

# LIF11 - TD1

## Correction

### Exercice 1:

Pour chacune des formules suivantes, dessiner son arbre de syntaxe abstraite.

- $(p \vee q) \Rightarrow (r \wedge q)$
- $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (q \Rightarrow p)$
- $((p \vee q) \vee (\neg r)) \vee s$
- $(p \vee (q \vee ((\neg r) \vee s)))$

### Exercice 2:

- Donner une définition de “l'ensemble des variables d'une formule”.

**Correction:** On définit cet ensemble par la fonction  $Var(A)$  définie inductivement par:

- $Var(\top) = Var(\perp) = \emptyset$
- $Var(p) = \{p\}$  si  $p$  est une variable propositionnelle
- $Var(\neg A) = Var(A)$
- $Var(A \square B) = Var(A) \cup Var(B)$  où  $\square$  peut-être  $\vee, \wedge, \Rightarrow$  ou  $\Leftrightarrow$
- Montrer que si, pour toutes les variables  $p$  d'une formule  $A$ ,  $I_1(p) = I_2(p)$  alors  $[A]_{I_1} = [A]_{I_2}$ .

**Correction:** Par induction sur  $A$ .

- Soit  $A$  et  $B$  deux formules. Soit  $P_A$  et  $P_B$  leurs ensembles de variables respectifs. Si  $P_A$  et  $P_B$  sont disjoints, que peut-on dire sur la satisfiabilité de  $A \wedge B$  par rapport à celle de  $A$  et de  $B$  et pourquoi?

**Correction:**  $A \wedge B$  est satisfiable si et seulement si  $A$  et  $B$  sont satisfiables:

- Si  $A \wedge B$  est satisfiable, alors il existe une interprétation  $I$  telle que  $[A \wedge B]_I = V$ . Par ailleurs  $[A \wedge B]_I = f_\wedge([A]_I, [B]_I)$ . D'après la table de vérité de  $f_\wedge$  cela signifie que  $[A]_I = V$  et  $[B]_I = V$ . Donc  $A$  et  $B$  sont satisfiables.
- Si  $A$  et  $B$  sont satisfiables, il existe  $I_A$  telle que  $[A]_{I_A} = V$  et il existe  $I_B$  telle que  $[B]_{I_B} = V$ . Soit l'interprétation  $I_{AB}$  définie comme suit:
  - \*  $I_{AB}(p) = I_A(p)$  si  $p$  est une variable de  $A$
  - \*  $I_{AB}(p) = I_B(p)$  si  $p$  n'est pas une variable de  $A$  (en particulier pour les variables de  $B$  car  $Var(A) \cap Var(B) = \emptyset$ ).

D'après la question précédente  $[A]_{I_{AB}} = [A]_{I_A} = V$  et  $[B]_{I_{AB}} = [B]_{I_B} = V$ . Donc  $[A \wedge B]_{I_{AB}} = f_\wedge([A]_{I_{AB}}, [B]_{I_{AB}}) = V$ . Donc  $A \wedge B$  est satisfiable.

- Peut-on faire la même déduction si  $P_A$  et  $P_B$  ne sont pas disjoints? Donner un exemple.

**Correction:** Si  $A$  et  $B$  sont satisfiables mais n'ont pas un ensemble de variables disjoints, on a pas forcément  $A \wedge B$  satisfiable: prendre  $A = p$  et  $B = \neg p$ .

### Exercice 3:

- Etant donné deux interprétations différentes définies sur le même ensemble de variables, dire s'il est possible de trouver une formule qui permet de les distinguer.

**Correction:** Si  $I_1$  et  $I_2$  sont différentes, mais définies sur le même domaine, il existe une variable  $p$  telle que  $I_1(p) \neq I_2(p)$ . La formule est tout simplement  $p$ .

- Soit deux interprétations  $I_1$  et  $I_2$  pour un ensemble de variables  $P$ . Si  $I_1 \neq I_2$ , est-il possible de trouver une formule  $A$  telle que  $[A]_{I_1} = [A]_{I_2}$ ?

**Correction:** Prendre par exemple  $A = \top$

- Etant donnée une formule  $A$  ayant pour ensemble de variables  $V_A$  et  $V$  un ensemble de variables tel que  $V_A \subset V$ . Soit deux interprétations différentes  $I_1$  et  $I_2$  définies pour  $V$ . Donner une condition suffisante pour que  $[A]_{I_1} = [A]_{I_2}$ .

**Correction:** Il suffit que pour toutes les variables  $p \in \text{Var}(A)$ ,  $I_1(p) = I_2(p)$ .

- En déduire le nombre maximal d'interprétations à examiner pour déterminer si une formule  $A$  est satisfiable.

**Correction:** D'après ce qui précède, il n'est pas nécessaire d'examiner une interprétation si on a déjà examiné une autre interprétation dont la valeur pour les variables de  $A$  est la même. Le nombre d'interprétations à examiner correspond au nombre de combinaisons de valeurs possibles pour les variables soit  $2^{|\text{Var}(A)|}$

### Exercice 4:

Considérons les formules suivantes:

- $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$
- $((p \Rightarrow q) \Rightarrow p) \Rightarrow p$
- $(p \Rightarrow q) \wedge (\neg p \Rightarrow r)$

Pour chacune de ces formules:

1. Donner l'ensemble de ses sous-formules.
2. Donner la table de vérité de la formule.
3. Dire si la formule est satisfiable et/ou valide.

### Exercice 5:

Montrer les équivalences suivantes en comparant la valeur des formules par rapport aux différentes interprétations possibles:

- $(p \vee q) \wedge (\neg(p \wedge q)) \equiv (\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q) (\equiv p \text{ xor } q)$
- $(p \Rightarrow q) \Rightarrow p \equiv p$
- $p \Rightarrow (q \wedge r) \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)$

### Exercice 6: Principe de substitution

Montrer que si  $A \equiv B$  et si  $A$  est une sous-formule de  $C$ , alors la formule  $C'$ , obtenue en remplaçant une occurrence de  $A$  par  $B$  dans  $C$ , est équivalente à  $C$ . On pourra utiliser la remarque suivante:  $A_1 \equiv A_2$  si et seulement si, pour toute interprétation  $I$ ,  $[A_1]_I = [A_2]_I$ .

#### Correction:

On veut montrer que si  $A \equiv B$  et si  $A$  est une sous-formule de  $C$ , alors la formule  $C'$  obtenue en remplaçant une occurrence de  $A$  par  $B$  dans  $C$  est équivalente à  $C$ .

La démonstration se fait par induction sur  $C$ .

- Si  $A = C$ , alors  $C' = B$ , et comme  $A \equiv B$ , on en déduit  $C \equiv C'$ . On peut remarquer que si  $C$  est atomique, alors  $sf(C) = \{C\}$  et donc que l'on a nécessairement  $A = C$ .
- Si  $A \neq C$  alors, d'après ce qui précède,  $C$  est de la forme  $\neg E$  ou  $E_1 \sqcap E_2$ , avec  $\sqcap \in \{\vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$ .
  - Si  $C = \neg E$ , alors  $C' = \neg E'$ , avec  $E'$  obtenu en remplaçant une occurrence de  $A$  par  $B$  dans  $E$ . Soit  $I$  une interprétation. Par hypothèse d'induction,  $E \equiv E'$ , donc  $[E]_I \equiv [E']_I$ . On en déduit  $[C']_I = f_{\neg}([E']_I) = f_{\neg}([E]_I) = [C]_I$ . Comme  $I$  est quelconque, on en déduit que c'est vrai pour toute interprétation, et donc que  $C \equiv C'$ .
  - Si  $C = E_1 \sqcap E_2$  alors soit l'occurrence de  $A$  est remplacée dans  $E_1$ , soit elle l'est dans  $E_2$ . Supposons qu'elle le soit dans  $E_1$  (la démonstration est similaire dans le cas où elle est remplacée dans  $E_2$ ). On a alors  $C' = E'_1 \sqcap E_2$ , avec  $E'_1$  obtenu à partir de  $E_1$  en remplaçant une occurrence de  $A$  par  $B$ . Soit  $I$  une interprétation. Par hypothèse d'induction,  $E_1 \equiv E'_1$ , donc  $[E_1]_I \equiv [E'_1]_I$ . On en déduit  $[C']_I = f_{\sqcap}([E'_1]_I, [E_2]_I) = f_{\sqcap}([E_1]_I, [E_2]_I) = [C]_I$ . Comme  $I$  est quelconque, on en déduit que c'est vrai pour toute interprétation, et donc que  $C \equiv C'$ .

### Exercice 7:

En utilisant les équivalences remarquables, réécrire les formules suivantes en n'utilisant que les connecteurs  $\neg$  et  $\wedge$ :

- $p \Leftrightarrow (q \vee r)$
- $p \vee (q \Rightarrow p)$

### Exercice 8:

Quel est le nombre des différentes fonctions booléennes à deux arguments, à trois arguments, à  $n$  arguments?

### Exercice 9:

Montrer que:

1. Une formule  $A$  est valide si et seulement si  $\neg A$  n'est pas satisfiable.

**Correction:** Si  $A$  est valide, alors pour toute interprétation  $I$ ,  $[A]_I = V$ . Regardons  $[\neg A]_I$ :  $[\neg A]_I = f_{\neg}([A]_I) = f_{\neg}(V) = F$ . Donc pour toute interprétation  $I$ ,  $[\neg A]_I = F$ . Donc il n'y a aucune interprétation  $I$  telle que  $[\neg A]_I = V$ . Donc  $\neg A$  n'est pas satisfiable.

Si  $\neg A$  n'est pas satisfiable, alors pour toute interprétation  $I$ ,  $[\neg A]_I = F$ . Or  $[\neg A]_I = f_{\neg}([A]_I)$ . Donc on a forcément  $[A]_I = V$ . Donc  $A$  est valide.

2.  $A_1, \dots, A_n \models B$  si et seulement si  $A_1 \wedge \dots \wedge A_n \Rightarrow B$  est valide (noté  $\models A_1 \wedge \dots \wedge A_n \Rightarrow B$ ).

**Correction:**

Si  $A_1, \dots, A_n \models B$  alors pour toute interprétation  $I$ : si  $[A_1]_I = V$  et ... et  $[A_n]_I = V$  alors  $[B]_I = V$ . En regardant la table de vérité de  $f_\wedge$ , on peut remarquer que  $[A_1]_I = V$  et ... et  $[A_n]_I = V$  si et seulement si  $[A_1 \wedge \dots \wedge A_n]_I = V$ . Posons  $A = A_1 \wedge \dots \wedge A_n$ . D'après la table de vérité de  $f_\Rightarrow$ , la seule possibilité pour que  $[A \Rightarrow B]_I = F$  est que  $[A]_I = V$  et  $[B]_I = F$ . Or cette possibilité est contradictoire avec le fait que si  $[A]_I = V$  alors  $[B]_I = V$ . On en déduit que  $[A \Rightarrow B]_I = V$ . Comme ce raisonnement est valable quelque soit  $I$ , on obtient que  $A_1 \wedge \dots \wedge A_n \Rightarrow B$  est valide.

Si  $A_1 \wedge \dots \wedge A_n \Rightarrow B$  est valide, alors pour toute interprétation  $I$ ,  $[A_1 \wedge \dots \wedge A_n \Rightarrow B]_I = V$ . D'après la table de vérité de  $f_\Rightarrow$ , on en déduit que si  $[A_1 \wedge \dots \wedge A_n]_I = V$ , alors  $[B]_I = V$ . En regardant la table de vérité de  $f_\wedge$ , on peut remarquer que  $[A_1]_I = V$  et ... et  $[A_n]_I = V$  si et seulement si  $[A_1 \wedge \dots \wedge A_n]_I = V$ . On en déduit donc que si  $[A_1]_I = V$  et ... et  $[A_n]_I = V$  alors  $[B]_I = V$ . Comme ce raisonnement est valable pour toute interprétation  $I$ , on en déduit que  $A_1, \dots, A_n \models B$ .

3.  $\{A_1, \dots, A_n\} \models B$  si et seulement si  $\{A_1, \dots, A_n, \neg B\}$  n'est pas satisfiable.

**Correction:**

D'après ce qui précède,  $A_1, \dots, A_n \models B$  si et seulement si  $A_1 \wedge \dots \wedge A_n \Rightarrow B$  est valide.

Réécrivons la formule  $A_1 \wedge \dots \wedge A_n \Rightarrow B$ :

$$\begin{aligned} A_1 \wedge \dots \wedge A_n \Rightarrow B &\equiv \neg(A_1 \wedge \dots \wedge A_n) \vee B \\ &\equiv \neg A_1 \vee \dots \vee \neg A_n \vee B \\ &\equiv \neg(A_1 \wedge \dots \wedge A_n \wedge \neg B) \end{aligned}$$

Donc  $\neg(A_1 \wedge \dots \wedge A_n \Rightarrow B) \equiv A_1 \wedge \dots \wedge A_n \wedge \neg B$ .

D'après le premier point, on déduit que  $A_1 \wedge \dots \wedge A_n \Rightarrow B$  est valide si et seulement si  $A_1 \wedge \dots \wedge A_n \wedge \neg B$  n'est pas satisfiable, c'est-à-dire si et seulement si  $\{A_1, \dots, A_n, \neg B\}$  est insatisfiable.