LIF11 Logique - TD3

Résolution

Exercice 1:

Montrer par résolution que l'ensemble de clauses suivant est contradictoire :

$$\{p \vee q, \neg p \vee q, p \vee \neg q, \neg p \vee \neg q\}$$

Exercice 2:

Un meurtre a été commis au laboratoire, le corps se trouve dans la salle de conférences. On dispose des informations suivantes :
- La secrétaire déclare qu'elle a vu l'ingénieur dans le couloir qui donne sur la salle de conférences
- Le coup de feu a été tiré dans la salle de conférences, on l'a donc entendu de toutes les pièces voisines
- L'ingénieur affirme n'avoir rien entendu

On souhaite démontrer que si la secrétaire dit vrai, alors l'ingénieur ment. Pour cela on utilise les variables propositionnelles suivantes :
- p est vraie si la secrétaire dit la vérité
- q est vraie si l'ingénieur dit la vérité
- r est vraie si l'ingénieur était dans le couloir qui donne sur la salle de conférences
- s est vraie si l'ingénieur était dans une pièce voisine de la salle de conférences
- t est vraie si l'ingénieur a entendu le coup de feu

1. Traduire les informations précédentes en 4 formules en utilisant les variables ci-dessus. Traduire également la conclusion à démonter en formule.
2. Regrouper ensuite ces formules en une seule formule A résumant le problème.
3. Transformer la négation $\neg A$ de cette formule en forme conjonctive.
4. Montrer, grâce à la méthode de résolution, que $\neg A$ est insatisfiable.
5. Que peut-on en déduire à propos de A et du problème de départ ?
6. (facultatif) Utiliser les formules trouvée en 1. pour écrire un séquent correspondant au problème et montrer que ce séquent est correct en utilisant le système $\mathcal{G}$.

Exercice 3:

On considère la fonction $resolv(A, B)$ qui, étant données deux clauses A et B donne l'ensemble des clauses qui sont des résolvantes de A et B. On considère également la fonction suivante, où E est un ensemble de clauses :

$$\mathcal{R}(E) = \{C \mid C \in resolv(A, B), A \in E \text{ et } B \in E\}$$

On considère la suite $(E_i)_{i \in \mathbb{N}}$ telle que $E_0 = E$ et $E_{i+1} = E_i \cup \mathcal{R}(E_i)$.

1. Montrer que pour tout $m \leq n$, $E_m \subseteq E_n$
2. Montrer que la suite admet un point fixe $\mathcal{R}^{\uparrow}(E)$, c'est-à-dire qu'il existe un nombre m tel que pour tout $n \geq m$, $E_m = E_n$. Indice : considérer l'ensemble des clauses possibles que l'on peut construire avec les littéraux qui apparaissent dans E.

3. Un arbre de résolution partiel pour E est un arbre binaire dont les noeuds sont des clauses et vérifiant les conditions suivantes :
   – un noeud interne est une résolvante (des racines) de ses fils
   – les feuilles sont des éléments de E
   Montrer que pour tout $i \in \mathbb{N}$, toute clause $C \in E_i$ est la racine d'un arbre de résolution partiel pour E.
4. Montrer que pour tout arbre de résolution partiel $\mathcal{A}$ pour E, la racine de $\mathcal{A}$ est un élément de $\mathcal{R}^{\uparrow}(E)$. On fera cette démonstration par induction sur la structure de ces arbres, en remarquant pour le cas des feuilles que $E_0 = E \subseteq \mathcal{R}^{\uparrow}(E)$.
5. Montrer à l'aide de 3. et 4. que E admet un arbre de résolution si et seulement si $\mathcal{R}^{\uparrow}(E)$ contient la clause vide $\square$.
6. Donner un algorithme de test de satisfiabilité basé sur le calcul de $\mathcal{R}^{\uparrow}(E)$ et montrer la correction de cet algorithme en utilisant 5.