Examen LIFLC - Logique classique - session 1 - 4 janvier 2017
Durée : 1h
Documents autorisés

Numéro de copie :

Il faut rendre ces feuilles en les glissant dans votre copie anonyme. Ne pas les utiliser comme brouillon. Ne pas enlever l'agrafe. Les réponses sont à donner sur ces feuilles, pas dans la copie. Remplir le champ ci-dessus avec le *numéro de la copie* dans laquelle vous allez la glisser. Remplir la partie d'anonymat de la copie, puis coller le coin (en humidifiant le bord pour activer la colle). Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1: Formule conjonctive propositionnelle (5 points)

On considère la formule $\neg(((p \Rightarrow r) \Rightarrow p) \Rightarrow p)$ et sa transformation de Tseitin :

$$\underbrace{(\neg q_0)}_{C_0} \wedge \underbrace{(q_0 \vee q_1)}_{C_1} \wedge \underbrace{(q_0 \vee \neg p)}_{C_2} \wedge \underbrace{(\neg q_0 \vee \neg q_1 \vee p)}_{C_3}$$
$$\wedge \underbrace{(q_1 \vee q_2)}_{C_4} \wedge \underbrace{(q_1 \vee \neg p)}_{C_5} \wedge \underbrace{(\neg q_1 \vee \neg q_2 \vee p)}_{C_6}$$
$$\wedge \underbrace{(q_2 \vee p)}_{C_7} \wedge \underbrace{(q_2 \vee \neg r)}_{C_8} \wedge \underbrace{(\neg q_2 \vee \neg p \vee r)}_{C_9}$$

1. Effectuer la propagation unitaire sur la transformation de Tseitin. On détaillera la propagation unitaire en indiquant, pour chaque littéral déduit, quelle clause a été utilisée pour faire cette déduction.

2. Conclure sur la validité de la loi de Pierce $(((p \Rightarrow r) \Rightarrow p) \Rightarrow p)$, en justifiant votre conclusion.

3. On appelle *index des clauses* un index qui, pour chaque littéral, indique l'ensemble des clauses qui le contiennent. Donner une liste des utilisations possibles d'un index des clauses au sein de solveurs SAT basés sur DPLL (comme celui codé dans le projet).

Exercice 2: Calcul de séquent propositionnel (5 points)

On considère la formule A suivante :

$$(q \Rightarrow p) \Rightarrow (\ (\neg(r \vee q))\ \vee\ (r \vee s)\ )$$

1. Donner une dérivation complète du séquent $\vdash (q \Rightarrow p) \Rightarrow (\ (\neg(r \vee q))\ \vee\ (r \vee s)\ )$ ou exhiber une dérivation incomplète qui met en évidence que ce séquent n'est pas dérivable.

Règles du système $\mathcal{G}$

$$(\vee_G) \quad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta} \qquad\qquad (\vee_D) \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B}$$

$$(\wedge_G) \quad \frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta} \qquad\qquad (\wedge_D) \quad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \wedge B, \Delta}$$

$$(\Rightarrow_G) \quad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \Rightarrow B \vdash \Delta} \qquad\qquad (\Rightarrow_D) \quad \frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B, \Delta}$$

$$(\neg_G) \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta} \qquad\qquad (\neg_D) \quad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg A}$$

$$(Axiome) \quad \frac{}{\Gamma, A \vdash \Delta, A}$$

2. Conclure sur la validité de A. On prendra soin de rappeler la ou les propriétés du système $\mathcal{G}$qui permettent de justifier cette conclusion.

Exercice 3: Démonstration sur les formules propositionnelles (4 points)

Dans cet exercice on se limitera aux formules propositionnelles formées de variables et des connecteurs $\neg$ et $\Rightarrow$. Soient deux substitutions σ_1 et σ_2 et un ensemble de variables W tels que pour toute variable $p \in W$, soit $\sigma_1(p) = \sigma_2(p)$, soit $p \notin dom(\sigma_1)$ et $p \notin dom(\sigma_2)$.

Montrer par induction sur les formules que pour toute formule A, $A\sigma_1 = A\sigma_2$. On prendra soin d'expliciter l'hypothèse d'induction pour chaque cas.

Exercice 4: Du français à la formule (6 points)

On considère un monde d'hommes, de dieux et de demi-dieux. Les demi-dieux sont à la fois des hommes et des dieux. Dans cet exercice, on utilisera les symboles de prédicats suivants, donnés avec leur interprétation intuitive : `dieu`/1 est vrai si son argument est un dieu ; `homme`/1 est vrai si son argument est un homme ; `venere`/2 est vrai si son premier argument vénère son deuxième et `vole`/2 est vrai si son premier argument vole quelque chose à son deuxième argument.

Traduire chaque affirmation ci-dessous en formule du premier ordre en utilisant les prédicats donnés ci-dessus :

1. Le monde ne contient pas d'autre créature que des hommes, des demi-dieux et des dieux.
2. Les demi-dieux se vénèrent eux-mêmes.

3. Les dieux ne se volent pas entre eux.

4. Si un homme vénère un dieu, alors il ne peut pas le voler.

5. Chaque homme vénère *exactement un* dieu.