Cours logique - Mémo n˚6

Résolution en logique du premier ordre

Emmanuel Coquery

1 Formes particulières

1.1 Forme prénexe

Définition 1 *Une formule A est dite en* forme prénexe *si elle est de la forme :*

$$Q_1 x_1 \dots Q_n x_n B$$

où les Q_i sont des quantificateurs et où B ne contient pas de quantificateur.

Propriété 1 *Soit A une formule. Il existe une formule A' en forme prénexe telle que $A' \equiv A$.*

1.2 Forme rectifiée

Définition 2 *Une formule A est dite* rectifiée *si elle vérifie les conditions suivantes :*
- $FV(A) \cap BV(A) = \emptyset$
- *Si $Q_i x_i$ et $Q_j x_j$ sont deux occurrences distinctes de quantificateurs dans A, alors $x_i \neq x_j$*

Propriété 2 *Étant donné une formule A, il existe une formule A' rectifiée telle que $A \equiv A'$.*

1.3 Skolemisation

Propriété 3 *Soit une formule A en forme prénexe rectifiée :*

$$A = \forall x_1 \dots \forall x_n \exists x_{n+1} Q_{n+2} \dots Q_m x_m B$$

Soit f/n un nouveau symbole de fonction. Soit σ la substitution $[^{f(x_1,\dots,x_n)}/_{x_{n+1}}]$.
A est satisfiable si et seulement si la formule

$$A = \forall x_1 \dots \forall x_n Q_{n+2} \dots Q_m x_m B\sigma$$

est satisfiable.
f/n est appelé fonction de Skolem.

Propriété 4 *Soit A une formule en forme prénexe rectifiée. Il existe une formule A', dite* forme de Skolem *de A telle que :*
- *si A possède k quantificateurs $\exists$, alors A' contient k nouveaux symboles de fonction ;*
- *A' ne possède pas de quantificateur $\exists$;*
- *A' est satisfiable si et seulement si A est satisfiable.*

La méthode de *skolémisation* consiste à transformer une formule en éliminant ses quantificateurs $\exists$ via l'utilisation de la propriété 3.

1.4 Forme clausale

Définition 3 *Un* littéral *est une formule atomique (littéral* positif*) ou la négation d'une formule atomique (littéral* négatif*).*

Définition 4 *Une* clause *est une disjonction de littéraux.*

Propriété 5 *Soit $\{A_1, \dots, A_n\}$ un ensemble de formules. Il existe un ensemble de clauses $\mathcal{C}_{A_1,\dots,A_n} = \{C_1, \dots, C_m\}$ tel que $\{A_1, \dots, A_n\}$ est satisfiable si et seulement si $\mathcal{C}_{A_1,\dots,A_n}$ est satisfiable.*

Preuve: Pour chaque formule A_i, on peut calculer un ensemble de clauses $\mathcal{C}_{A_i}$ qui lui correspond de la manière suivante :

1. Éliminer les connecteur $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$ en utilisant les équivalences usuelles. On obtient alors une formule A_i^1
2. Mettre A_i^1 en forme prénexe (on obtient A_i^2).
3. Créer A_i^3 à partir de A_i^2 par skolémisation. On a A_i^3 qui est de la forme $\forall x_1 \dots \forall x_{k_i} B_i$.
4. Trouver une forme conjonctive de B_i : $C_i^1 \wedge \dots \wedge C_i^{m_i}$.
5. Utiliser le fait que $\forall x_1 \dots \forall x_{k_i} C_i^1 \wedge \dots \wedge C_i^{m_i}$ est satisfiable si et seulement si $\{C_i^1, \dots, C_i^{m_i}\}$ est satisfiable.

On termine en posant $\mathcal{C}_{A_1,\dots,A_n} = \bigcup_{i=1}^n \{C_i^1, \dots, C_i^{m_i}\}$ □

2 Unification

Notation: Soit $\sigma_1 = [^{t_1}/_{x_1}]$ et $\sigma_2 = [^{t_2}/_{x_2}]$ deux substitutions. On note $\sigma_1\sigma_2$ la substitution $[^{t_1\sigma_2}/_{x_1}, ^{t_2}/_{x_2}]$.
Remarque : Si t est un terme, $(t\sigma_1)\sigma_2 = t(\sigma_1\sigma_2)$.

Définition 5 *Étant donné un ensemble d'égalités $\{t_1 \triangleq t'_1, \dots, t_n \triangleq t'_n\}$, le* problème d'unification *consiste à déterminer s'il existe une substitution σ telle que $t_1\sigma = t'_1\sigma$ et ... et $t_n\sigma = t'_n\sigma$. Un tel σ est appelé un* unificateur *pour $\{t_1 \triangleq t'_1, \dots, t_n \triangleq t'_n\}$.*

Définition 6 *On dite que σ est un unificateur* principal *pour $\{t_1 \triangleq t'_1, \dots, t_n \triangleq t'_n\}$, si pour tout unificateur σ' de $\{t_1 \triangleq t'_1, \dots, t_n \triangleq t'_n\}$ on peut trouver une substitution σ_1 telle que $\sigma' = \sigma\sigma_1$.*

2.1 Algorithme d'unification

Le principe de cet algorithme consiste à transformer l'ensemble d'égalité de départ en un ensemble d'égalités ayant exactement les mêmes unificateurs et pour lequel on peut trouver facilement un unificateur principal. L'ensemble ainsi obtenu est de la forme $\{x_1 \triangleq s_1, \dots x_m \triangleq s_m\}$ où les variables $x_m, \dots, x_m$ n'apparaissent dans aucun des termes $s_m, \dots, s_m$. Un unificateur principal pour cet ensemble est $[^{s_1}/_{x_1}, \dots, ^{s_m}/_{x_m}]$.

L'algorithme consiste à appliquer les transformations suivantes de manière itérative, soit jusqu'à ce que l'on trouve qu'il n'y a pas de solution, soit jusqu'à ce qu'il n'y ai plus de transformation applicable.

- Si l'ensemble contient une égalité de la forme $f(t_1, \dots, t_k) \triangleq g(t'_1, \dots, t'_{k'})$, avec $f/k \neq g/k'$, alors il n'y a pas d'unificateur pour cet ensemble.

- Si l'ensemble contient une égalité de la forme $x \stackrel{\triangle}{=} t$, avec x apparaissant dans t, mais $t \neq x$ (par exemple $x \stackrel{\triangle}{=} f(x)$), alors il n'y a pas d'unificateur pour cet ensemble.
- Si l'ensemble contient une égalité de la forme $t \stackrel{\triangle}{=} x$ et si t n'est pas une variable, alors on remplace $t \stackrel{\triangle}{=} x$ par $x \stackrel{\triangle}{=} t$.
- Si l'ensemble contient une égalité de la forme $x \stackrel{\triangle}{=} x$, alors on supprime cette égalité.
- Si l'ensemble contient une égalité de la forme $f(t_1, \ldots, t_k) \stackrel{\triangle}{=} f(t'_1, \ldots, t'_k)$, alors on remplace cette égalité par les égalités $t_1 \stackrel{\triangle}{=} t'_1, \ldots, t_k \stackrel{\triangle}{=} t'_k$.
- Si l'ensemble contient une égalité de la forme $x \stackrel{\triangle}{=} t$, telle que x n'apparaît pas dans t et telle que x apparaît dans au moins une des autres égalités de l'ensemble, alors on remplace x par t dans toutes les autres égalités de l'ensemble.

Propriété 6 *L'algorithme donné ci-dessus termine. Si l'ensemble d'égalités obtenu n'a pas de solution, alors l'ensemble d'égalités de départ n'en a pas non plus. Sinon, l'ensemble obtenu est de la forme* $\{x_1 \stackrel{\triangle}{=} s_1, \ldots x_m \stackrel{\triangle}{=} s_m\}$ *et la substitution* $[{}^{s_1}/_{x_1}, \ldots, {}^{s_m}/_{x_m}]$ *est un unificateur principal pour l'ensemble d'égalités de départ.*

3 Résolution

Définition 7 *Un* renommage d'un ensemble de variables $\{x_1, \ldots, x_n\}$ *est une substitution* ρ *de la forme* $[{}^{y_1}/_{x_1}, \ldots, {}^{y_n}/_{x_n}]$ *où les* y_i *sont des variables telles que* $y_i \neq y_j$ *si* $i \neq j$ *et* $\{x_1, \ldots, x_n\} \cap \{y_1, \ldots, y_n\} = \emptyset$*.*

Un renommage d'une formule *est un renommage de l'ensemble de ses variables libres.*

Un renommage d'un ensemble de formules *est un renommage de l'ensemble des variables libres de ces formules.*

Remarque : dans une clause, toutes les variables sont libres.

Une clause est satisfiable si et seulement si sa clôture universelle l'est. Un ensemble de clauses est satisfiable si et seulement si l'ensemble de leur clôture universelle l'est. En appliquant le principe de renommage on peut transformer cet ensemble de clauses en un ensemble de clauses qui ne partagent aucune variable. Cet ensemble de clause est équivalent au précédent et est satisfiable si et seulement si la conjonction des clauses qui le compose est satisfiable. Comme les clauses ne partagent pas de variables, on obtient une formule équivalente en mettant tous les quantificateurs universels en tête de la formule. La formule ainsi obtenue est satisfiable si et seulement si la formule sans quantificateurs l'est. Donc on peut tester la (non) satisfiabilité d'un ensemble de clauses en testant celle de la conjonction des clauses obtenues en renommant celles-ci de façon à ce qu'elles n'aient pas de variables en commun.

Comme en calcul propositionnel, on identifiera une clause avec les clauses obtenues en permutant ses littéraux et en éliminant les littéraux en double.

Définition 8 *Soient deux clauses* $C_1 = A \vee p(t_1, \ldots, t_n)$ *et* $C_2 = B \vee \neg p(t'_1, \ldots, t'_n)$ *ayant des ensembles de variables disjoints. Soit* ρ *un renommage de* $\{C_1, C_2\}$*. Si l'ensemble d'égalités* $\{t_1\rho \stackrel{\triangle}{=} t'_1\rho, \ldots, t_n\rho \stackrel{\triangle}{=} t'_n\rho\}$ *admet un unificateur principal* σ*, alors la formule* $A\rho\sigma \vee B\rho\sigma$ *est appelée* résultante *de* C_1 *et* C_2*.*

Propriété 7 *Soit* C_1*,* C_2 *et* C *deux clauses telle que* C *soient une résultante de* C_1 *et* C_2*. Alors si* $\mathcal{SI}$ *est un modèle de* C_1 *et de* C_2*, alors c'est un modèle de* C*.*

La définition d'un arbre de résolution est similaire à celle utilisée pour le calcul propositionnel.

Définition 9 *Soient* $\{C_1, \ldots, C_n\}$ *un ensemble de clauses ayant des ensembles de variables distincts. Un* arbre de résolution *pour cet ensemble de clauses est un arbre tel que :*

- *chaque feuille est étiquetée par une des clauses de* $\{C_1, \ldots, C_n\}$ *;*
- *chaque noeud qui n'est pas une feuille a deux fils et est étiqueté par une résultante des clauses qui étiquettent ses fils ;*
- *la racine de l'arbre est la clause vide.*

Propriété 8 *Si il existe un arbre de résolution pour un ensemble de clauses* $\{C_1, \ldots, C_n\}$, *alors cet ensemble de clauses est insatisfiable.*