des ensembles ordonnés suivants, dire s'il est total et/ou bien fondé. Prouver ces affirmations.

1. Les entiers naturels sans zéro ordonnés selon la relation *divise* suivante : $n_1 \leq_{div} n_2$ si n_1 est un diviseur de n_2, (*i.e.* il existe un entier naturel $n'_{12} \neq 0$ tel que $n_1 n'_{12} = n_2$). On commencera par montrer que $\leq_{div}$ est un ordre.
2. Les parties d'un ensemble fini E, ordonnées par inclusion. On commencera par montrer que $\subseteq$ est un ordre.
3. † Les parties d'un ensemble infini E, ordonnées par inclusion.
4. † Les chaînes de caractères (de taille finie mais non bornée) construites sur l'alphabet $\{a, b\}$ ordonnées par ordre alphabétique (*e.g.* $a < aa < ab$). On rappelle que l'ordre alphabétique sur les mots peut être défini comme suit :

   — Si m_1 est un préfixe de m_2, alors $m_1 \leq m_2$

   — Si m_1 n'est pas préfixe de m_2 et si m_2 n'est pas préfixe de m_1, alors il existe une plus petite position p telle que $m_1[p] \neq m_2[p]$. Dans ce cas, si $m_1[p] <_{\{a,b\}} m_2[p]$, alors $m_1 \leq m_2$, sinon $m_1[p] >_{\{a,b\}} m_2[p]$ et $m_2 \leq m_1$

Exercice 3 : Composition d'ordres totaux et/ou bien fondés †

On considère un ordre $\leq_1$ sur E_1 et un ordre $\leq_2$ sur E_2. Soit $<_1$ (resp. $<_2$) la partie stricte associée à $\leq_1$ (resp. $\leq_2$). On définit $\leq_{lex}$ sur $E_1 \times E_2$ par : $(e_1, e_2) \leq_{lex} (e'_1, e'_2)$ si et seulement si :

— soit $e_1 < e'_1$

— soit $e_1 = e'_1$ et $e_2 < e'_2$

— soit $(e_1, e_2) = (e'_1, e'_2)$

1. Montrer que $\leq_{lex}$ est un ordre.
2. Montrer que si $\leq_1$ et $\leq_2$ sont totaux, alors $\leq_{lex}$ est total.
3. Montrer que si $\leq_1$ et $\leq_2$ sont bien fondés, alors $\leq_{lex}$ est bien fondé.