Cours logique - Mémo n°3

Calcul des séquents

Emmanuel Coquery

1 Préliminaires

Un multi-ensemble est un ensemble dans lequel on tient compte des occurrences des éléments. On peut également le voir comme une liste non ordonnée. Plus formellement, on le considère comme une fonction qui à chaque élément associe son nombre d'occurrences :

Définition 1 *Un multi-ensemble* Γ *sur un ensemble* $\mathcal{E}$ *est une fonction* $\Gamma : \mathcal{E} \to \mathbb{N}$.

Remarque: Si $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}'$ et si Γ est un multi-ensemble sur $\mathcal{E}$, alors on peut définir un multi-ensemble Γ' identique à Γ, mais défini sur $\mathcal{E}'$ par : $\Gamma'(e) = Gamma(e)$ si $e \in \mathcal{E}$ et $\Gamma'(e) = 0$ sinon. Par la suite, on identifiera Γ et Γ' et on laissera l'ensemble $\mathcal{E}$ implicite lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté.

Notation: On notera $\{\{e_1, \ldots, e_n\}\}$ le multi-ensemble qui à un élément e associe le nombre de fois où il apparaît dans $e_1, \ldots, e_n$. Le multi-ensemble vide (qui à tout élément associe 0) est noté $\emptyset$.

Définition 2 *Si* Γ *et* Δ *sont des multi-ensembles alors :*
- $\Gamma \cup \Delta$ *est le multi-ensemble défini par :* $(\Gamma \cup \Delta)(e) = \Gamma(e) + \Delta(e)$.
- $\Gamma \setminus \Delta$ *est le multi-ensemble défini par :*
  $(\Gamma \setminus \Delta)(e) = 0$ *si* $\Gamma(e) < \Delta(e)$
  $(\Gamma \setminus \Delta)(e) = \Gamma(e) - \Delta(e)$ *sinon.*

Par la suite on prendra l'ensemble des formules du calcul propositionnel pour $\mathcal{E}$ (c'est-à-dire que le l'on manipulera des multi-ensembles de formules) et on emploiera la notation suivante :
Notation: Par la suite, si Γ et Δ sont des multi-ensembles et A et B des formules, on notera :
- Γ, Δ pour $\Gamma \cup \Delta$
- Γ, A ou A, Γ pour $\Gamma \cup \{\{A\}\}$
- A, B pour $\{\{A, B\}\}$

2 Le système de calcul de séquents $\mathcal{G}$

Introduit par Gentzen dans les années 30.

Définition 3 *Un jugement en calcul de séquent est de la forme*

$$A_1, \ldots, A_n \vdash B_1, \ldots, B_m$$

où $A_1, \ldots, A_n$ *et* $B_1, \ldots, B_m$ *sont des multi-ensembles de formules. On notera également un tel jugement par* $\Gamma \vdash \Delta$.

Si $\Gamma = A_1, \ldots, A_n$ et $\Delta = B_1, \ldots, B_m$, le jugement $\Gamma \vdash \Delta$ se lit : "de A_1 et ... et A_n on peut déduire B_1 ou ... ou B_n".

Définition 4 *On dira que* $\Gamma \vdash \Delta$ *est* correct *si la formule* $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \Rightarrow B_1 \vee \ldots \vee B_n$ *est valide.*

Si on considère un séquent $\Gamma \vdash \Delta$ avec $\Gamma = A_1, \ldots, A_n$ et $\Delta = B_1, \ldots, B_m$ alors :

- si $n = 0$ alors $\Gamma = \emptyset$ et $\Gamma \vdash \Delta$ est noté $\vdash \Delta$. Il est correct si $B_1 \vee \ldots \vee B_m$ est valide.
- si $m = 0$ alors $\Delta = \emptyset$ et $\Gamma \vdash \Delta$ est noté $\Gamma \vdash$. Il est correct si $\neg(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n)$ est valide.

Les règles du calcul de séquents sont réparties en trois groupes : le groupe logique, l'axiome et la coupure. Elles sont présentées dans la table 1.

Règles logiques

$$(\vee_G) \ \frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta} \qquad\qquad (\vee_D) \ \frac{\Gamma \vdash \Delta, A, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B}$$

$$(\wedge_G) \ \frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta} \qquad\qquad (\wedge_D) \ \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \wedge B, \Delta}$$

$$(\Rightarrow_G) \ \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \Rightarrow B \vdash \Delta} \qquad\qquad (\Rightarrow_D) \ \frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B, \Delta}$$

$$(\neg_G) \ \frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta} \qquad\qquad (\neg_D) \ \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg A}$$

Axiome

$$(Ax)\frac{}{\Gamma, A \vdash \Delta, A}$$

Règle de coupure

$$(Coupure) \ \frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad \Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta}$$

Table 1 – Règles du système $\mathcal{G}$

Exemples de dérivations en calcul de séquents $\mathcal{G}$:

- Preuve de $p \Rightarrow p$:

$$(\Rightarrow_D) \ \frac{(Ax)\ \dfrac{}{p \vdash p}}{\vdash p \Rightarrow p}$$

- Preuve de $\neg(p \wedge q) \Rightarrow \neg p \vee \neg q$:

$$
(\Rightarrow_D)\,\dfrac{(\lor_D)\,\dfrac{(\neg_D)\,\dfrac{(\neg_D)\,\dfrac{(\neg_G)\,\dfrac{(\land_D)\,\dfrac{(Ax)\,\dfrac{}{p, q \vdash p} \qquad (Ax)\,\dfrac{}{p, q \vdash q}}{p, q \vdash p \land q}}{p, q, \neg(p \land q) \vdash}}{q, \neg(p \land q) \vdash \neg p}}{\neg(p \land q) \vdash \neg p, \neg q}}{\neg(p \land q) \vdash \neg p \lor \neg q}}{\vdash \neg(p \land q) \Rightarrow \neg p \lor \neg q}
$$

- Preuve de $(p \lor q) \land \neg(p \land q) \Rightarrow (p \land \neg q) \lor (\neg p \land q)$:
  Cette dérivation étant longue, on la découpe en trois partie afin de l'afficher lisiblement.

  Dérivation (a) :

$$
(\land_D)\,\dfrac{(Ax)\,\dfrac{}{p \vdash p, p \land \neg q, \neg p \land q} \qquad (\land_D)\,\dfrac{(Ax)\,\dfrac{}{p \vdash q, p, \neg p \land q} \qquad (\neg_D)\,\dfrac{(Ax)\,\dfrac{}{p, q \vdash q, \neg p \land q}}{p \vdash q, \neg q, \neg p \land q}}{p \vdash q, p \land \neg q, \neg p \land q}}{p \vdash p \land q, p \land \neg q, \neg p \land q}
$$

  Dérivation (b) :

$$
(\land_D)\,\dfrac{(\land_D)\,\dfrac{(\neg_D)\,\dfrac{(Ax)\,\dfrac{}{p, q \vdash p, p \land \neg q}}{q \vdash p, p \land \neg q, \neg p} \qquad (Ax)\,\dfrac{}{q \vdash p, p \land \neg q, q}}{q \vdash p, p \land \neg q, \neg p \land q} \qquad (Ax)\,\dfrac{}{q \vdash q, p \land \neg q, \neg p \land q}}{q \vdash p \land q, p \land \neg q, \neg p \land q}
$$

  Fin de la dérivation :

$$
(\Rightarrow_D)\,\dfrac{(\land_G)\,\dfrac{(\lor_D)\,\dfrac{(\neg_G)\,\dfrac{(\lor_G)\,\dfrac{\overset{\text{(a)}}{p \vdash p \land q, p \land \neg q, \neg p \land q} \qquad \overset{\text{(b)}}{q \vdash p \land q, p \land \neg q, \neg p \land q}}{p \lor q \vdash p \land q, p \land \neg q, \neg p \land q}}{p \lor q, \neg(p \land q) \vdash p \land \neg q, \neg p \land q}}{p \lor q, \neg(p \land q) \vdash (p \land \neg q) \lor (\neg p \land q)}}{(p \lor q) \land \neg(p \land q) \vdash (p \land \neg q) \lor (\neg p \land q)}}{\vdash (p \lor q) \land \neg(p \land q) \Rightarrow (p \land \neg q) \lor (\neg p \land q)}
$$

Théorème 1 (Élimination des coupures, Gentzen) *Tout séquent $\Gamma \vdash \Delta$ est prouvable dans le calcul de séquent $\mathcal{G}$ si et seulement si il est prouvable dans le système $\mathcal{G}$ sans la règle $(Coupure)$.*

Propriété 1 *Le système $\mathcal{G}$ n'est pas sensible à l'ordre d'application des règles : si deux règles (R_1) et (R_2) du système $\mathcal{G}$ peuvent être appliquées et avoir un séquent $\Gamma \vdash \Delta$ comme conclusion, et s'il existe une dérivation de $\Gamma \vdash \Delta$ dans $\mathcal{G}$ dont la règle la plus proche de la conclusion est (R_1), alors il existe une dérivation de $\Gamma \vdash \Delta$ dans $\mathcal{G}$ dont la règle la plus proche de la conclusion est (R_2).*

Autrement dit, on peut choisir de manière arbitraire une règle parmi les règles applicables à un moment donné lorsque l'on construit une dérivation sans que cela n'aie d'impact sur la possibilité de terminer la dérivation. Si on voit les multi-ensemble dans les séquent comme des liste, on peut par exemple choisir d'appliquer la règle qui concerne la formule non atomique la plus à gauche dans le séquent. Si on réussit la dérivation, on obtient un *arbre de dérivation systématique* du séquent conclusion.

Corollaire 1 *Étant donné un séquent $\Gamma \vdash \Delta$, il existe une dérivation de $\Gamma \vdash \Delta$ dans $\mathcal{G}$ si et seulement si il existe un arbre de dérivation systématique de $\Gamma \vdash \Delta$ dans $\mathcal{G}$.*

Ce corollaire donne un algorithme pour prouver un séquent dans $\mathcal{G}$: il suffit d'essayer de construire un arbre de dérivation systématique du séquent. Si la construction réussit, le séquent admet une dérivation dans $\mathcal{G}$, sinon aucune dérivation dans $\mathcal{G}$ n'admet ce séquent comme conclusion.

Propriété 2 *Tout jugement conclusion d'une instance d'une règle dans le système $\mathcal{G}$est correct si et seulement si l'ensemble des prémisses de cette instance le sont.*

Propriété 3 *Le système $\mathcal{G}$ est correct et complet : étant donné un séquent $A_1, \ldots, A_n \vdash B_1, \ldots, B_m$, il existe une dérivation dans $\mathcal{G}$ ayant $\Gamma \vdash \Delta$ comme conclusion si et seulement si la formule $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \Rightarrow B_1 \vee \ldots \vee B_m$ est valide.*

Exemple de dérivation dans le système $\mathcal{G}$: preuve de $\neg(p \wedge q) \Rightarrow \neg p \vee \neg q$:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{p \vdash p, \neg q}{\vdash p, \neg p, \neg q}(\neg_D) \qquad \dfrac{\dfrac{p, q \vdash q}{p \vdash q, \neg q}(\neg_D)}{\vdash q, \neg p, \neg q}(\neg_D)}{\vdash p \wedge q, \neg p, \neg q}(\wedge_D)}{\vdash \neg p \vee \neg q, p \wedge q}(\vee_D)}{\neg(p \wedge q) \vdash \neg p \vee \neg q}(\neg_G)}{\vdash \neg(p \wedge q) \Rightarrow \neg p \vee \neg q}(\Rightarrow_D)
$$

On peut remarquer que cette dérivation a été obtenue de bas en haut en appliquant systématiquement la règle concernant la formule non atomique la plus à gauche dans le séquent.