

LIF11 - TD2

Exercice 1:

Pour chacune des fonctions f_1 et f_2 , donner une formule qui la réalise. On pourra éventuellement pour cela suivre la méthode suggérée à travers la démonstration du fait que $\{\top, \perp, \neg, \wedge, \Rightarrow, \vee\}$ est fonctionnellement complet.

x	y	z	$f_1(x, y, z)$	$f_2(x, y, z)$
1	1	1	1	0
1	1	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	0	1	1
0	1	1	0	0
0	1	0	0	1
0	0	1	1	0
0	0	0	0	0

Exercice 2: Additionneur binaire

Un additionneur binaire est un circuit électronique permettant de réaliser des additions sur des entiers positifs écrits en base 2. Un additionneur additionnant des nombres codés sur n bits possède $2 \times n$ entrées et $n + 1$ sorties (en effet, en binaire $10 + 10 = 100$).

On souhaite vérifier un additionneur binaire en contrôlant ses sorties en fonction de ses entrées. L'additionneur est représenté par $n + 1$ formules A_1, \dots, A_{n+1} ayant $2n$ variables représentant les entrées du circuit et telle que la valeur de vérité de A_k corresponde à la valeur de la $k^{\text{ième}}$ sortie.

1. Donner la table de vérité de deux fonctions pour l'addition de 3 bits:
 - la première calcule la somme des 3 bits sans retenue (i.e. $1 + 1 + 1 \mapsto 1$);
 - la seconde calcule la retenue de cette somme.
2. Donner deux formules réalisant ces fonctions.
3. En déduire les formules spécifiant les sorties d'un additionneur 2 bits. On considère que les entiers sont représentés avec le bit de poids faible ayant le plus petit indice, que le premier entier est représenté par p_1, p_2 et que le second est représenté par q_1, q_2 .
4. Généraliser la construction précédente pour donner une manière de construire les formules de spécification des sorties d'un additionneur n bits.
5. Expliquer comment on peut utiliser ces formules avec les formules A_1, \dots, A_{n+1} afin de vérifier que l'additionneur est correct.

Exercice 3:

Pour chacune des formules *motif*, dire quelles sont les formules *candidat* qui en sont des instances et avec quelle substitution. Lorsqu'une formule candidat n'est pas une instance d'une formule motif, indiquer l'endroit où il y a non-correspondance.

motifs	candidats
$p \Rightarrow q \wedge r$	$u \Rightarrow (s \vee t) \wedge s$
$p \vee q \Rightarrow r$	$u \vee t \Rightarrow u \wedge (u \vee t)$
$p \Rightarrow p \wedge q$	$\perp \vee u \Rightarrow (\perp \vee u) \wedge s$
$p \vee q \Rightarrow p \wedge (r \vee q)$	

Exercice 4:

Démontrer que les séquents suivants sont corrects en utilisant le système \mathcal{G} :

- $(p \Rightarrow q) \wedge p \vdash q$
- $\vdash ((p \Rightarrow q) \Rightarrow p) \Rightarrow p$
- $p \Rightarrow q, q \Rightarrow r \vdash p \Rightarrow r$
- $\vdash p \vee (q \wedge r) \Rightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

Exercice 5:

Montrer que la règle (\vee_D) du système \mathcal{G} et la règle (\Rightarrow_G) du système \mathcal{LK} sont correctes.

Règles du système \mathcal{G}

$(\vee_G) \frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}$	$(\vee_D) \frac{\Gamma \vdash \Delta, A, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B}$
$(\wedge_G) \frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}$	$(\wedge_D) \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \wedge B, \Delta}$
$(\Rightarrow_G) \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \Rightarrow B \vdash \Delta}$	$(\Rightarrow_D) \frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B, \Delta}$
$(\neg_G) \frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}$	$(\neg_D) \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg A}$
$(Axiome) \frac{}{\Gamma, A \vdash \Delta, A}$	