LIF11 - TD1

Exercice 1:

Pour chacune des formules suivantes, dessiner son arbre de syntaxe abstraite.

- $(p \vee q) \Rightarrow (r \wedge q)$
- $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (q \Rightarrow p)$
- $(((p \vee q) \vee (\neg r)) \vee s)$
- $(p \vee (q \vee ((\neg r) \vee s)))$

Exercice 2:

- Donner une définition de "*l'ensemble des variables d'une formule*".
- Montrer que si, pour toutes les variables p d'une formule A, $I_1(p) = I_2(p)$ alors $[A]_{I_1} = [A]_{I_2}$.
- Soit A et B deux formules. Soit P_A et P_B leurs ensembles de variables respectifs. Si P_A et P_B sont disjoints, que peut-on dire sur la satisfiabilité de $A \wedge B$ par rapport à celle de A et de B et pourquoi?
- Peut-on faire la même déduction si P_A et P_B ne sont pas disjoints? Donner un exemple.

Exercice 3:

- Etant donné deux interprétations différentes définies sur le même ensemble de variables, dire s'il est possible de trouver une formule qui permet de les distinguer.
- Soit deux interprétations I_1 et I_2 pour un ensemble de variables P. Si $I_1 \neq I_2$, est-il possible de trouver une formule A telle que $[A]_{I_1} = [A]_{I_2}$?
- Etant donnée une formule A ayant pour ensemble de variables V_A et V un ensemble de variables tel que $V_A \subset V$. Soit deux interprétations différentes I_1 et I_2 définies pour V. Donner une condition suffisante pour que $[A]_{I_1} = [A]_{I_2}$.
- En déduire le nombre maximal d'interprétations à examiner pour déterminer si une formule A est satisfiable.

Exercice 4:

Considérons les formules suivantes:

- $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$
- $((p \Rightarrow q) \Rightarrow p) \Rightarrow p$
- $(p \Rightarrow q) \wedge (\neg p \Rightarrow r)$

Pour chacune de ces formules:

1. Donner l'ensemble de ses sous-formules.
2. Donner la table de vérité de la formule.
3. Dire si la formule est satisfiable et/ou valide.

Exercice 5:

Montrer les équivalences suivantes en comparant la valeur des formules par rapport aux différentes interprétations possibles:

- $(p \vee q) \wedge (\neg(p \wedge q)) \equiv (\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$ $(\equiv p \texttt{ xor } q)$
- $(p \Rightarrow q) \Rightarrow p \equiv p$
- $p \Rightarrow (q \wedge r) \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)$

Exercice 6: Principe de substitution

Montrer que si $A \equiv B$ et si A est une sous-formule de C, alors la formule C', obtenue en remplaçant une occurrence de A par B dans C, est équivalente à C. On pourra utiliser la remarque suivante: $A_1 \equiv A_2$ si et seulement si, pour toute interprétation I, $[A_1]_I = [A_2]_I$.

Exercice 7:

En utilisant les équivalences remarquables, réécrire les formules suivantes en n'utilisant que les connecteurs $\neg$ et $\wedge$:

- $p \Leftrightarrow (q \vee r)$
- $p \vee (q \Rightarrow p)$

Exercice 8:

Quel est le nombre des différentes fonctions booléennes à deux arguments, à trois arguments, à n arguments?

Exercice 9:

Montrer que:

1. Une formule A est valide si et seulement si $\neg A$ n'est pas satisfiable.
2. $A_1, \ldots, A_n \models B$ si et seulement si $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \Rightarrow B$ est valide (noté $\models A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \Rightarrow B$).
3. $\{A_1, \ldots, A_n\} \models B$ si et seulement si $\{A_1, \ldots, A_n, \neg B\}$ n'est pas satisfiable.