LIF11 Logique - TD3

SAT

Exercice 1:

On appelle *littéral* une formule réduite à une variable p (littéral positif) ou la négation d'une variable $\neg p$ (littéral négatif). Soit $L = \neg p$ un littéral négatif. Alors on assimilera $\neg L$ au littéral positif p.

Une clause est une formule de la forme $L_1 \vee \ldots \vee L_n$ où $L_1, \ldots, L_n$ sont des littéraux. Si $n = 0$, alors par convention la clause est la formule $\bot$. Une formule en forme normale conjonctive (également appelées FNC ou CNF) est une formule de la forme $C_1 \wedge \ldots \wedge C_m$ où $C_1, \ldots, C_m$ sont des clauses. Si $m = 0$, alors par convention la formule est $\top$.

Étant donnée une formule A, il est toujours possible de trouver une CNF A' telle que A est satisfiable si et seulement si A' est satisfiable (on dit alors que A et A' sont équi-satisfiables).

Une telle formule peut être obtenue par la transformation de Tseitin. Cette transformation s'appuie sur la fonction $tseitin(A)$ qui renvoie une paire (L, A'') où L est un littéral et A'' est une CNF. $tseitin(A)$ est inductivement définie comme suit :

- $tseitin(p) = (p, \top)$
- $tseitin(\top) = (q, q)$ avec q une variable fraîche [1].
- $tseitin(\bot) = (q, \neg q)$ avec q une variable fraîche.
- Si $tseitin(A) = (L, A'')$, alors $tseitin(\neg A) = (\neg L, A'')$.
- Si $tseitin(A) = (L_A, A'')$, si $tseitin(B) = (L_B, B'')$ et si q est une variable fraîche, alors :
  - $tseitin(A \vee B) = (q, A'' \wedge B'' \wedge (\neg L_A \vee q) \wedge (\neg L_B \vee q) \wedge (\neg q \vee L_A \vee L_B)$
  - $tseitin(A \wedge B) = (q, A'' \wedge B'' \wedge (\neg L_A \vee \neg L_B \vee q) \wedge (\neg q \vee L_A) \wedge (\neg q \vee L_B)$
  - $tseitin(A \Rightarrow B) = (q, A'' \wedge B'' \wedge (L_A \vee q) \wedge (\neg L_B \vee q) \wedge (\neg q \vee \neg L_A \vee L_B)$
  - $tseitin(A \Leftrightarrow B) = (q, A'' \wedge B'' \wedge (\neg q \vee \neg L_A \vee L_B) \wedge (\neg q \vee L_A \vee \neg L_B) \wedge (q \vee L_A \vee L_B) \wedge (q \vee \neg L_A \vee \neg L_B)$

Si $(L_A, A'') = tseitin(A)$, alors $A' = A'' \wedge L_A$ est satisfiable si et seulement si A est satisfiable.

Utiliser la transformation de Tseitin pour obtenir des CNF équi-satisfiables à chacune des formules suivantes :

- $\neg p$
- $p \wedge r$
- $p \Leftrightarrow (p \wedge r)$
- $(p \wedge r) \vee (\neg p \vee \neg r)$

1. c'est à dire une nouvelle variable, jamais rencontrée jusqu'ici. Comme l'ensemble des variables est infini, on peut toujours trouver une variable fraîche.